



Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 3

MODULACIONES ANALÓGICAS

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



1 / 95

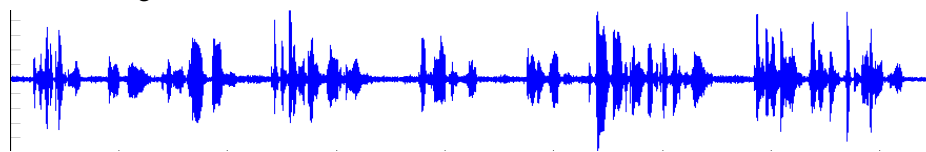
Índice de contenidos

- Introducción al concepto de modulación
- Modulaciones de amplitud (AM)
 - ▶ Modulación AM convencional
 - ▶ Modulación de doble banda lateral (DBL)
 - ▶ Modulación de banda lateral única (BLU)
 - ▶ Modulación de banda lateral vestigial (BLV)
- Modulaciones angulares
 - ▶ Modulación de fase (PM)
 - ▶ Modulación de frecuencia (FM)
- Efecto del ruido en modulaciones analógicas

Sistemas de comunicaciones analógicos

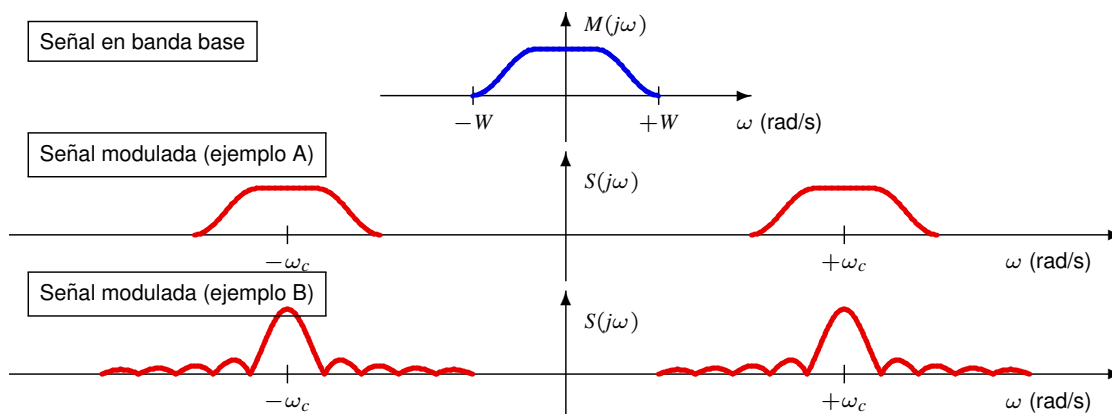
- Señal de información (moduladora): $m(t)$

- ▶ Señal analógica: la información está en la forma de onda



- Modos de transmisión en sistemas analógicos

- ▶ Transmisión en banda base (sin modular)
- ▶ Transmisión de la señal modulada
 - Se traslada el espectro de la señal (frecuencia central o de portadora ω_c)
 - Se puede modificar o no la forma o ancho de banda del espectro de la señal



Introducción al concepto de modulación

- Modulación analógica: se imprime la señal analógica en la amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal

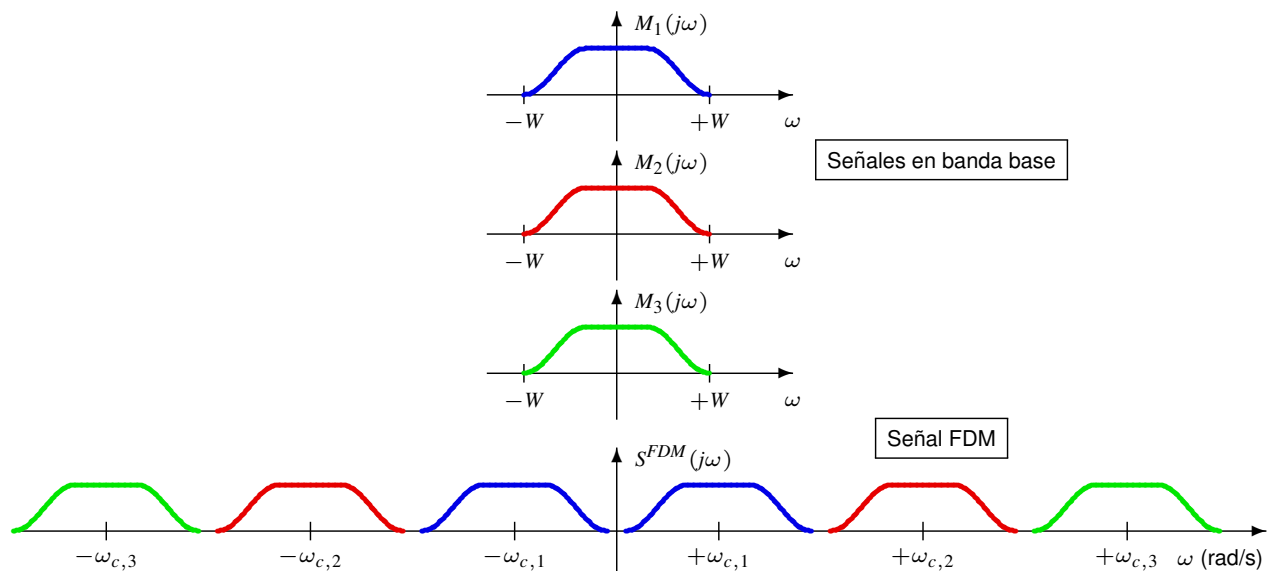
$$c(t) = A_c \cdot \cos(\underbrace{2\pi f_c t}_{\omega_c} + \phi_c)$$

- Propósito de la modulación de una señal analógica

- ▶ Adecuar la señal a las características del canal cambiando el rango de frecuencias
- ▶ Multiplexar: acomodar la transmisión simultánea de distintas señales en un mismo medio
 - ★ Multiplexación por división en frecuencia (FDM)
- ▶ Expandir el ancho de banda para aumentar la inmunidad al ruido

Multiplexación por división en frecuencia (FDM)

- Se envía el espectro de distintas señales a distintas bandas de frecuencia de forma que no se solapen (en frecuencia)
- En el receptor, se filtra el espectro de cada señal y se devuelve a banda base, lo que permite recuperar cada señal



Tipos de modulaciones analógicas

- Modulación de amplitud (AM)
AM: *Amplitude Modulation*

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Modulaciones angulares
 - ▶ Modulación de frecuencia (FM)
FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- ▶ Modulación de fase (PM)
PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

Señal analógica a transmitir: señal moduladora $m(t)$

- Caso determinista: características de la señal
 - ▶ Señal paso bajo de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s)
 - ★ Transformada de Fourier $M(j\omega)$ con $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Es una señal de potencia. Su potencia es

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |m(t)|^2 dt$$

- Caso aleatorio: análisis estadístico (señal “promedio”)
 - ▶ Modelo para la señal: proceso aleatorio $M(t)$
 - ▶ Proceso aleatorio estacionario en sentido amplio (WSS)
 - ▶ Media nula
 - ▶ Función de autocorrelación $R_M(\tau)$
 - ▶ Densidad espectral de potencia $S_M(j\omega)$
 - ▶ Proceso limitado en banda: $S_M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Potencia: P_M

$$P_M = R_M(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(j\omega) d\omega$$

Modulaciones de amplitud (AM)

- La señal moduladora (o mensaje) $m(t)$ se imprime en la amplitud de la señal portadora $c(t)$, es decir, en A_c

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Existen distintas variantes de modulación AM
 - ▶ AM: Modulación AM convencional (con portadora)
 - ▶ DBL: Doble Banda Lateral (sin portadora)
 - ▶ BLU: Banda Lateral Única
 - ▶ BLV: Banda Lateral Vestigial

Modulación AM convencional

- Portadora + AM doble banda lateral (DBL)

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Portadora } c(t)} + \underbrace{m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Doble banda lateral (DBL): } m(t) \times c(t)}$$

$$s(t) = A_c \cdot [1 + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- ▶ La señal mensaje define la envolvente de la portadora

Envolvente: $A_c \cdot [1 + m(t)]$

- Sobremodulación: se produce cuando la expresión de la envolvente toma valores negativos para algún valor de t
 - ▶ Sucede cuando $m(t) < -1$
 - ▶ Solución utilizada para evitarlo: asegurar que $|m(t)| \leq 1$
 - ★ Normalización del mensaje ($m_n(t)$)
 - ★ Índice de modulación (a)

Modulación AM convencional - Índice de modulación

- Señal moduladora (mensaje) normalizada $m_n(t)$

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|} = \frac{m(t)}{C_M}$$

- ▶ Rango de la señal moduladora: $-C_M \leq m(t) \leq +C_M$

- Índice de modulación (a)

- ▶ Se reemplaza $m(t)$ por señal moduladora con índice de modulación a

$$m_a(t) = a \times m_n(t)$$

Rango de $m_a(t)$: $-a \leq m_a(t) \leq +a$

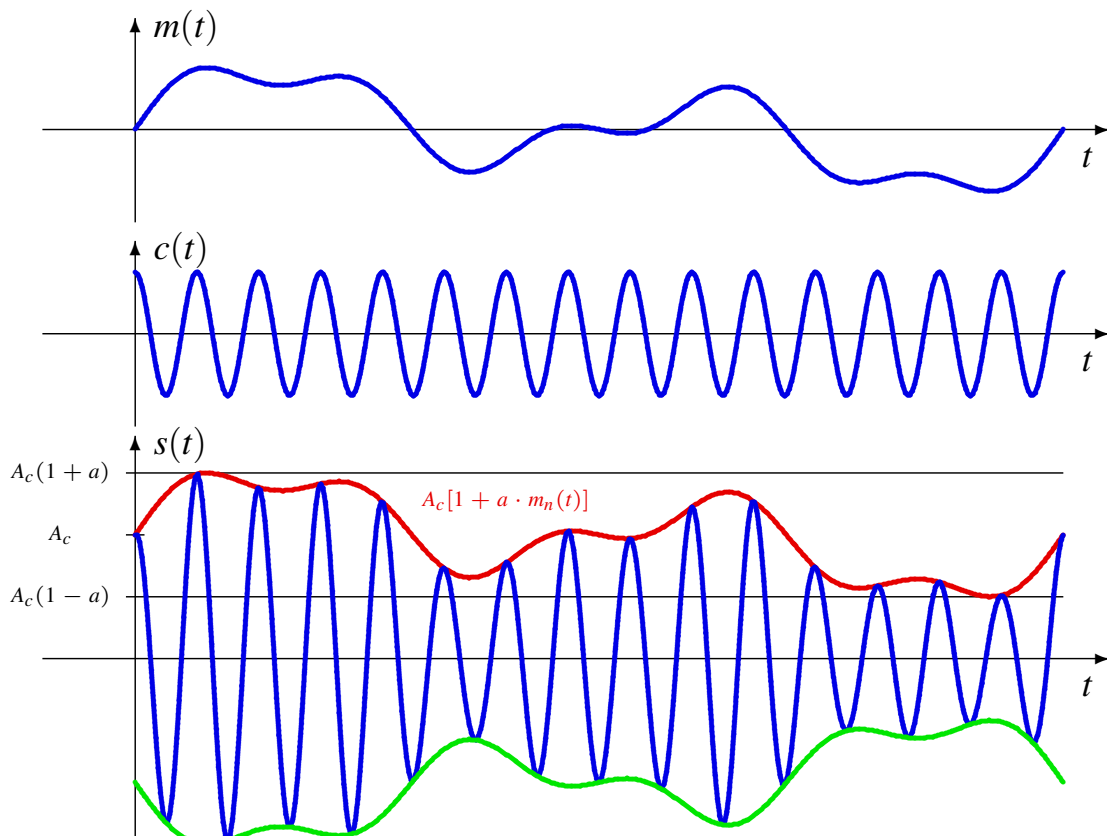
- ★ Para evitar la sobremodulación: $0 < a \leq 1$

- Señal modulada con índice de modulación a

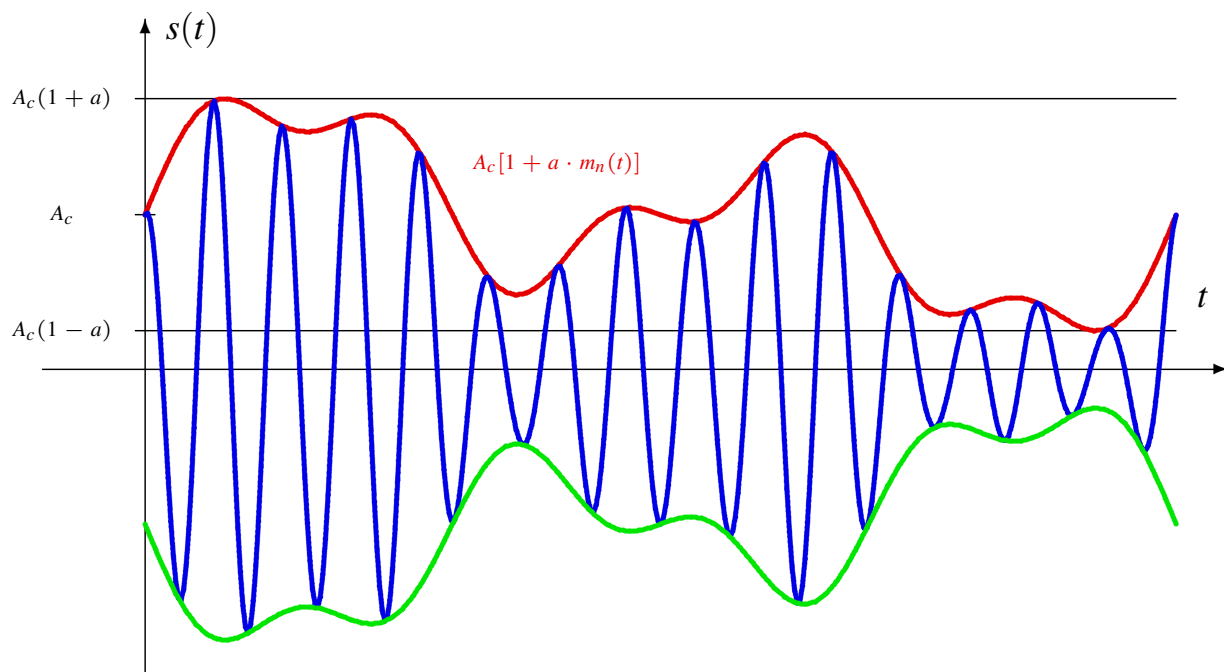
$$s(t) = A_c \cdot [1 + \underbrace{a \cdot m_n(t)}_{m_a(t)}] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$= A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

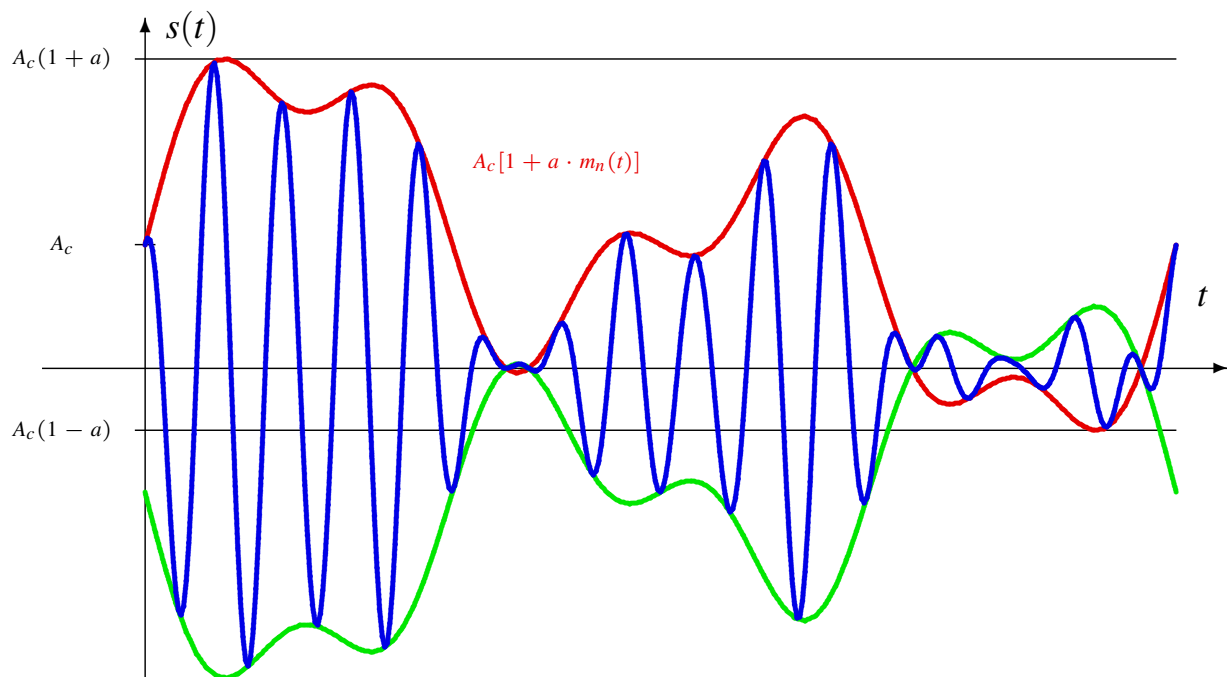
Forma de onda de una modulación AM convencional



Forma de onda de una modulación AM ($a = 0,75$)



Sobremodulación ($a = 1,5$)



