



Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 4

MODULACIONES Y DETECCIÓN EN CANALES GAUSIANOS

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



1 / 167

Índice de contenidos

- Introducción a los sistemas de comunicaciones digitales
- Representación geométrica de las señales
- Modelo de comunicación digital
- Diseño de cada elemento del sistema de comunicaciones
 - ▶ Demodulador
 - ▶ Decisor
 - ▶ Codificador
 - ▶ Modulador

Definición de un sistema de comunicaciones

- Finalidad de un sistema de comunicaciones: *transmisión*
- Transmisión: *Proceso de enviar, transportar, información de un punto (fuente) hasta otro punto (destino) a través de un canal o medio de transmisión*



- ▶ Transmisión de información a través del medio de transmisión (canal): señales electromagnéticas
 - ★ Conversión de la información en señales adecuadas para su transmisión por el canal
 - ★ Conversión información / señal eléctrica: Transductor
 - Ejemplo: salida de un micrófono (señal de voz)



RESERVOIR DOGS (Mr. White): *If you get a customer, or an employee, who thinks he's Charles Bronson, take the butt of your gun and smash their nose in. Everybody jumps. He falls down screaming, blood squirts out of his nose, nobody says fucking shit after that.*

Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales

- Sistema de comunicaciones analógico
 - ▶ Diseñado para enviar como información una forma de onda continua
- Sistema de comunicaciones digital
 - ▶ Diseñado para enviar como información una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito (M posibles valores para cada símbolo)
 - ★ Ejemplo más común: Bits ($M = 2$): $\{0, 1\}$
 - Información: 0110001101110011010101110010011010...
 - ▶ Transmisión a una velocidad (tasa de símbolo) dada: R_s símbolos/s
 - ★ Se transmite un símbolo cada $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
 - ▶ Los símbolos han de convertirse en señales eléctricas para su transmisión
 - ★ Cada símbolo se asocia a una forma de onda
 - ★ Caso más simple: formas de onda de $T = \frac{1}{R_s}$ segundos



Ventajas de los Sistemas Digitales

- Capacidad de **regeneración**
- Existen técnicas de detección y corrección de errores
- La información se puede encriptar (proteger)
- Permite corregir la distorsión introducida por el canal (igualación)
- Formato independiente del tipo de información (voz, datos, TV, etc.)
- Permite utilizar TDM/TDMA y CDM/CDMA (además de FDM/FDMA) como mecanismo de multiplexación/acceso al medio
- Los circuitos son, en general
 - ▶ Más fiables
 - ▶ De menor coste
 - ▶ Más flexibles (programables)