Espectro de la señal AM Convencional

- Señal AM convencional

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal $m(t)$ determinista con TF $M(j\omega)$, $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$

► Espectro de $m_a(t) = a \cdot m_n(t)$: $M_a(j\omega) = a \cdot M_n(j\omega) = \frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega)$

- Espectro de señal AM convencional

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} + \mathcal{TF}\{m_a(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= A_c \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \\ &\quad + \frac{A_c}{2} \cdot \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega - j\omega_c)} \cdot e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega + j\omega_c)} \cdot e^{-j\phi_c} \right] \end{aligned}$$

Espectro de la señal AM Convencional - Análisis

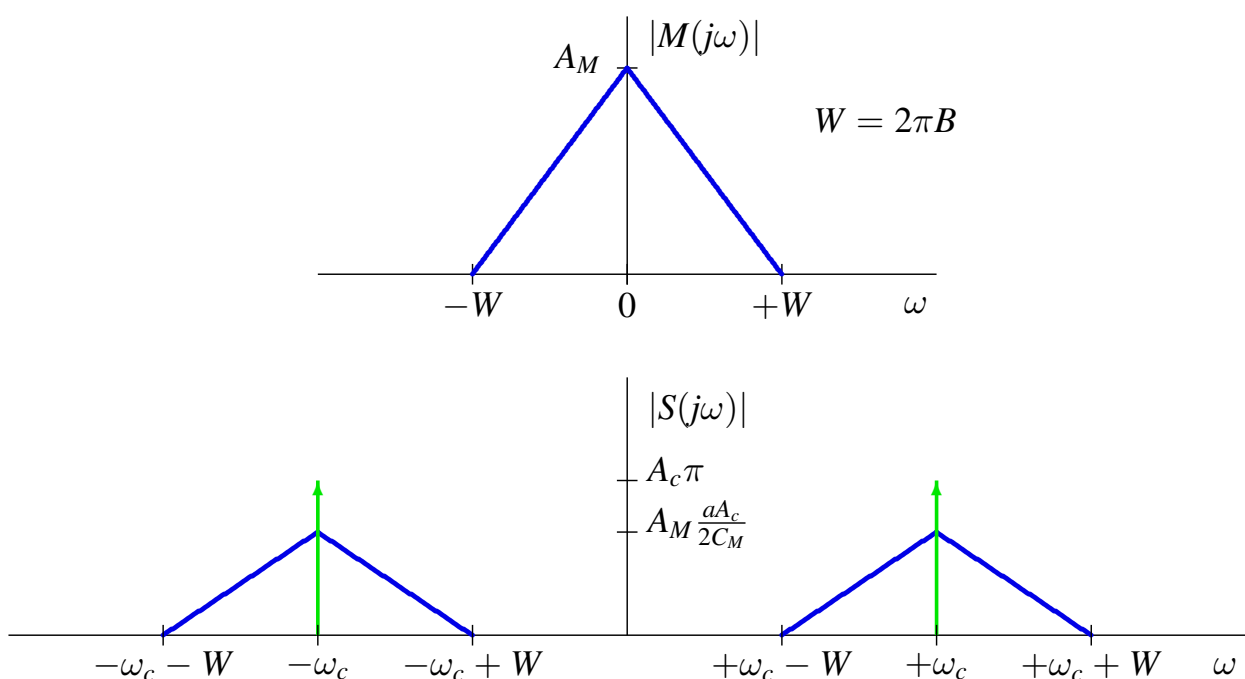
- Módulo de la transformada de Fourier $S(j\omega)$
 - ▶ Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - ★ Amplitud $A_c\pi$
 - ▶ Réplicas de la forma de $M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - ★ Factor de escala $\frac{aA_c}{2C_M}$
- Fase de la transformada de Fourier
 - ▶ La fase de la portadora introduce el término $e^{-j\phi_c}$
 - ★ Término de fase lineal
- Ancho de banda de la señal modulada

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

El doble que el ancho de banda de la señal moduladora transmitida $m(t)$

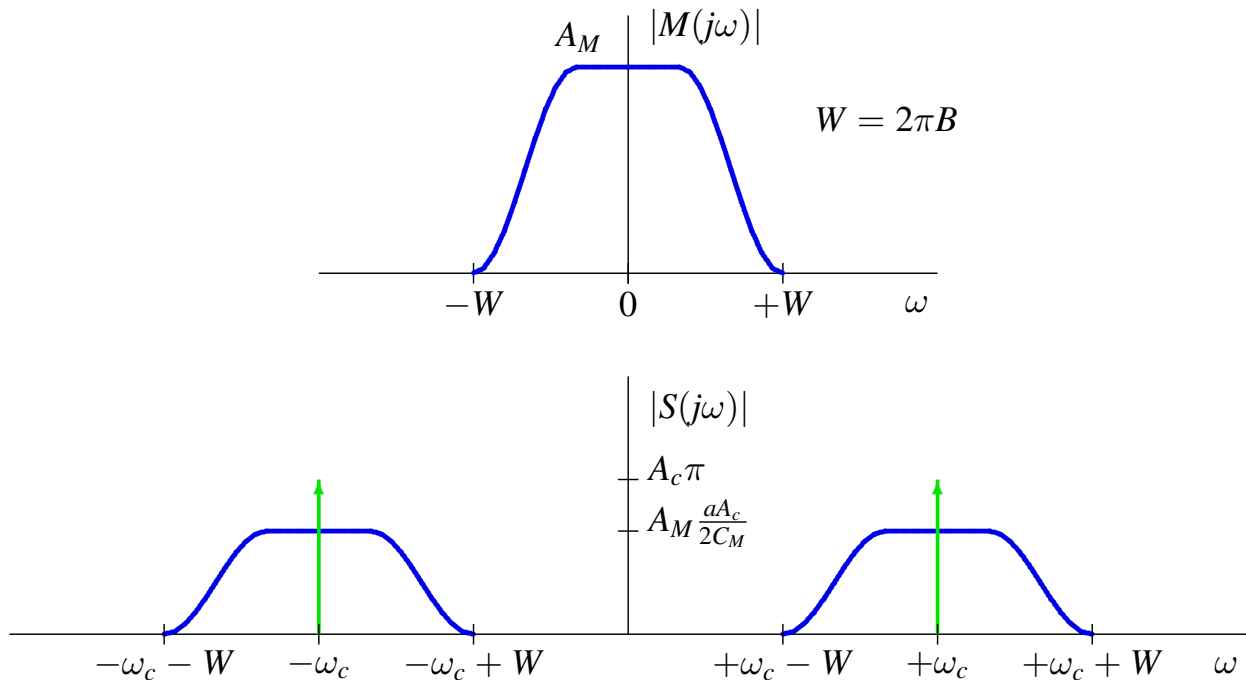
Espectro de la señal AM convencional - Representación

Un ejemplo para una cierta forma de $M(j\omega)$



Espectro de la señal AM convencional - Representación

Otro ejemplo para otra forma de $M(j\omega)$



Análisis estadístico de AM convencional

- Modelo señal modulada: proceso aleatorio

$M(t)$, estacionario, con $m_M = 0$, $R_M(\tau)$, $S_M(j\omega)$, P_M

Definición de procesos normalizado y con índice de modulación: $M_n(t) = \frac{1}{C_M} M(t)$, $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$S(t) = A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media de la señal AM convencional

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c [1 + E[M_a(t)]] \cos(\omega_c t + \phi_c) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

NOTA: Si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, $E[M_a(t)] = \frac{a}{C_M} \cdot E[M(t)] = 0$

- Función de autocorrelación de la señal AM convencional

$$R_S(t, t + \tau) = E[S(t) \cdot S(t + \tau)]$$

$$\begin{aligned} &= A_c^2 \cdot E \left[\underbrace{(1 + M_a(t))(1 + M_a(t + \tau))}_{1 + M_a(t) + M_a(t + \tau) + M_a(t) \cdot M_a(t + \tau)} \right] \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

- Proceso **cicloestacionario** de período $T = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$

Análisis estadístico de AM convencional (II)

- Promedio de la función de autocorrelación

$$\begin{aligned}\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(\tau)] \cdot \cos(\omega_c \tau) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau) \right] \cdot \cos(\omega_c \tau)\end{aligned}$$

- Densidad espectral de potencia

$$\begin{aligned}S_S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_{M_a}(j\omega - j\omega_c) + S_{M_a}(j\omega + j\omega_c)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot \left[\frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega + j\omega_c) \right]\end{aligned}$$

NOTA: Si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, entonces $R_{M_a}(\tau) = a^2 \cdot R_{M_n}(\tau) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot R_M(\tau)$;
por tanto $S_{M_a}(j\omega) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega)$ y $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M$

Análisis estadístico de AM convencional (III)

- Ancho de banda de la señal AM convencional

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Densidad espectral de potencia consta de

- Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - Amplitud $\frac{A_c^2}{2} \pi$
- Réplicas de la forma de $S_M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - Factor de escala $\left(\frac{aA_c}{2C_M}\right)^2$

- Potencia AM convencional

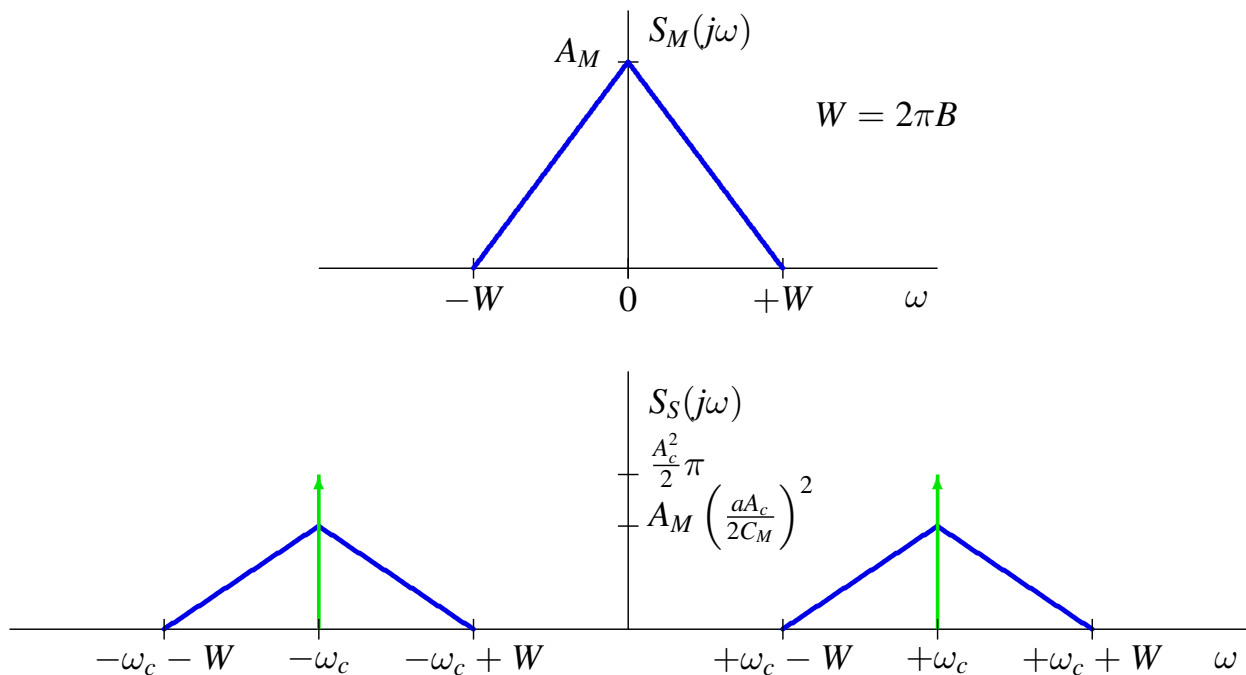
$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(0)] = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + P_{M_a}] = \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M \right]$$

- Potencia de la portadora: $\frac{A_c^2}{2}$
- Potencia de la DBL: $\left(\frac{A_c^2}{2} \frac{a^2}{C_M^2}\right) \times P_M$

NOTA: la potencia también se puede calcular como $P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega$

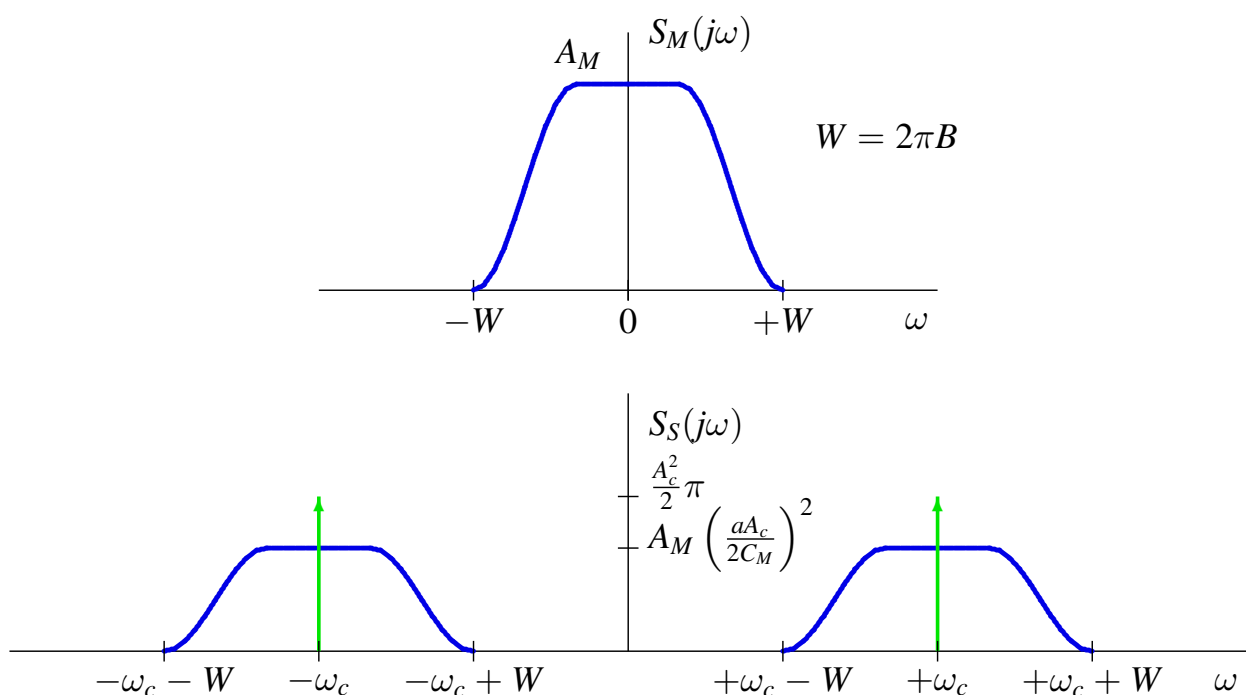
DEP de la señal AM convencional - Representación

Un ejemplo dada una cierta forma para $S_M(j\omega)$



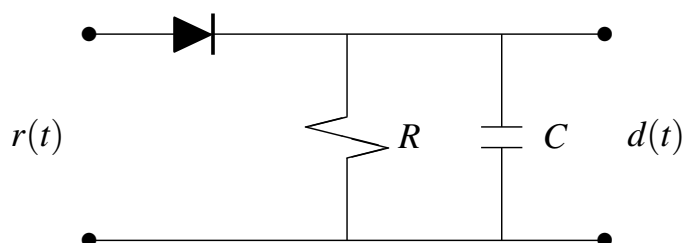
DEP de la señal AM convencional - Representación

Otro ejemplo dada otra forma para $S_M(j\omega)$



Resumen de características de AM Convencional

- Inconvenientes de la modulación AM convencional:
 - ▶ Escasa eficiencia en potencia
 - ★ Se gasta potencia en la transmisión de la portadora (que no contiene información)
 - ▶ Escasa eficiencia espectral
 - ★ El ancho de banda de la señal modulada es el doble del de la moduladora
- Ventaja fundamental de la modulación AM convencional
 - ▶ Si $a \leq 1$, no hay sobremodulación y la envolvente de la señal es proporcional a $1 + m_a(t) \geq 0$, de donde se puede extraer $m(t)$
 - ★ Eliminación de la media y escalado
 - ▶ Receptor simple: detector de envolvente



- ★ No se necesita un demodulador síncrono

Modulación de doble banda lateral sin portadora (DBL)

- Elimina el inconveniente de eficiencia en potencia de la modulación AM convencional
 - ▶ Se suprime la portadora de la AM convencional

$$s(t) = m(t) \times c(t) = m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Respuesta en frecuencia

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{m(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j\omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \end{aligned}$$

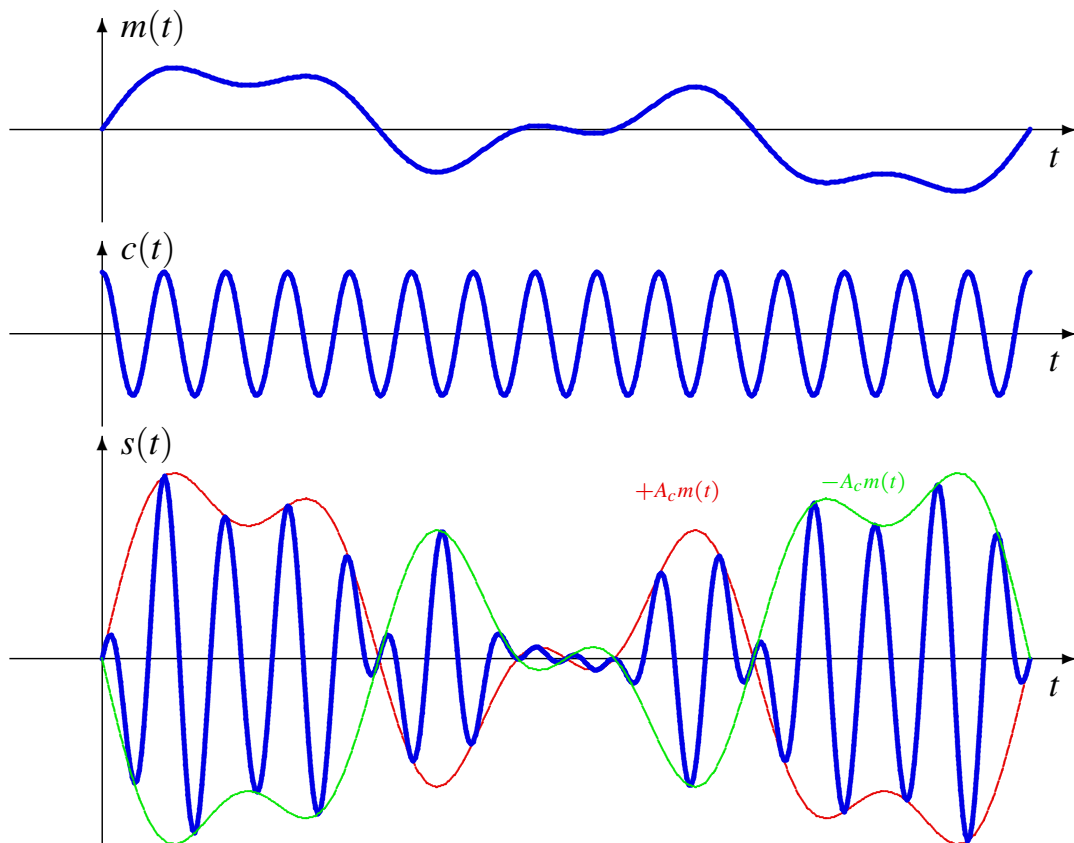
- ▶ Desaparecen las deltas de la modulación AM convencional
- ▶ Réplicas de $M(j\omega)$ en $\pm\omega_c$
 - ★ Cambia el escalado de las réplicas (al no haber normalización)
 - ★ Nombre: dos bandas laterales, inferior ($|\omega| < \omega_c$) y superior ($|\omega| > \omega_c$)

- Ancho de banda

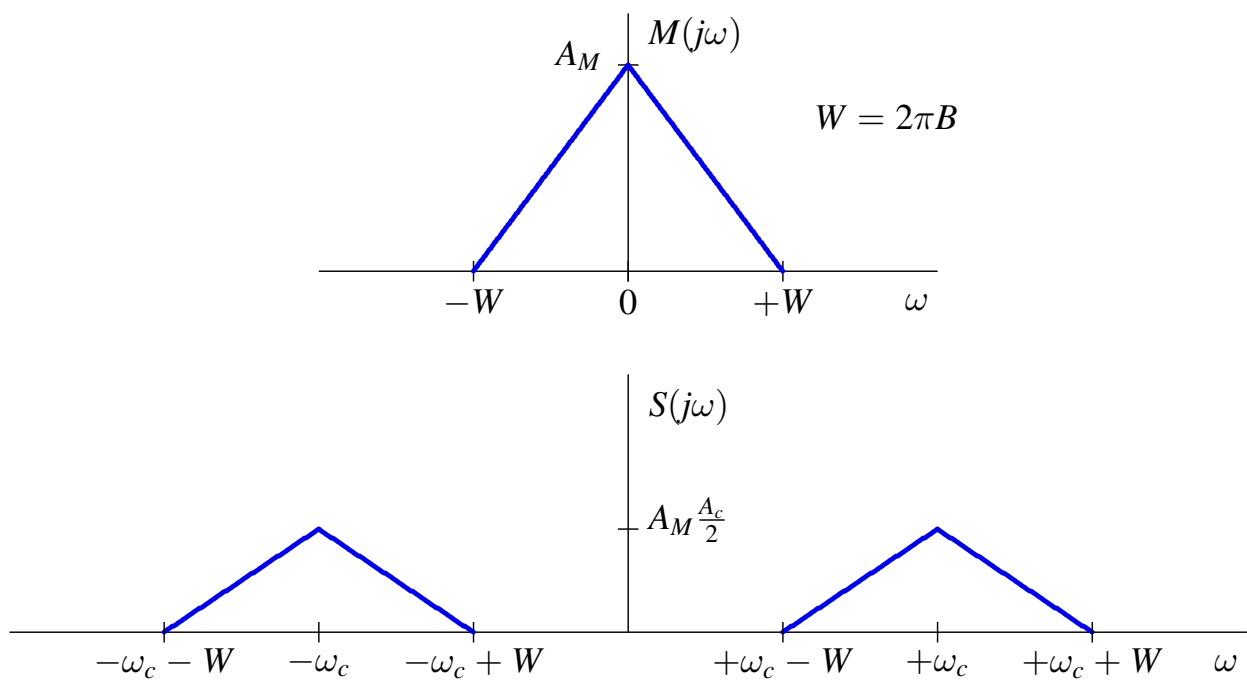
$$BW_{DBL} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora que se transmite

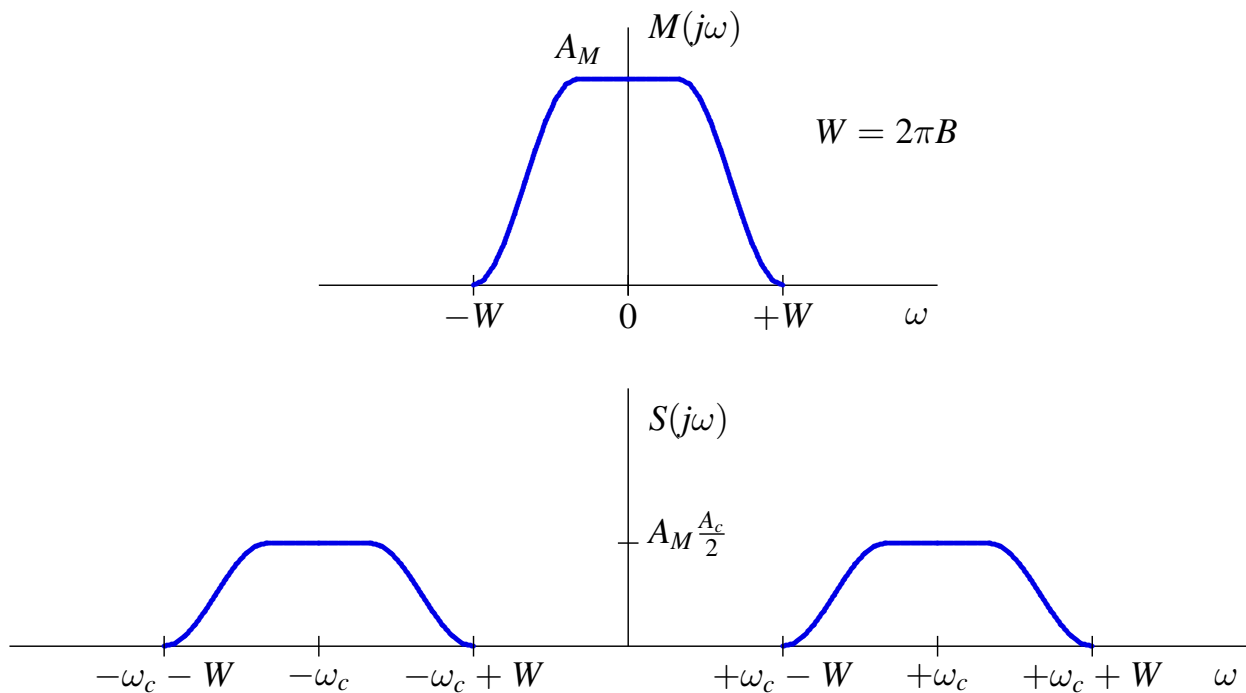
Forma de onda de una modulación AM DBL



Espectro de la señal AM DBL



Espectro de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Análisis estadístico de la modulación DBL

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$M(t), \text{ estacionario, con } m_M = 0, R_M(\tau), S_M(j\omega)$$

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$S(t) = M(t) \times c(t) = A_c M(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media señal modulada con DBL

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c \cdot E[M(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) = 0$$

- Función de autocorrelación de la señal DBL

$$\begin{aligned} R_S(t, t + \tau) &= A_c^2 \cdot E[M(t) \cdot M(t + \tau)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

- Proceso cicloestacionario de período $T = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$

Análisis estadístico de la modulación DBL (II)

- Promedio temporal de la función de autocorrelación

$$\tilde{R}_S(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot \cos(\omega_c \tau)$$

- Densidad espectral de potencia

$$S_S(j\omega) = \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Ancho de banda de la modulación DBL

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

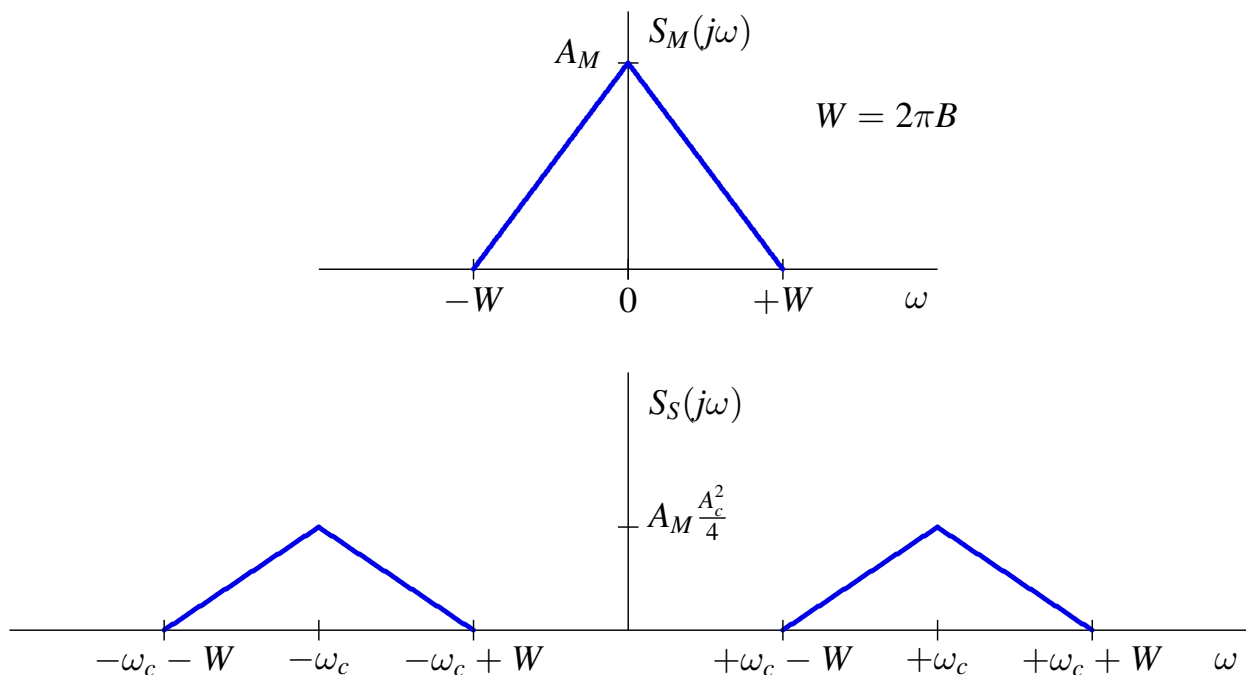
Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora que se transmite

- Potencia de la señal DBL

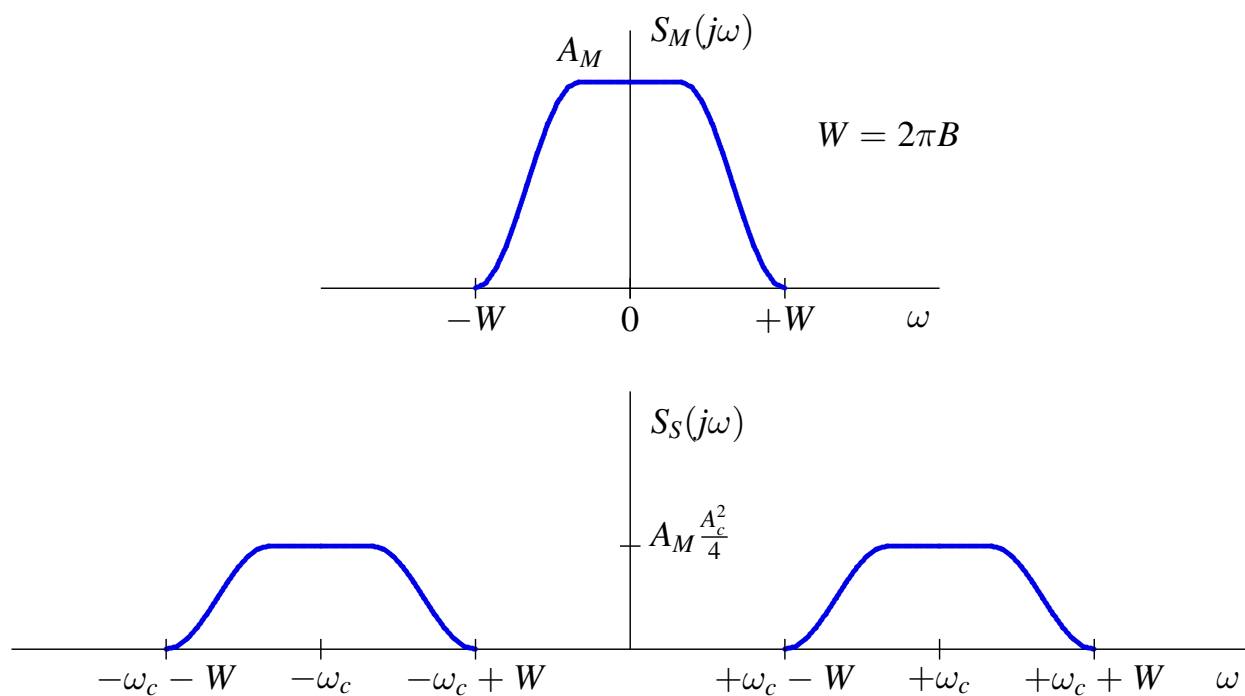
$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot P_M$$

Es eficiente en potencia (no se “malgasta” potencia en términos que no contienen información)

DEP de la señal AM DBL

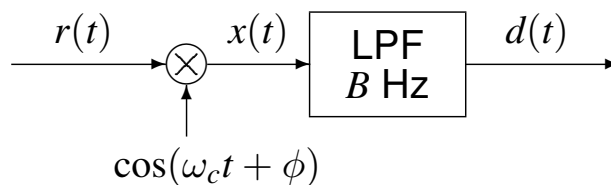


DEP de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Demodulación señales DBL

- Receptor para señales moduladas con DBL



LPF: filtro paso bajo (ancho de banda de B Hz)

- ▶ Demodulador (multiplicar por la portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$)
 - ▶ Filtro paso bajo (ancho de banda dado por la señal, B Hz)
- Rendimiento óptimo con un receptor síncrono o coherente
 - ▶ Receptor con la misma fase en la portadora del receptor que en la del transmisor $\phi = \phi_c$
- Efecto de un receptor no síncrono ($\phi \neq \phi_c$)
 - ▶ Atenuación del término relacionado con la señal $m(t)$
 - ▶ Pérdida de relación señal a ruido (prestaciones)
 - ★ El valor de la fase ϕ no varía la potencia debida al término de ruido

Efecto de un receptor no coherente

- Análisis del término de señal

$$\text{Se asume } r(t) = s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal demodulada sin filtrar

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot [\cos(\phi - \phi_c) + \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi)] \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

- ▶ Se eliminan los términos con espectro en $\pm 2\omega_c$

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c)$$

- ▶ Valor ideal, con receptor coherente ($\phi = \phi_c$)

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t)$$

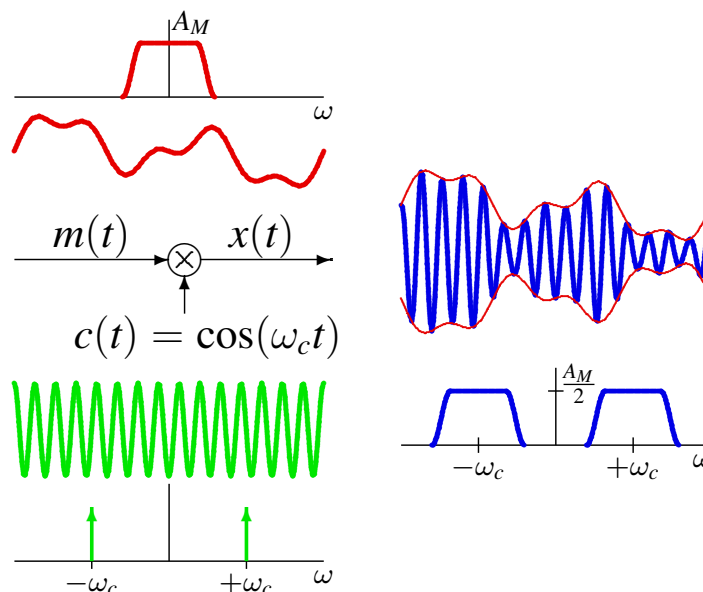
- ▶ Efecto de utilizar un receptor no coherente ($\phi \neq \phi_c$)

- ★ Término de atenuación $\cos(\phi - \phi_c)$

Revisión - Efecto de multiplicar por una senoide

- Multiplicar por una senoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas de la forma del espectro de la señal modulada, desplazadas $\pm\omega_c$