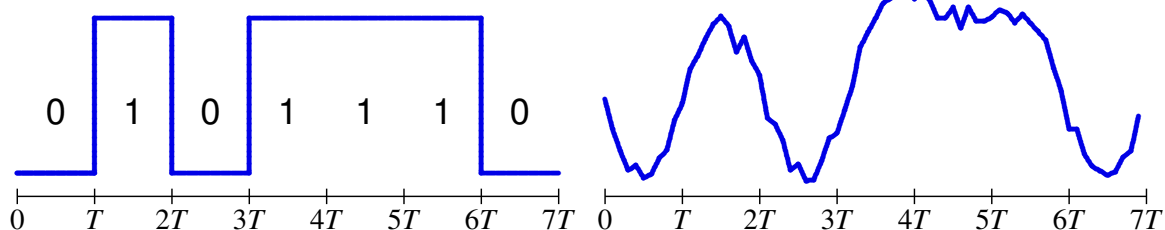
Regeneración digital

CODIFICACIÓN DE BITS - Sistema binario con pulsos rectangulares

1 \equiv Nivel alto

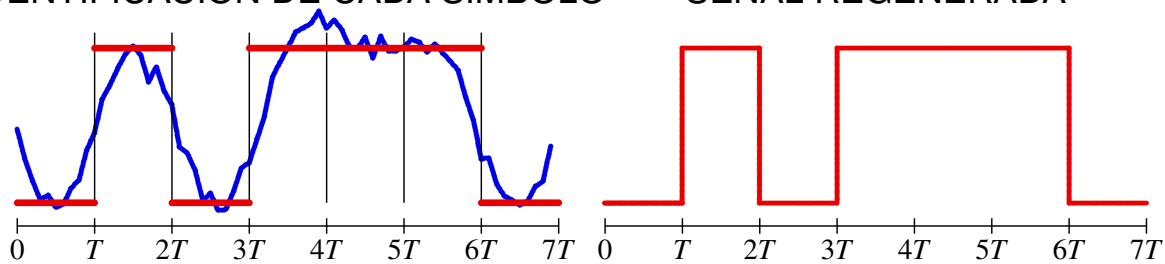
0 \equiv Nivel bajo

SEÑAL DIGITAL TRANSMITIDA SEÑAL RECIBIDA DISTORSIONADA



IDENTIFICACIÓN DE CADA SÍMBOLO

SEÑAL REGENERADA

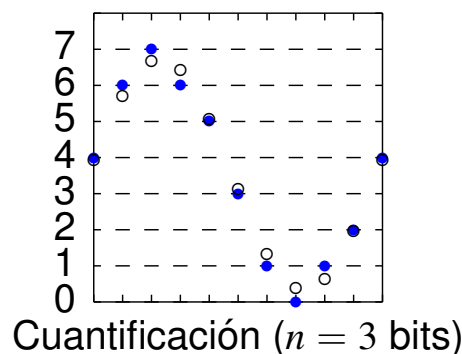
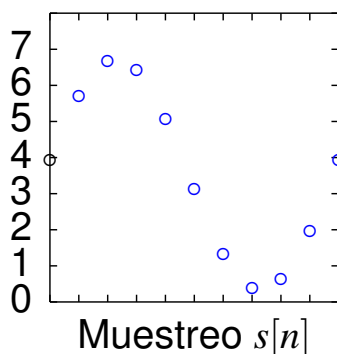
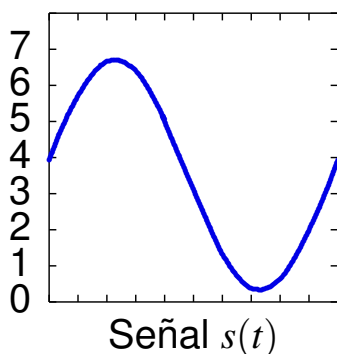


Desventajas de los Sistemas Digitales

- Necesidad de sincronismo
- Mayor ancho de banda
- Muchas fuentes de información son de naturaleza analógica
 - ▶ Conversión A/D
 - ★ Muestreo
 - ★ Cuantificación → error de cuantificación
 - ▶ Conversión D/A
 - ★ Interpolación
 - ★ Filtrado paso bajo

Conversión Analógico Digital (A/D)

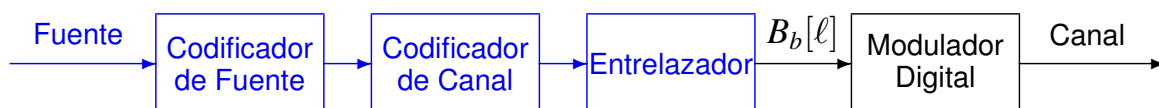
- Fuentes analógicas: amplitudes continuas, tiempo continuo
- Conversión analógico/digital:
 - ▶ Tiempo discreto: Muestreo a frecuencia f_s muestras/s
 - ▶ Amplitudes discretas: Cuantificación a n bits/muestra
 - ★ Ruido de cuantificación: sólo hay 2^n niveles de cuantificación
 - Diferencia entre valor muestreado y valor cuantificado
 - ★ Decece a medida que se incrementa n



- Tasa binaria (bits/s): $R_b = f_s$ (muestras/s) \times n (bits/muestra)

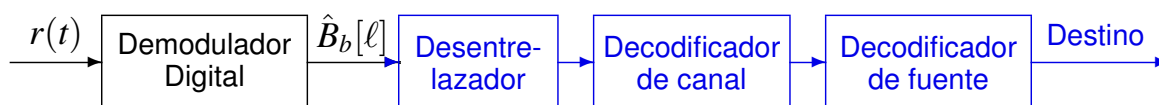
Transmisor/Receptor Digital

● Transmisor digital



- ▶ Modulador digital: Transmisión de una secuencia de símbolos (generalmente bits, $B_b[\ell]$) a través de una canal de comunicaciones

● Receptor digital



- ▶ Demodulador digital: Recuperación de la secuencia de símbolos (bits, $\hat{B}_b[\ell]$) a partir de la señal recibida través de una canal de comunicaciones, $r(t)$

Codificadores de fuente y de canal

● Codificador de fuente

- ▶ Reduce la redundancia de la fuente (compresión)
- ▶ Reducción de la tasa binaria a transmitir