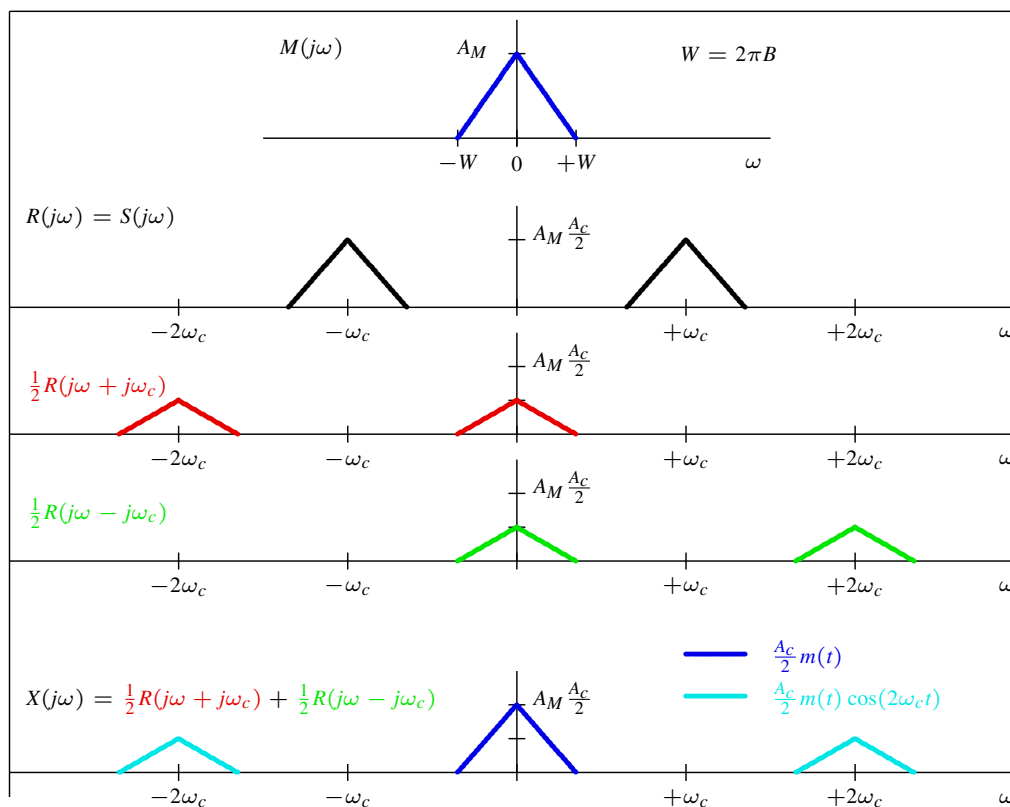
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$



$$\text{Densidad espectral de potencia: } S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$$

Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

- Por simplicidad, se asume que $\phi = \phi_c = 0$

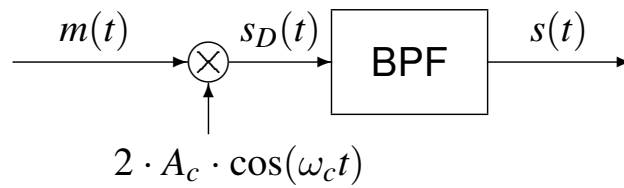


Receptor coherente - Posibles opciones

- El receptor debe identificar la fase de la portadora con que se moduló la señal $\phi = \phi_c$
- Opciones más frecuentes
 - ▶ Transmisión de un piloto (portadora de amplitud reducida)
 - ★ Ineficiencia en potencia
 - ▶ Utilización de un lazo enganchado en fase (PLL: *Phase Locked Loop*)
 - ★ Incrementa el coste del receptor

Modulación de banda lateral única (BLU)

- Eficiencia espectral: Se elimina una banda lateral $BW_{BLU} = B$ Hz.



- ▶ Por simplicidad en la notación se ha asumido $\phi_c = 0$

- Generación de la señal

- ▶ Se genera una señal de doble banda lateral (con amplitud doble)
- ▶ Se elimina una de las dos bandas laterales mediante filtrado
 - ★ BLU de banda lateral superior: se eliminan las frecuencias $|\omega| < \omega_c$
 - ★ BLU de banda lateral inferior: se eliminan las frecuencias $|\omega| > \omega_c$

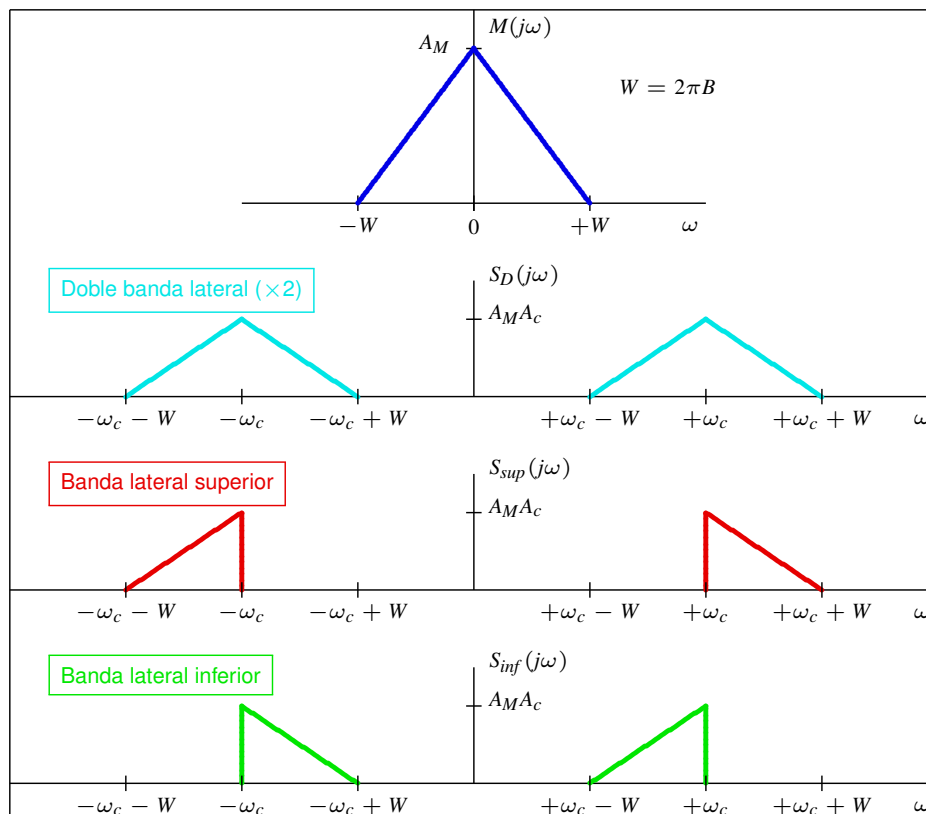
- Expresión analítica de la señal BLU resultante

$$s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

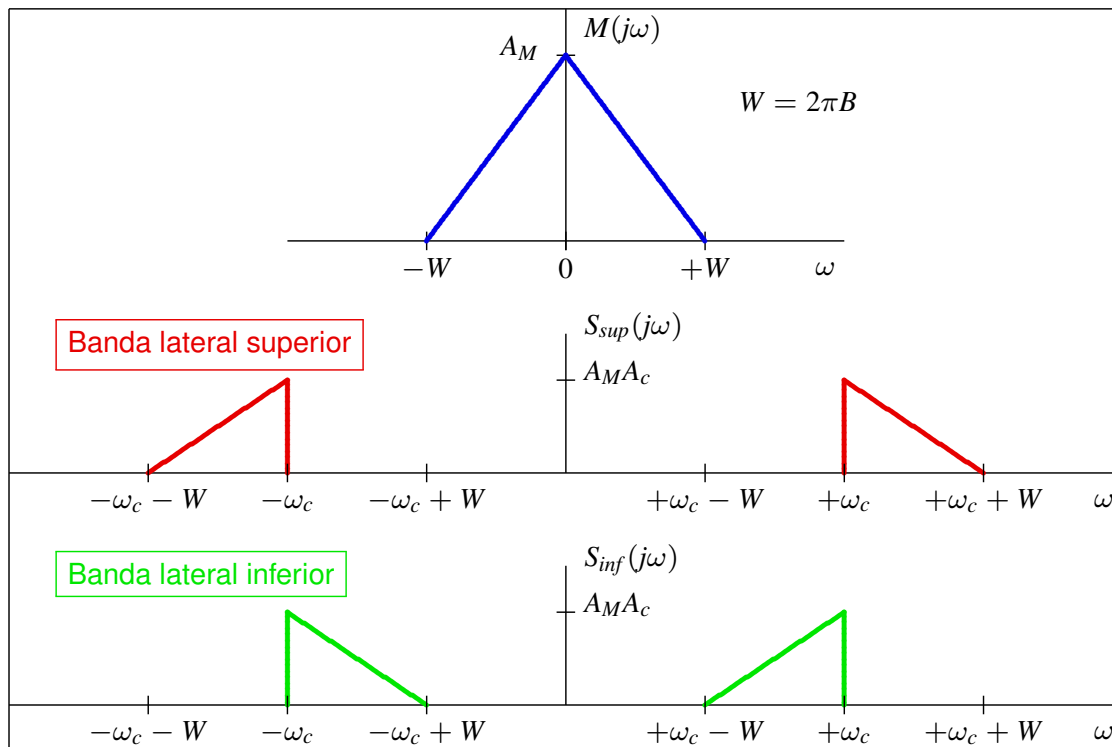
$\hat{m}(t)$: transformada de Hilbert de la señal moduladora $m(t)$

- ▶ Banda lateral superior (BLS): signo $-$
- ▶ Banda lateral inferior (BLI): signo $+$

Espectro de la señal AM de BLU



Espectro de la señal AM de BLU



Transformada de Hilbert

- Señal generada filtrando con un transformador de Hilbert

$$\hat{m}(t) = m(t) * h_{\text{Hilbert}}(t)$$

- Transformador de Hilbert:
 - ▶ Respuesta al impulso

$$h_{\text{Hilbert}}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

- ▶ Respuesta en frecuencia

$$H_{\text{Hilbert}}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ +j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral superior

- Respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral superior:

$$H_{BLS}(j\omega) = u(\omega - \omega_c) + u(-(\omega + \omega_c)) \text{ con } u(x) \text{ función escalón}$$

- Espectro de la señal DBL con amplitud doble, $s_D(t)$

$$S_D(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Espectro de la señal BLU con banda lateral superior

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_D(j\omega) \cdot H_{BLS}(j\omega) \\ &= A_c M(j\omega) \cdot u(\omega) |_{\omega=\omega-\omega_c} + A_c M(j\omega) \cdot u(-\omega) |_{\omega=\omega+\omega_c} \end{aligned}$$

- Señal BLU de banda lateral superior

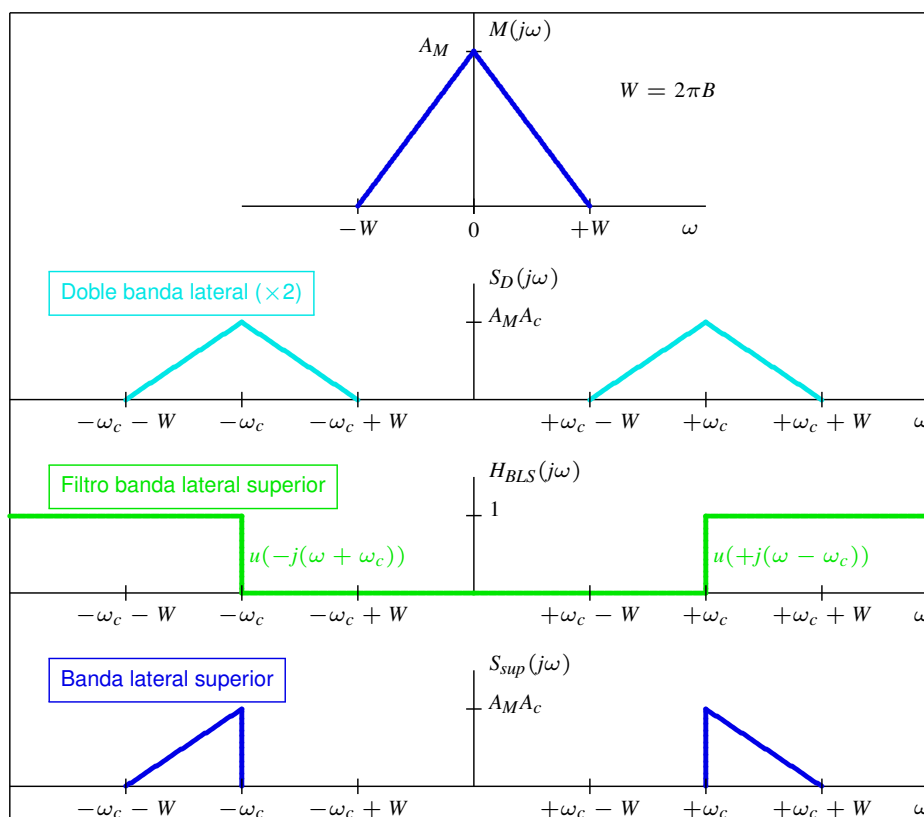
$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{j\omega_c t} + A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) + j\hat{m}(t)] \cdot e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) - j\hat{m}(t)] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \end{aligned}$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de la transformada de Fourier y las fórmulas de Euler para sinusoides

$$\mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(\omega), \quad \mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(-\omega), \quad \mathcal{TF} \{x(t) \cdot e^{j\omega_c t}\} = X(j\omega - j\omega_c)$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}, \quad \text{sen}(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} = j \frac{e^{-j\omega_c t} - e^{+j\omega_c t}}{2}$$

Generación de BLU de banda lateral superior



Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral inferior

- Señal BLU de banda lateral superior

$$s_{sup}(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$

- Relaciones de las dos señales BLU y señal $s_D(t)$

$$s_D(t) = 2 \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) = s_{sup}(t) + s_{inf}(t)$$

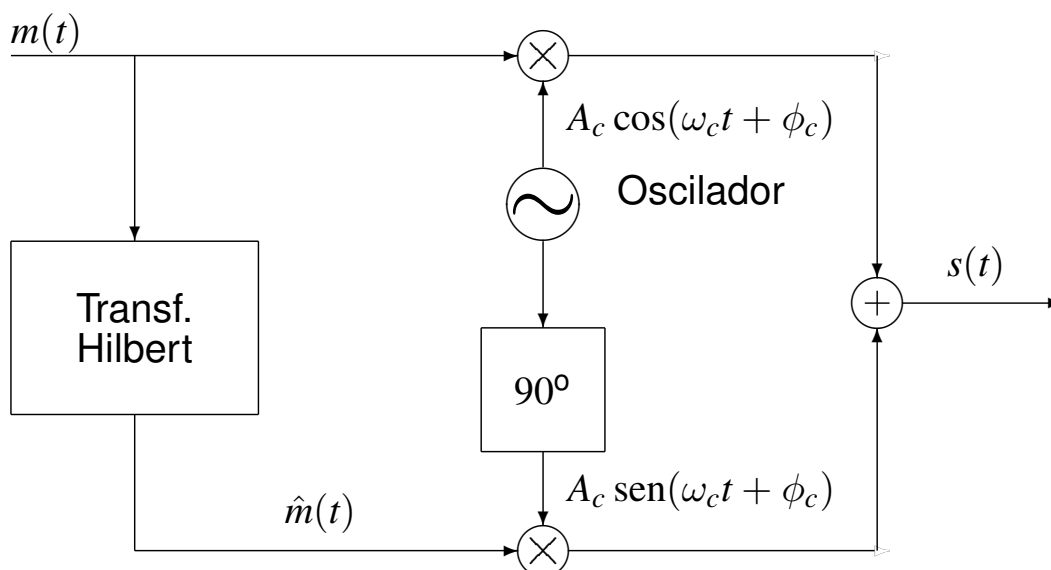
- Señal BLU de banda lateral inferior

$$\begin{aligned} s_{inf}(t) &= s_D(t) - s_{sup}(t) \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \end{aligned}$$

Generación alternativa de BLU - Modulador de Hartley

- Implementación basada en la expresión analítica a partir de la transformada de Hilbert

$$s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$



Ancho de banda y potencia de una BLU

- Densidad espectral de potencia

- ▶ Banda lateral superior

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- ▶ Banda lateral inferior

$$S_{S_{inf}}(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- Ancho de banda