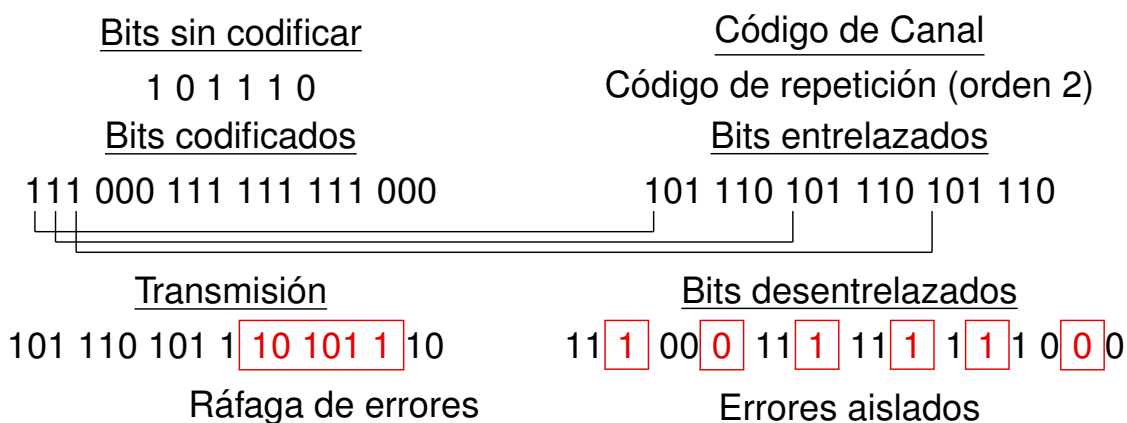
● Codificador de canal

- ▶ Introducción de redundancia de forma controlada
- ▶ Detección y corrección de errores
- ▶ Capacidad de detección/corrección en función de su complejidad
- ▶ Ejemplo más sencillo: códigos de repetición
 - ★ Código de repetición 1: $0 \rightarrow 00$ $1 \rightarrow 11$
 - Detecta 1 error sobre un bloque de dos bits
 - ★ Código de repetición 2: $0 \rightarrow 000$ $1 \rightarrow 111$
 - Detecta 2 errores o corrige 1 error (corrección basada en decisión por mayoría) sobre un bloque de tres bits

Entrelazado (Interleaving)

- Protección frente a errores de ráfaga
 - ▶ En combinación con el codificador de canal
- Reordenación de bits
 - ▶ Objetivo: transformar errores de ráfaga en errores aislados
 - ★ El decodificador de canal puede corregir relativamente pocos errores por bloque
- Clases de entrelazadores
 - ▶ Entrelazadores bloque
 - ▶ Entrelazadores convolucionales

Entrelazado - Un ejemplo



1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0

Entrelazador
 $N_c \times N_b$

Entrelazador Bloque
Entrada de bits: por columna
Salida de bits: por fila

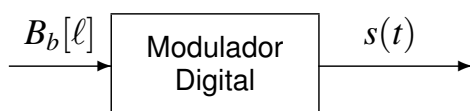
1	1	1
0	0	0
1	1	1
1	1	1
1	1	1
0	0	0

Desentrelazador
 $N_b \times N_c$

Diseño de un sistema de comunicaciones

- Factores a considerar en el diseño
 - ▶ Tecnologías existentes
 - ▶ Coste
 - ▶ Calidad (prestaciones)
 - ★ Sist. analógicos: fidelidad → relación señal a ruido (S/N)
 - ★ Sist. digitales: tasa de errores (BER)
 - ▶ Consumo de recursos
 - ★ Potencia (energía)
 - Limitaciones físicas
 - Limitaciones administrativas
 - Limitaciones económicas
 - ★ Ancho de banda
 - Mismo tipo de limitaciones
- Objetivo fundamental de este capítulo:
 - ▶ Diseño de moduladores/demoduladores digitales considerando el compromiso entre prestaciones y consumo de recursos

Modulador digital



- Transmisión de bits (secuencia $B_b[\ell]$) a una tasa binaria $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s
 - ▶ Conversión en una señal eléctrica $s(t)$
- Transmisión de bits por bloques - Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de la secuencia $B_b[\ell]$ en bloques de m bits
 - ▶ Cada bloque de m bits es un símbolo
 - ★ 1 símbolo $\equiv m$ bits
 - ★ Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{M-1}$
 - ▶ Secuencia de símbolos $B[n]$
 - ★ Tasa de símbolo $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
 - ★ Relación entre tasas R_b / R_s : $R_b = m \cdot R_s$ (o también $T = m \cdot T_b$)
 - ★ Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{M-1}$
 - ▶ Transmisión de un símbolo (bloque de m bits) cada T seg.
- Conversión de secuencia de bits/símbolos a señal $s(t)$
 - ▶ Generación por tramos: “fragmentos” de T segundos (correspondientes a 1 símbolo)
 - ★ Intervalo de símbolo para $B[n]$: intervalo $nT \leq t < (n+1)T$