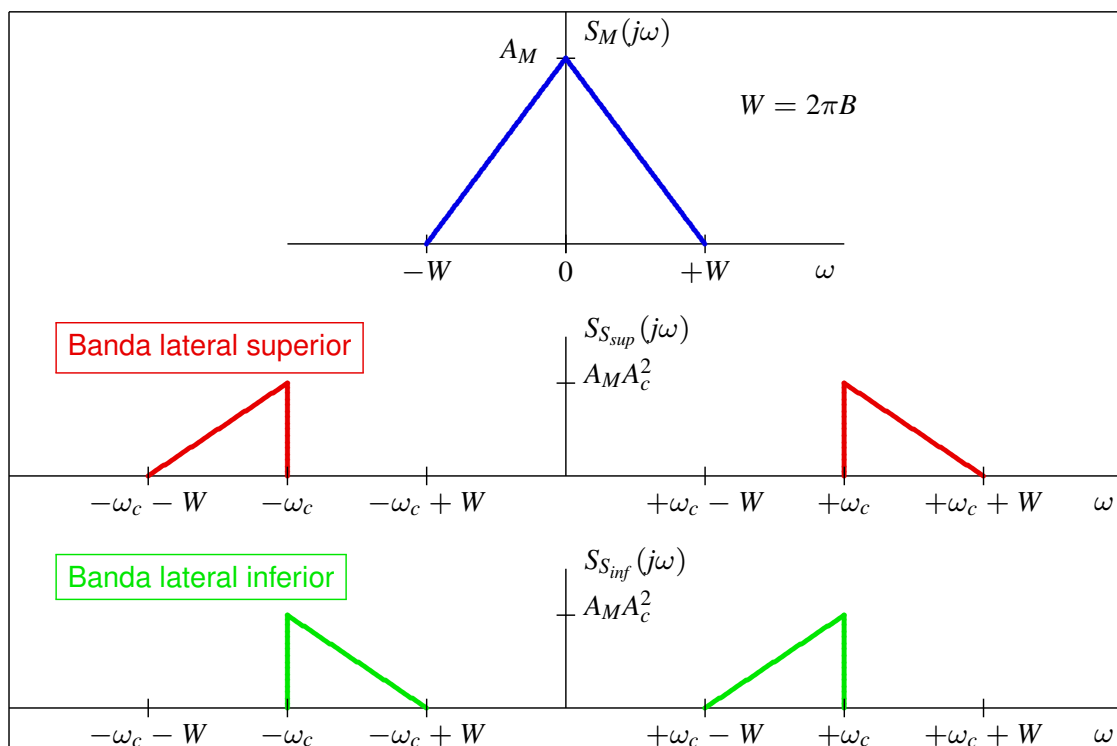
$$BW_{BLU} = B \text{ Hz}$$

Mismo ancho de banda que el de la señal moduladora transmitida

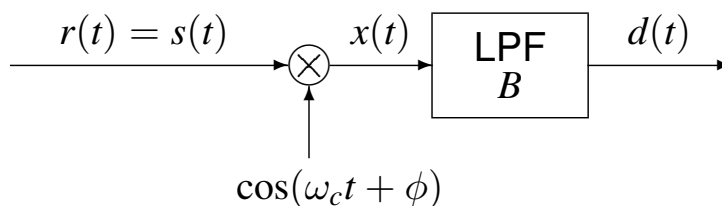
- Potencia de la señal

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega = A_c^2 \cdot P_M$$

Densidad espectral de potencia de la señal AM de BLU



Demodulación de señales BLU



- Señal recibida

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$

Recuerde: por simplicidad en la notación se supuso $\phi_c = 0$

Ahora la diferencia entre las fases de las portadoras es ϕ (ya que $\phi_c = 0$)

- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= [A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi) + \text{términos } 2\omega_c \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi)$$

Demodulación de señales BLU (II)

- Señal demodulada filtrada (con fase ϕ_c arbitraria no nula)

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_c)$$

- Efectos negativos presentes con demoduladores no coherentes

- ▶ Atenuación del término de señal recibida debido a $m(t)$

$$\frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c), \text{ término de atenuación } \boxed{\cos(\phi - \phi_c)}$$

★ Igual que para modulación de doble banda lateral

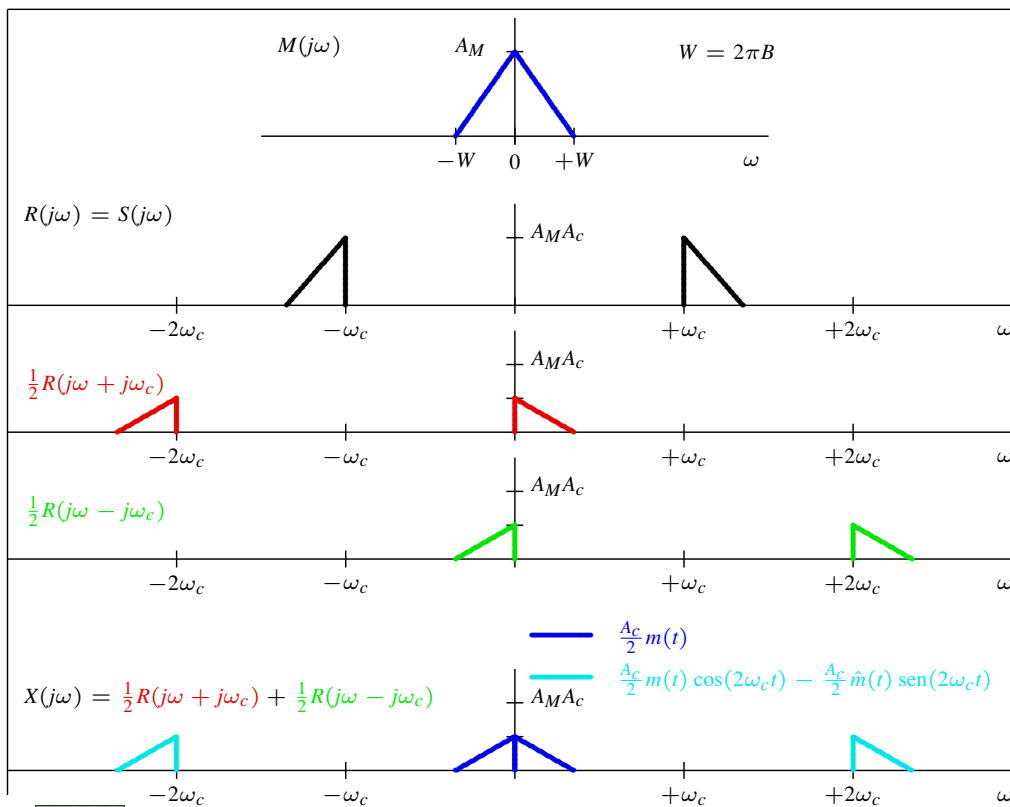
- ▶ Término adicional de distorsión

$$\pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_c), \text{ término de ganancia } \boxed{\text{sen}(\phi - \phi_c)}$$

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente

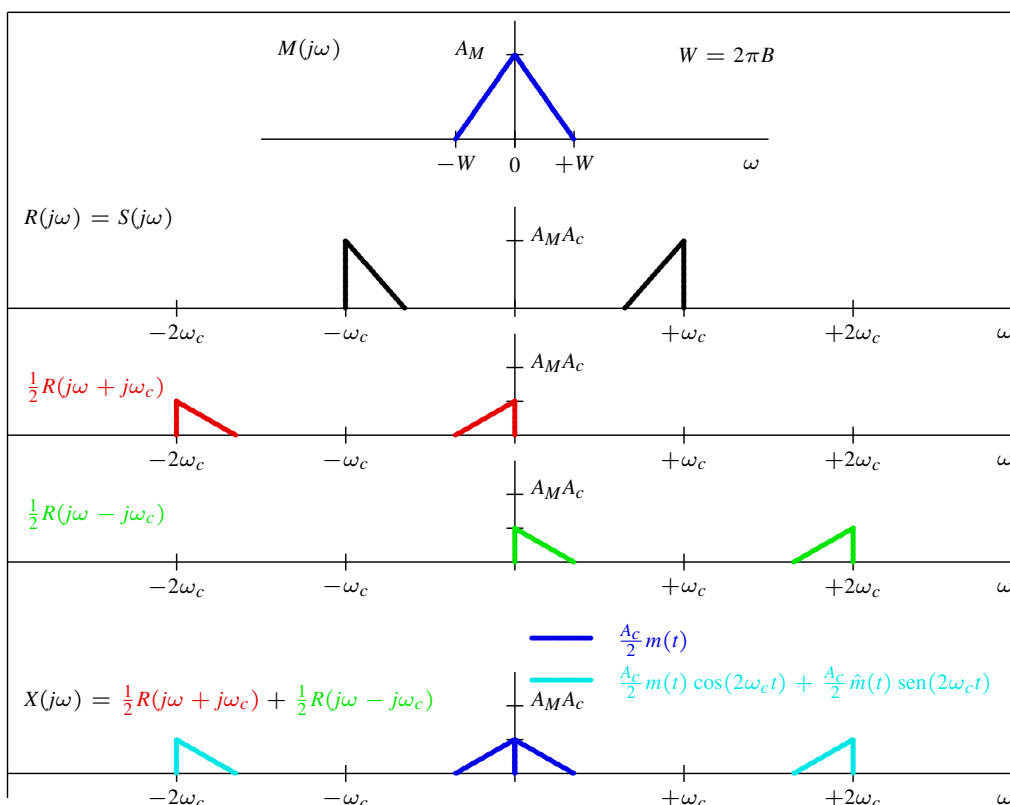
Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

● Ejemplo banda lateral superior



Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

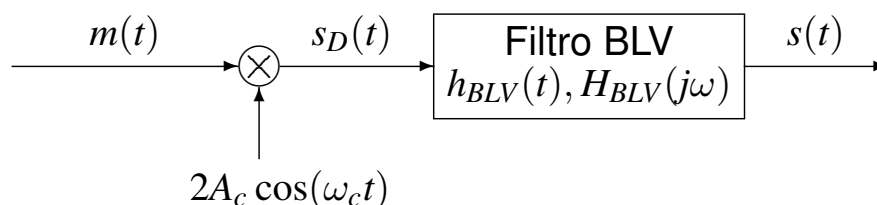
● Ejemplo banda lateral inferior



Características de la modulación de banda lateral única

- La modulación BLU supera los dos principales inconvenientes de la modulación AM convencional
 - ▶ Eficiencia espectral
 - ★ Mismo ancho de banda que el de la señal de información (moduladora) que se transmite
 - ▶ Eficiencia en potencia
 - ★ Toda la potencia de la señal está asociada a la componente que contiene la información (no se utiliza energía para transmitir una portadora)
- Inconveniente de la modulación BLU
 - ▶ Implementación mediante filtrado directo requiere filtros ideales para eliminar una de las bandas laterales
 - ★ La implementación con filtros reales puede generar distorsión en la señal transmitida
 - ▶ Implementación con modulador de Hartley requiere un transformador de Hilbert
 - ★ Respuesta ideal del transformador no realizable

Modulación de banda lateral vestigial (BLV)



- Mismo esquema de modulación que BLU
 - ▶ Se reemplaza el filtro “ideal” de BLU por un filtro realizable de banda lateral vestigial (que deberá cumplir ciertas condiciones)
- Señal modulada BLV
 - ▶ Se filtra una señal de doble banda lateral de amplitud doble $s_D(t)$ con un filtro de banda lateral vestigial

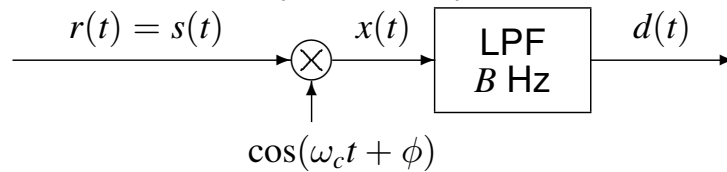
$$s(t) = \left[\underbrace{m(t) \times 2A_c \cos(\omega_c t)}_{s_D(t)} \right] * h_{BLV}(t)$$

- Señal BLV en el dominio de la frecuencia

$$S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega)$$

Características que debe tener el filtro BLV

- Se analizará la señal recibida y su dependencia con el filtro
 - ▶ Obtención de las condiciones que debe cumplir



- Señal recibida (igual a la transmitida) en el dominio frecuencial

$$R(j\omega) = S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega)$$

- Señal demodulada (sin filtrar) en el dominio frecuencial

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_c t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot [R(j\omega - j\omega_c) + R(j\omega + j\omega_c)]$$

$$X(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j2\omega_c) + M(j\omega)] \cdot H_{BLV}(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega) + M(j\omega + j2\omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(j\omega) \cdot [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

Características que debe tener el filtro BLV (II)

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(j\omega) \cdot [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

- ▶ Interpretación: la señal moduladora se filtra con el filtro equivalente

$$H_{EQ}(j\omega) = H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- Para que no se produzca distorsión, el filtro ha de tener una respuesta que en la banda de paso de la señal ($|\omega| \leq 2\pi B$) cumpla

- ▶ Módulo constante
- ▶ Fase lineal

- Por tanto, las condiciones que debe cumplir el filtro BLV son

$$|H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)| = \text{cte, en } |\omega| \leq 2\pi B$$

Simetría impar respecto a ω_c en $\omega_c - \Delta_W < \omega < \omega_c + \Delta_W$

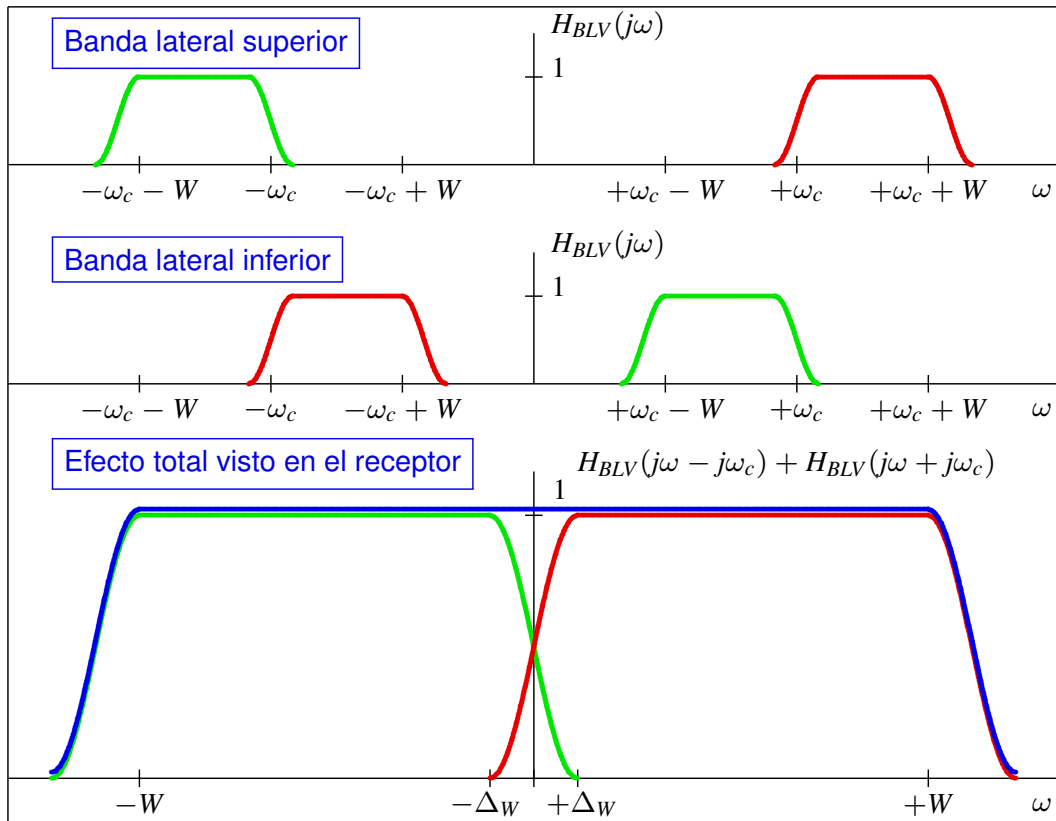
Δ_W : exceso de ancho de banda (vestigio) en radianes/s

- Ancho de banda de la señal modulada

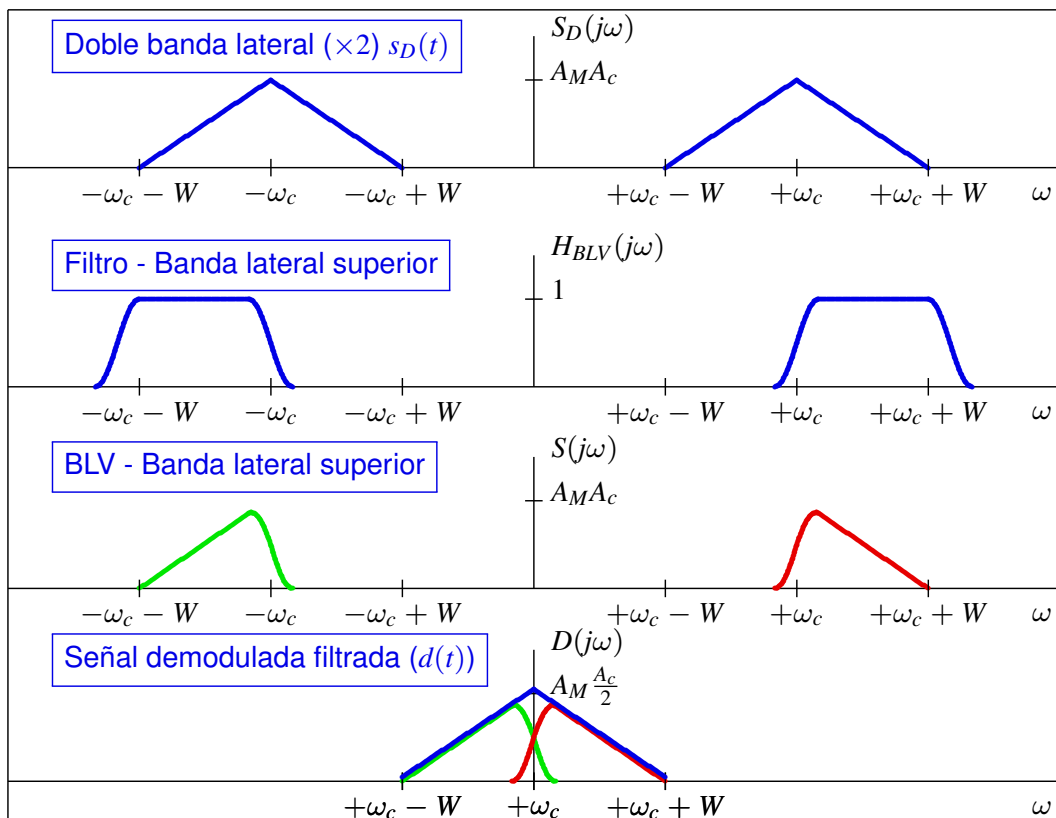
$$BW_{BLV} = B + \Delta_B \text{ Hz, con } \Delta_B = \frac{\Delta_W}{2\pi}$$

Δ_B : exceso de ancho de banda vestigial en Hz (habitualmente $\Delta_B \ll B$)

Filtro de banda lateral vestigial



Modulación y demodulación - Interpretación frecuencial



Modulaciones de amplitud - Resumen características

Modulación	BW (Hz)	P_S	$P_S(m(t))$	$d(t)$	$P_d(m(t))$
AM convencional	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	B	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$B + \Delta_B$	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

BW (Hz): ancho de banda de la señal modulada en Hz

P_S : potencia de la señal modulada

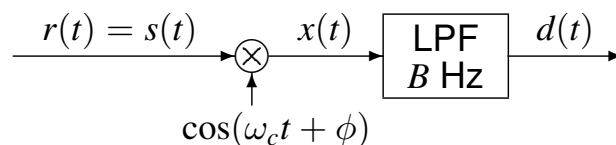
$P_S(m(t))$: potencia de la señal modulada relativa al término relacionado con $m(t)$

$d(t)$: señal recuperada con un receptor síncrono o coherente

$P_d(m(t))$: potencia de la señal demodulada relativa al término relacionado con $m(t)$

- Eficiencia en potencia
 - ▶ Toda la potencia de la señal está relacionada con $m(t)$
 - ★ DBL, BLU y BLV
- Eficiencia espectral
 - ▶ Mínimo ancho de banda para la transmisión (mismo ancho de banda que la señal moduladora, B Hz)
 - ★ BLU y BLV (en este caso con un incremento vestigial Δ_B)

Demodulación síncrona de modulación AM convencional



- Señal recibida

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi) + \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi) \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi)$$

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)]$$

MODULACIONES ANGULARES

PM Y FM

Modulaciones angulares

- La información está en el argumento de una senoide
- Se imprime en la frecuencia o fase de la portadora

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- ▶ Modulación de fase (PM)

PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

- Representación común de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t))$$

La información transmitida está en $\theta(t)$, i.e., $\theta(t) = f(m(t))$

Modulaciones PM y FM

- Representación común de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t)), \text{ donde } \theta(t) = \omega_c t + \phi(t)$$

- Definición de frecuencia instantánea de una senoide

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\theta(t)$$

- Señal modulada $s(t)$ y frecuencia instantánea

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\underbrace{(2\pi f_c)}_{\omega_c} t + \phi(t)), \quad f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t)$$

- Si $m(t)$ es la señal moduladora (mensaje)

- ▶ Modulación de fase (PM)

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t)$$

k_p : constante de desviación de fase

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

$$\Delta f_i(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f \cdot m(t)$$

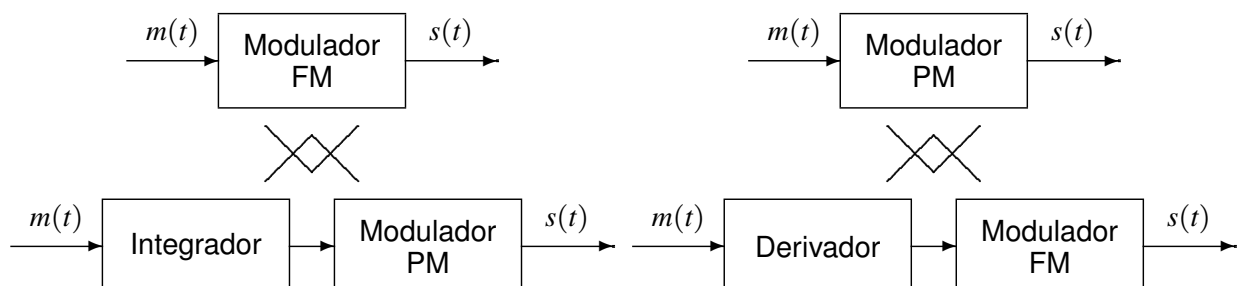
k_f : constante de desviación de frecuencia

Relación FM / PM

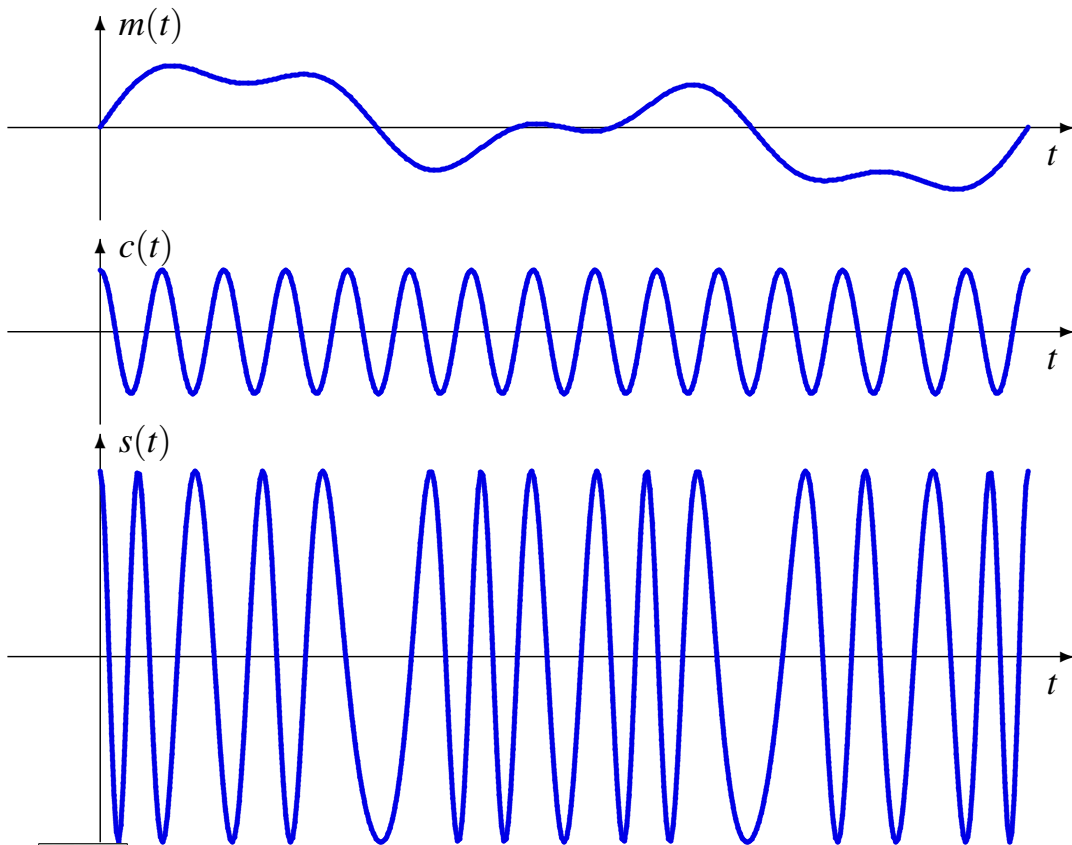
- Modulación de fase: $\phi(t) = k_p \cdot m(t)$
- Modulación de frecuencia: $\Delta f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f \cdot m(t)$
- Expresiones de $\phi(t)$ y $\frac{d}{dt}\phi(t)$ en PM y FM

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$

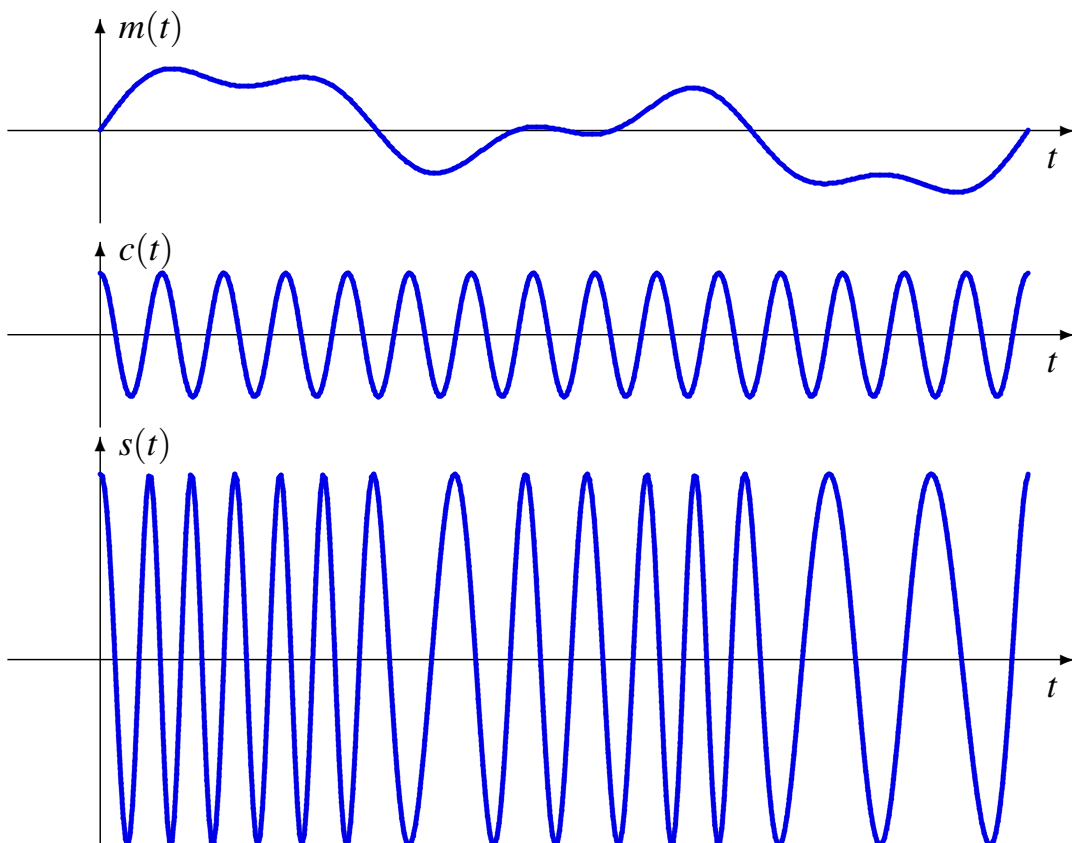
$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot \frac{d}{dt}m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot m(t), & \text{FM} \end{cases}$$



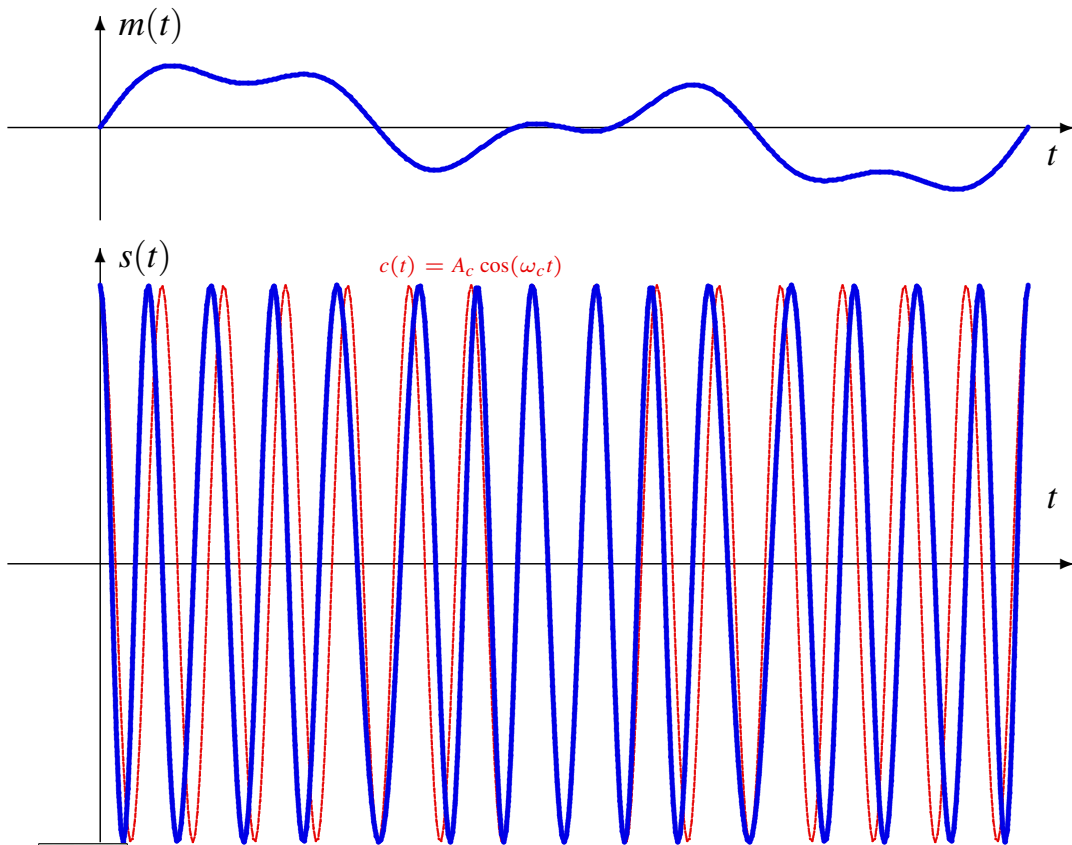
Forma de onda de una modulación PM



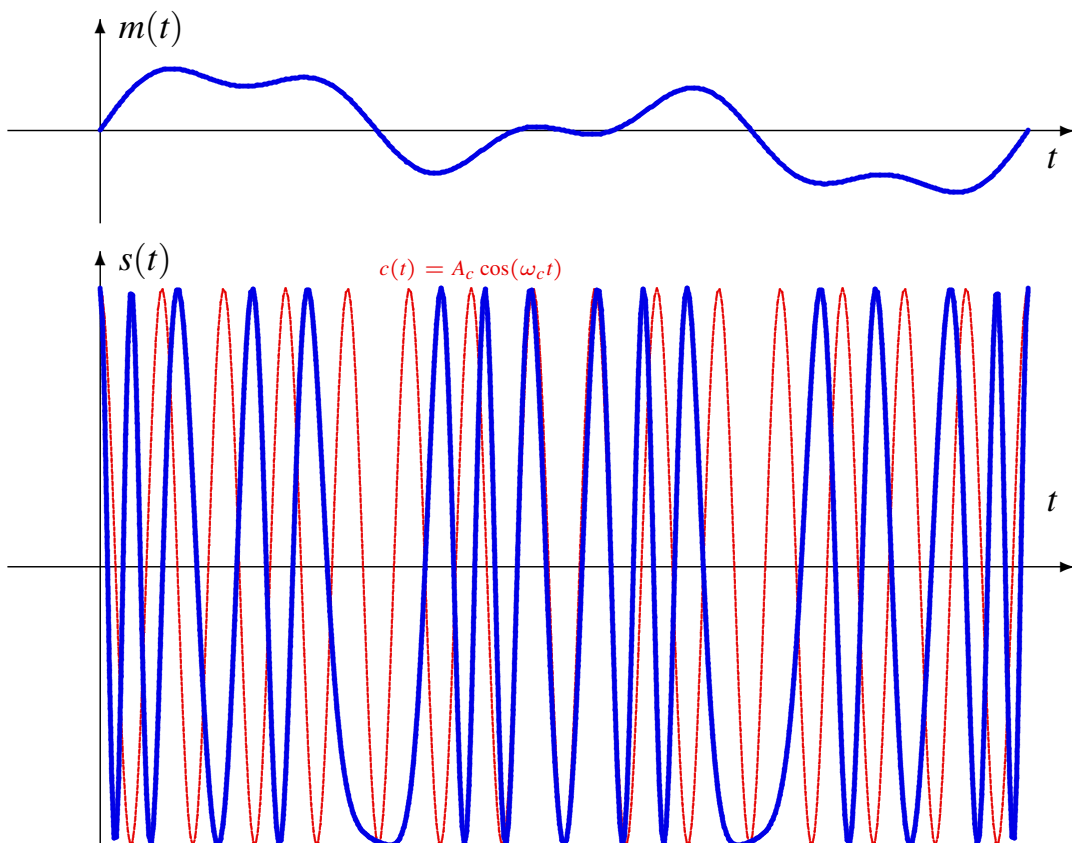
Forma de onda de una modulación FM



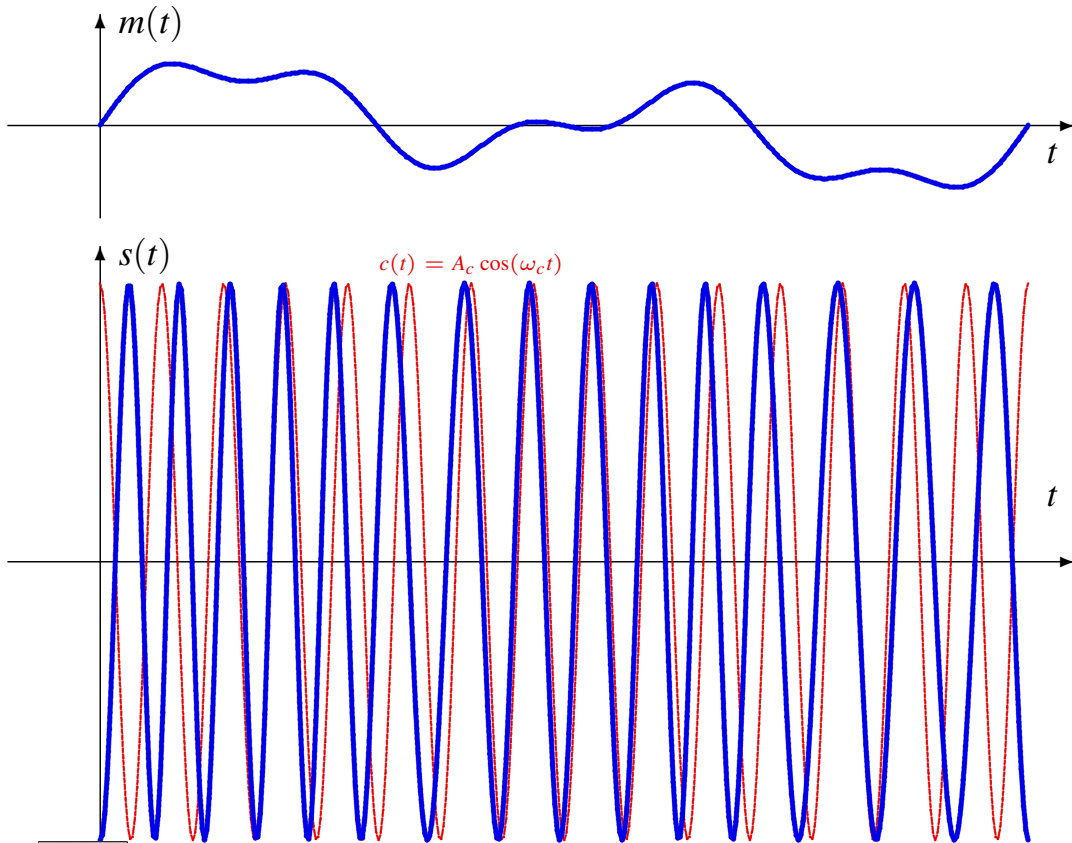
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$



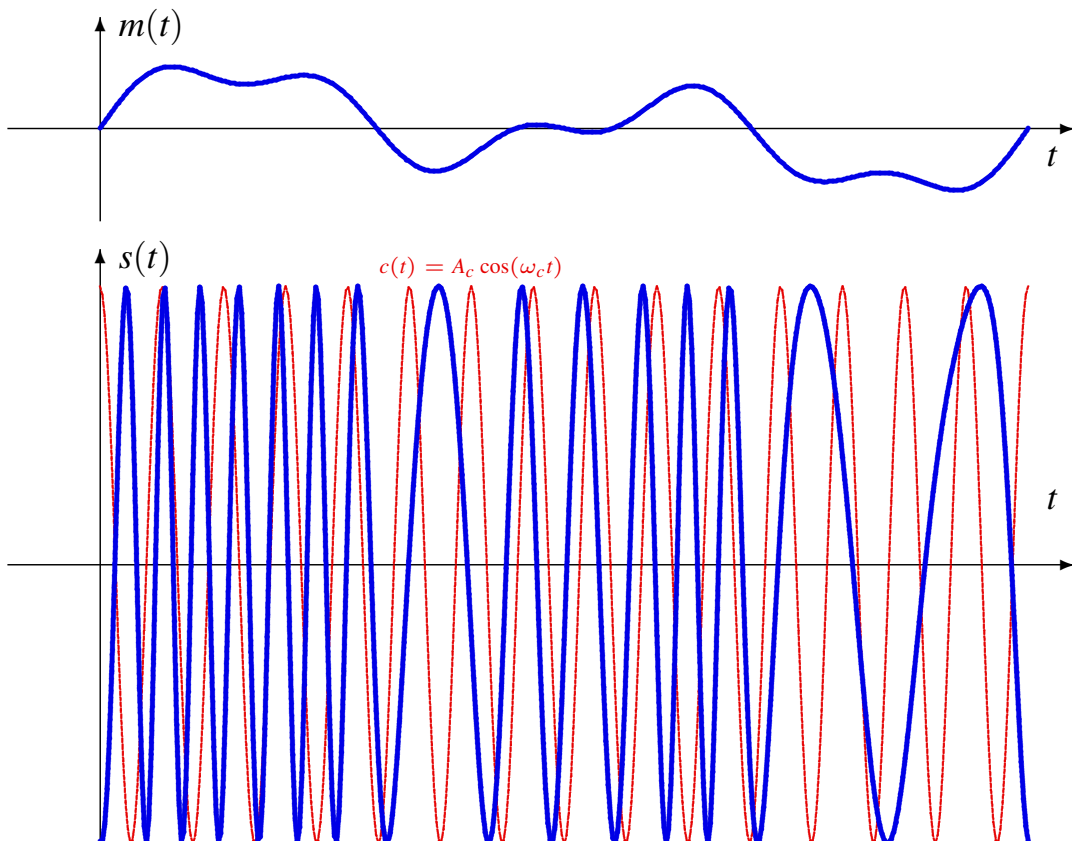
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{1}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Índices de modulación

- PM: máxima desviación en fase

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|)$$

- FM: máxima desviación de frecuencia

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B}$$

- ▶ B : ancho de banda en Hz de la señal moduladora $m(t)$

Análisis espectral de modulaciones angulares

- Cálculo (exacto o aproximado) de la representación espectral
 - ▶ Modulaciones angulares de banda estrecha
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora sinusoidal
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora periódica
- Regla heurística para el cálculo del ancho de banda
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora genérica
 - ★ Regla de Carson: aproximación del ancho de banda

Modulación angular de banda estrecha

- Modulación angular de banda estrecha: $\phi(t) \ll 1$
 - ▶ Constantes k_p o k_f pequeñas
- Expresión genérica de la señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

- ▶ Relación trigonométrica: $\cos(A \pm B) = \cos(A) \cdot \cos(B) \mp \sin(A) \cdot \sin(B)$
- ▶ Aproximaciones consideradas (para $\phi(t)$ pequeño)

$$\cos(\phi(t)) \approx 1, \quad \sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$$

- Expresión alternativa para la señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos \phi(t) - A_c \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \sin \phi(t)$$

$$\approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$\text{AM Convencional: } s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot m_a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$\text{Recuerde que } \phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Modulación angular de banda estrecha - Análisis

- Expresión aproximada para la señal modulada

$$s(t) \approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot m_a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

- Espectro de la señal modulada (considerando la aproximación)

- ▶ Dos deltas, situadas en $\pm\omega_c$ (espectro portadora)
- ▶ Réplicas del espectro de $\phi(t)$ situadas en $\omega = \pm\omega_c$
- ▶ Forma del espectro de $\phi(t)$

- ★ PM: proporcional al espectro de $m(t)$

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) \leftrightarrow \Phi(j\omega) = k_p \cdot M(j\omega)$$

- ★ FM: proporcional al espectro de la integral de $m(t)$

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \leftrightarrow \Phi(j\omega) = 2\pi k_f \cdot \frac{M(j\omega)}{j\omega}$$

- Ancho de banda (similar AM convencional)

$$BW_{BE} \approx 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Modulación mediante una señal sinusoidal

- Señal moduladora sinusoidal de amplitud a y frecuencia ω_m rad/s

$$m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M = k_p \cdot a$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B} = k_f \cdot a \cdot \frac{2\pi}{\omega_m}$$

- Expresiones del término de fase $\phi(t)$

- ▶ Expresiones de $\phi(t)$ para PM

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) = k_p \cdot a \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_p \sin(\omega_m t)$$

- ▶ Expresiones de $\phi(t)$ para FM

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = 2\pi \cdot k_f \cdot a \cdot \frac{1}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_f \sin(\omega_m t)$$

- Señal modulada: expresión común para PM y FM

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t))$$

Modulación mediante una señal sinusoidal (II)

- Señal moduladora sinusoidal $m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$

- Señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t)) = \mathcal{R}e \left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} \right)$$

La función $e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)}$ es periódica de frecuencia $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ Hz
Desarrollo en serie de Fourier

$$e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t}$$

Coefficiente de índice n del desarrollo en serie: $J_n(\beta)$

$J_n(\beta)$: función de Bessel de primera especie de orden n y argumento β

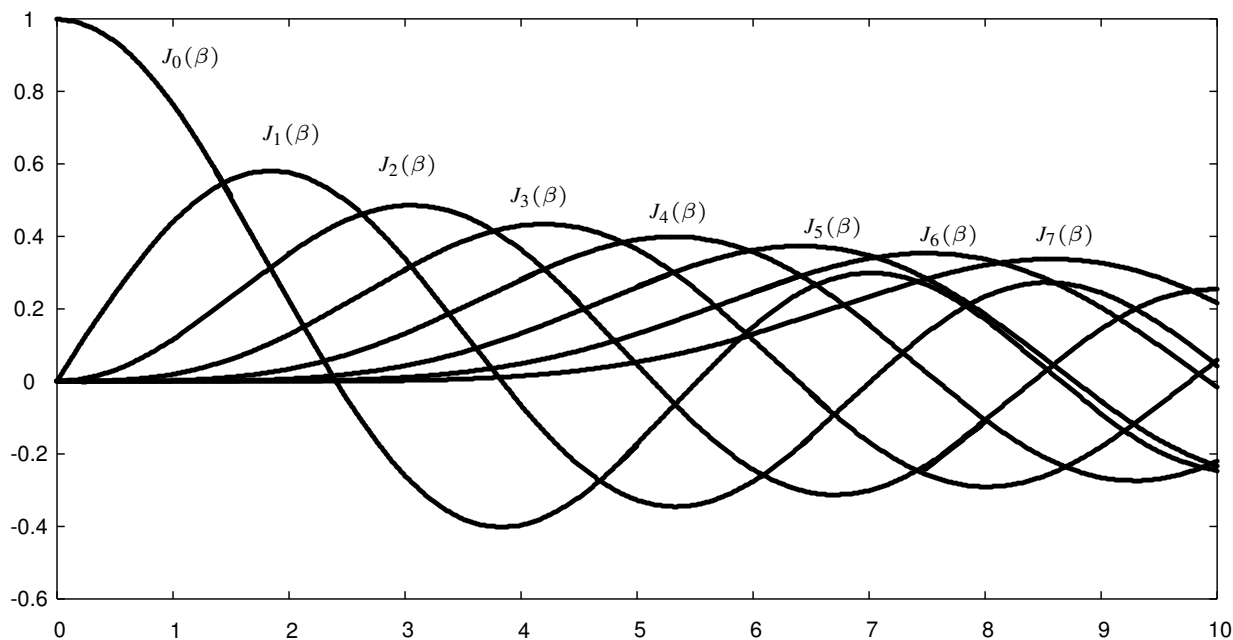
- Expresión alternativa de la señal modulada

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{R}e \left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t} \right) = \mathcal{R}e \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \underbrace{e^{j\omega_c t} \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t}}_{e^{j(\omega_c + n \cdot \omega_m)t}} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \cos((\omega_c + n \cdot \omega_m) \cdot t) \end{aligned}$$

Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}, \text{ Para } \beta \downarrow J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}, J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \text{ par} \\ -J_n(\beta), & n \text{ impar} \end{cases}$$

Se encuentra habitualmente en tablas o en figuras



Modulación mediante una señal sinusoidal - Análisis

- La señal modulada contiene sinusoides con las frecuencias

$$\text{Frecuencias (Hz)} : f_c + n \cdot f_m, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Pulsación (rad/s)} : \omega_c + n \cdot \omega_m, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Amplitud de la senoide de pulsación $\omega_c + n \cdot \omega_m$

$$A_c \cdot J_n(\beta)$$

- Ancho de banda efectivo (contiene 98% de la potencia):

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m \text{ Hz}$$

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right)f_m, & \text{FM} \end{cases} = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2(k_f a + f_m), & \text{FM} \end{cases}$$

- Número total de armónicos en el ancho de banda efectivo B_e

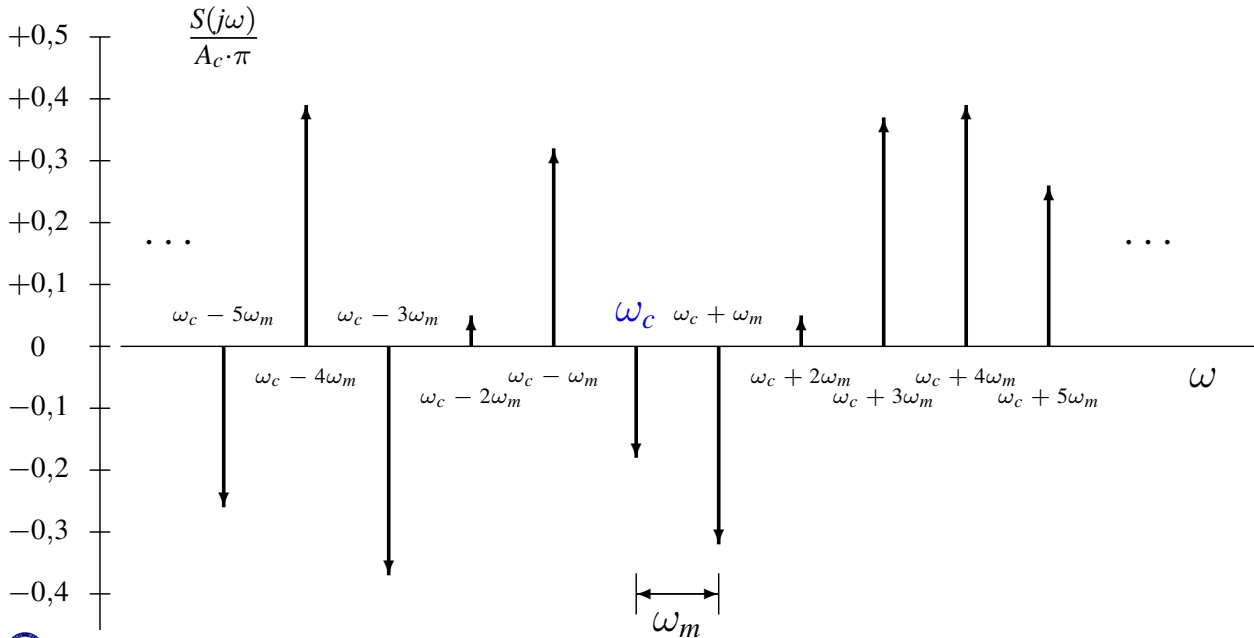
$$M_e = 2[\beta] + 3 = \begin{cases} 2[k_p a] + 3, & \text{PM} \\ 2\left[\frac{k_f a}{f_m}\right] + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

Forma del espectro - Ejemplo - Modulación con $\beta = 5$

- Suma de sinusoides de amplitud $A_c \cdot J_n(\beta)$ y pulsaciones $\omega_c + n \cdot \omega_m$

$$J_0(5) = -0,18, J_1(5) = -0,32, J_2(5) = 0,05$$

$$J_3(5) = 0,37, J_4(5) = 0,39, J_5(5) = 0,26, \dots$$



Otros tipos de moduladoras

- Modulación mediante una señal periódica
 - ▶ Admite un desarrollo en serie de Fourier
 - ★ Suma de sinusoides de frecuencias múltiplo de la que define el período
 - Frecuencias en el espectro de la señal

$$f_c \pm n \cdot f_m \quad \text{ó} \quad (\omega_c \pm n \cdot \omega_m)$$

- Amplitudes de cada frecuencia: suma de las contribuciones de cada armónico

- Modulación mediante una señal determinista no periódica
 - ▶ Análisis complicado debido a la no linealidad
 - ▶ Se aplica la Regla de Carson (regla heurística)

Para señales moduladoras con ancho de banda B Hz

$$BW_{Carson} \approx 2 \cdot (\beta + 1) \cdot B \text{ Hz}$$

Ancho de banda dependiente del índice de modulación β

EFFECTO DEL RUIDO

EN

MODULACIONES ANALÓGICAS

Efecto del ruido en modulaciones de amplitud

● Premisas

- ▶ Señal moduladora $m(t)$ de ancho de banda B Hz
- ▶ Señal recibida
 - ★ Transmisión sobre canal gaussiano
 - Transmisión ideal sin atenuación, sin distorsión, sólo con ruido térmico

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- ★ Potencia del término de señal: P_S (potencia transmitida)
 - ▶ Ruido térmico: modelo estadístico habitual
 - ★ Proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$
 - ▶ Receptor coherente
 - ★ Se introducirán filtros para limitar el efecto del ruido
 - ★ Los filtros se considerarán como ideales (prestaciones límite)
- Se analiza la relación señal a ruido de la señal demodulada para los distintos tipos de modulación y se comparará con la relación señal a ruido de la señal en una transmisión en banda base $\left(\frac{S}{N}\right)_b$

Referencia - Transmisión en banda base

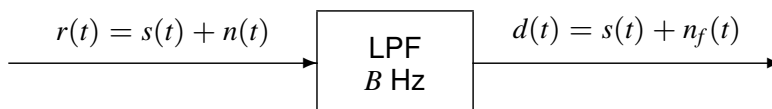
- Se transmite la señal sin modular

$$s(t) = m(t) \rightarrow P_S = P_M$$

- Señal en el receptor

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- Filtrado en el receptor para minimizar el efecto del ruido
 - ▶ Filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz



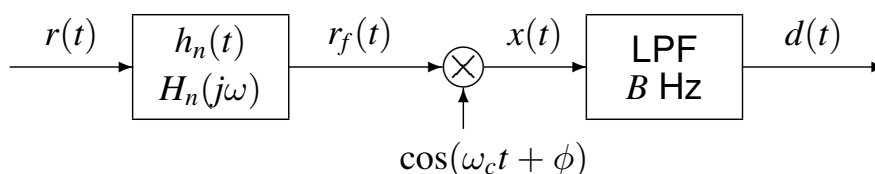
- ▶ Potencia del ruido a la salida del filtro

$$P_{n_f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_f}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 \cdot B$$

- Relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 \cdot B}$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Notación



- Receptor coherente: $\phi = \phi_c$ (por simplicidad, $\phi_c = 0$)
- Filtro de ruido $h_n(t) / H_n(j\omega)$
 - ▶ Filtro paso banda ideal
 - ★ Banda de paso / ancho de banda: igual que señal modulada $s(t)$

- Señal recibida

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- Señal filtrada

$$r_f(t) = s(t) + n_f(t), \text{ con } n_f(t) = n(t) * h_n(t)$$

- Señal demodulada

$$x(t) = r_f(t) \times \cos(\omega_c t) = s(t) \cdot \cos(\omega_c t) + n_f(t) \cdot \cos(\omega_c t) = x_S(t) + x_n(t)$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = x(t) * h_{LPF-B}(t) = x_S(t) * h_{LPF-B}(t) + x_n(t) * h_{LPF-B}(t) = d_S(t) + d_n(t)$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Análisis

- Salida del receptor: Término de señal $d_S(t)$
 - ▶ No se ve afectado por el filtro de ruido
 - ▶ Para modulaciones de amplitud se calculó en su momento

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

P_{d_S} : potencia en $d_S(t)$ relativa a $m(t)$ - P_{M_a} : potencia de $m_a(t)$, $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} P_M$

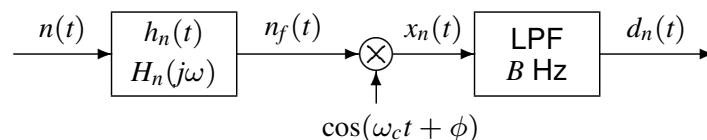
- Salida del receptor: Término de ruido $d_n(t)$
 - ▶ Depende del filtro de ruido empleado
 - ★ Depende del tipo de modulación
 - ★ Potencia: P_{d_n}
- Relación señal a ruido tras la demodulación

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}}$$

- ▶ Se comparará con la relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 \cdot B}$$

Potencia del ruido tras la demodulación - General



- Densidad espectral de potencia del ruido filtrado $n_f(t)$

$$S_{n_f}(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |H_n(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_n(j\omega)|^2$$

- Densidad espectral de potencia del ruido demodulado $x_n(t)$

$$S_{x_n}(j\omega) = \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega + j\omega_c) = \frac{N_0}{8} \left[|H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 + |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 \right]$$

- Densidad espectral de potencia tras el filtrado paso bajo $d_n(t)$

$$S_{d_n}(j\omega) = S_{x_n}(j\omega) \cdot |H_{LPF-B}(j\omega)|^2 = \begin{cases} S_{x_n}(j\omega), & \text{si } |\omega| \leq W = 2\pi B \\ 0, & \text{si } |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$

- Potencia tras el filtrado paso bajo

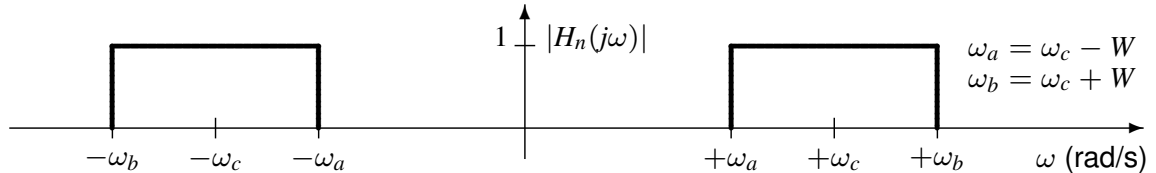
$$\begin{aligned} P_{d_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{d_n}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_{x_n}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0}{8} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 d\omega \right] \end{aligned}$$

Cálculo de la potencia de ruido - AM convencional y DBL

- Para ambas modulaciones el filtro de ruido es idéntico

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

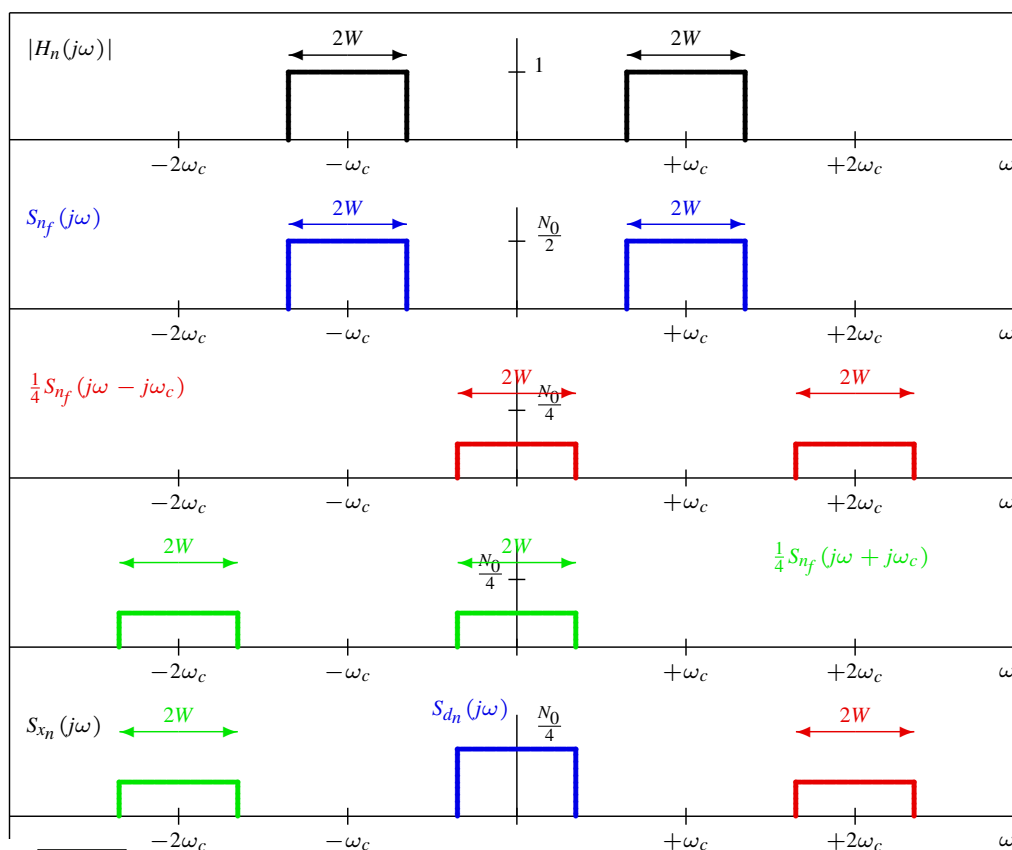


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 4B$$

$$P_{dn} = \frac{1}{2} N_0 B$$

Ruido en DBL y AM convencional - Interpretación frecuencial

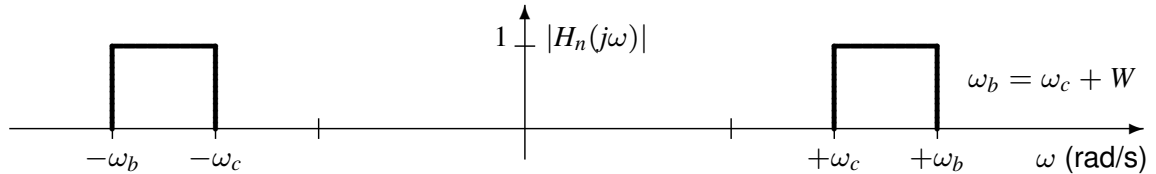


Cálculo de la potencia de ruido - BLU

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

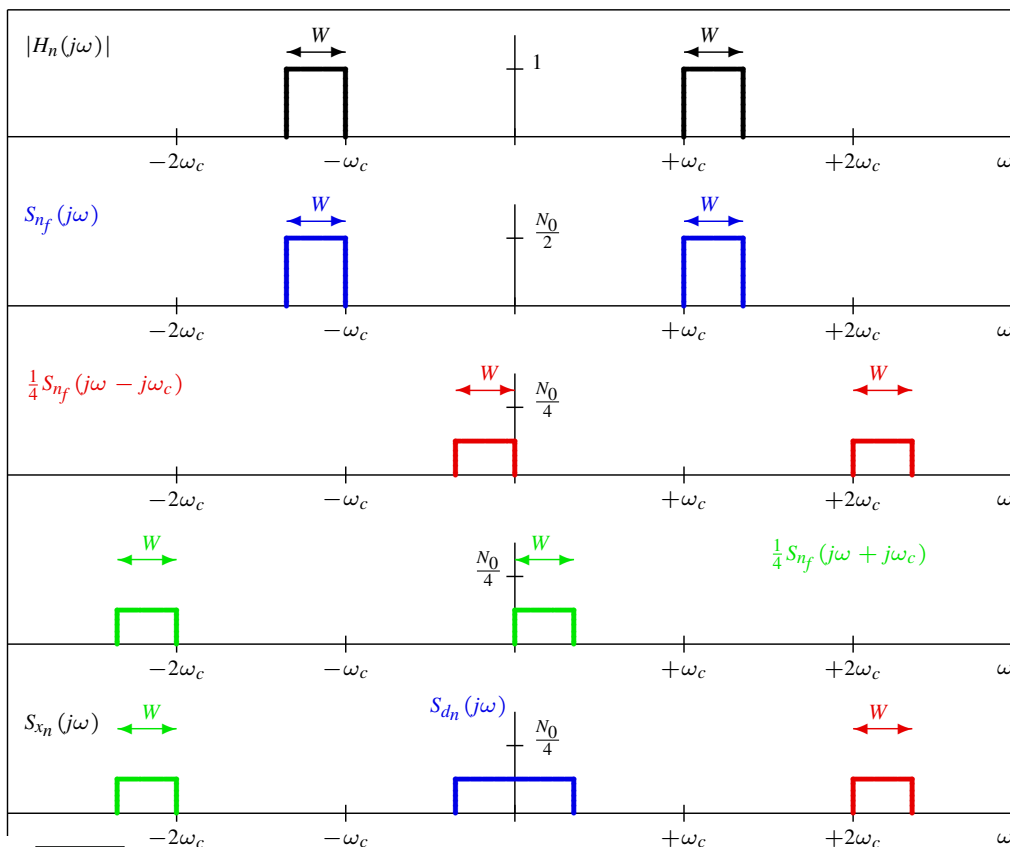


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2B$$

$$P_{dn} = \frac{1}{4} N_0 B$$

Ruido en BLU - Interpretación frecuencial (BLS)



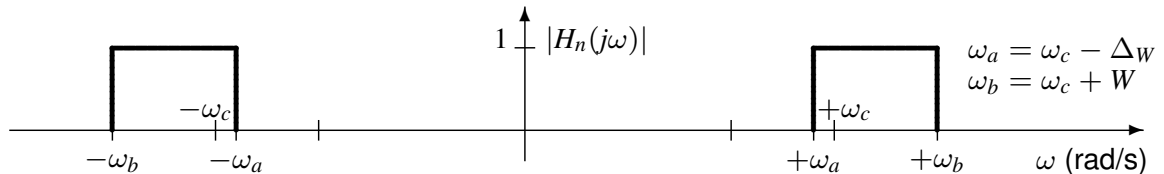
Cálculo de la potencia de ruido - BLV

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - \Delta_W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

Δ_W : exceso de ancho de banda vestigial en rad/s ($\Delta_W = 2\pi\Delta_B$)

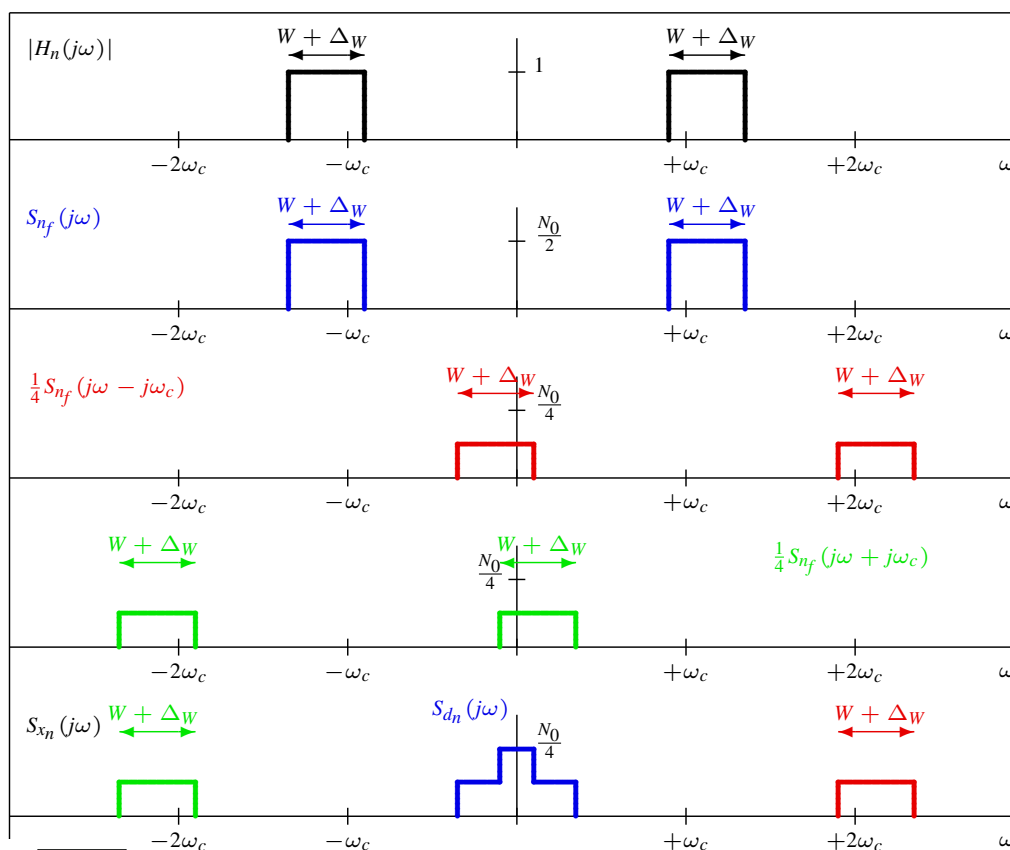


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2(B + \Delta_B)$$

$$P_{d_n} = \frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$$

Ruido en BLV - Interpretación frecuencial (BLS)



Cálculo de relaciones señal a ruido - DBL y BLU

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

- Relación señal a ruido para DBL

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBL} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- Relación señal a ruido para BLU

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLU} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 B} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

Cálculo de relaciones señal a ruido - AM convencional

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

- Relación señal a ruido para AM convencional

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{AM} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}}{N_0 B} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} \frac{\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}}}_{\eta_{AM}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{AM} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

Peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- ▶ Factor de eficiencia $\eta_{AM} < 1$

$$\eta_{AM} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} = \frac{\frac{a^2}{C_M^2} P_M}{1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M} = \frac{P_M}{\frac{C_M^2}{a^2} + P_M}$$

Depende del índice de modulación: peor eficiencia para valores bajos de a

Cálculo de relaciones señal a ruido - BLV

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

● Relación señal a ruido para BLV

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{BLV} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{B}{B + \Delta_B} \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{B}{B + \Delta_B}}_{\eta_{BLV}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{BLV} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

Peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- ▶ Factor de eficiencia $\eta_{BLV} < 1$

$$\eta_{BLV} = \frac{B}{B + \Delta_B}$$

Depende del exceso de ancho de banda Δ_B vestigial: habitualmente $\Delta_B \ll B$ y en ese caso $\eta_{BLV} \approx 1$, i.e., la relación señal a ruido es prácticamente igual que en banda base

Ruido en modulaciones angulares

- Análisis mucho más complejo (dependencia no lineal)
- Salida del demodulador (con ruido)

$$d(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f \cdot m(t) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}$$

$Y_n(t)$: término de ruido a la salida del demodulador

- Relación señal a ruido (potencia recibida $P_R = P_S = \frac{A_c^2}{2}$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2}{2} \frac{P_M}{N_0 B} = P_M \left(\frac{\beta_p}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ \frac{3k_f^2 A_c^2}{2B^2} \frac{P_M}{N_0 B} = 3P_M \left(\frac{\beta_f}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$

Ganancia en relación señal a ruido proporcional al índice de modulación al cuadrado

- Expresión general

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \alpha \left(\frac{P_M}{C_M^2}\right) \times \beta^2 \times \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

- ▶ El factor α depende de la modulación: $\alpha_{PM} = 1$, $\alpha_{FM} = 3$
- ▶ El término $\left(\frac{P_M}{C_M^2}\right)$ suele ser constante (depende del tipo de señales)

Ruido en modulaciones angulares - Efecto umbral

- La ganancia en $\left(\frac{S}{N}\right)_d$ sólo se obtiene a partir de una relación señal a ruido umbral a la entrada del receptor

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{umbral} = 20 \cdot (\beta + 1)$$

- Esto implica en la práctica que hay un nivel umbral de potencia recibida que hay que alcanzar

$$P_{R_{umbral}} = (N_0 B) \times \left(\frac{S}{N}\right)_{umbral} \rightarrow A_{c,umbral} = \sqrt{2P_{R_{umbral}}}$$