Conversión símbolo / señal - Modelo más simple

- Se estudia inicialmente el caso del primer símbolo
 - ▶ $B \equiv B[0]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $0 \leq t < T$
- Conversión símbolo / señal
 - ▶ Alfabeto de M posibles símbolos: $B \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$
 - ▶ Definición de M formas de onda de duración T segundos

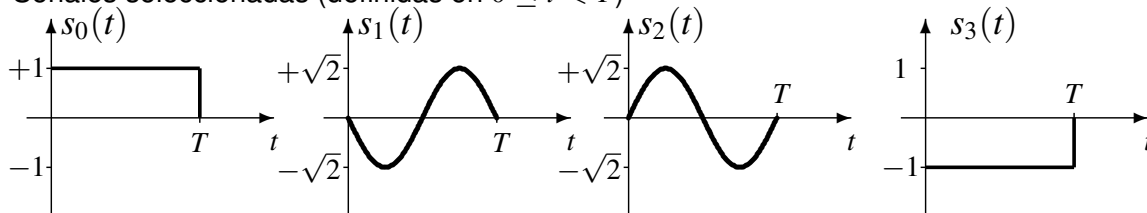
$$\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}, \text{ definidas en } 0 \leq t < T$$

- ▶ Asociación símbolo / forma de onda: $b_i \leftrightarrow s_i(t)$
- ▶ Generación de la señal a transmitir
 - ★ Si $B = b_i$, entonces $s(t) = s_i(t)$
- Transmisión del símbolo $B[n]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Valor de símbolo: $B[n] = b_j$
 - ★ Se traslada la forma de onda asociada a b_j al intervalo

$$s(t) = s_j(t - nT), \text{ en } nT \leq t < (n+1)T$$

Ejemplo $M = 4$

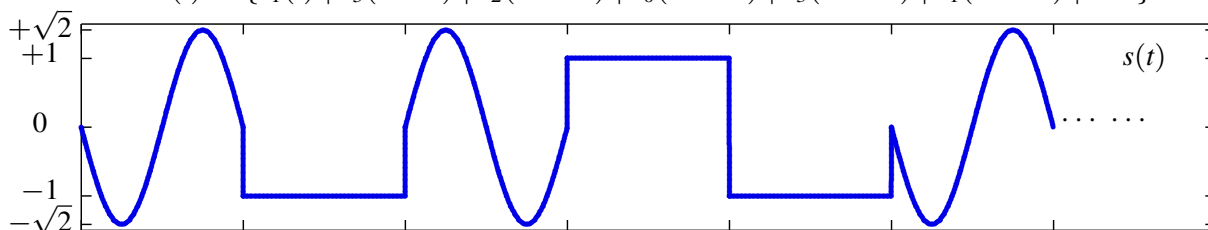
- Número de bits por símbolo: $m = 2 \rightarrow M = 4$ símbolos
- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas (definidas en $0 \leq t < T$)



- Secuencia a transmitir: $B_b[\ell] = 011110001101 \dots$
- Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de $B_b[\ell]$: $01 | 11 | 10 | 00 | 11 | 01 | \dots$
 - ▶ Secuencia $B[n] = b_1 | b_3 | b_2 | b_0 | b_3 | b_1 | \dots$

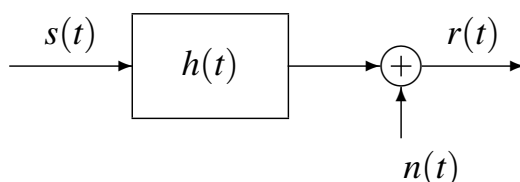
- Señal transmitida
 - ▶ Generación por intervalos:

$$s(t) = \{s_1(t) | s_3(t - T) | s_2(t - 2T) | s_0(t - 3T) | s_3(t - 4T) | s_1(t - 5T) | \dots\}$$



Transmisión a través del canal

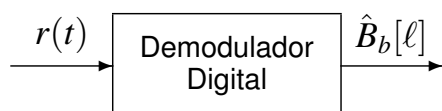
- Señal recibida a la salida del canal, $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones durante la transmisión
 - ▶ No coincide con la señal transmitida: $r(t) \neq s(t)$
- Modelo de canal - Efectos de distorsión considerados
 - ▶ Distorsión lineal
 - ★ Modelo: sistema lineal e invariante, $h(t)$, $H(j\omega)$
 - ▶ Ruido térmico
 - ★ Modelo: proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(t) = \frac{N_0}{2}$, siendo $N_0 = k \times T^a(^{\circ}\text{K})$



- ▶ Señal recibida

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

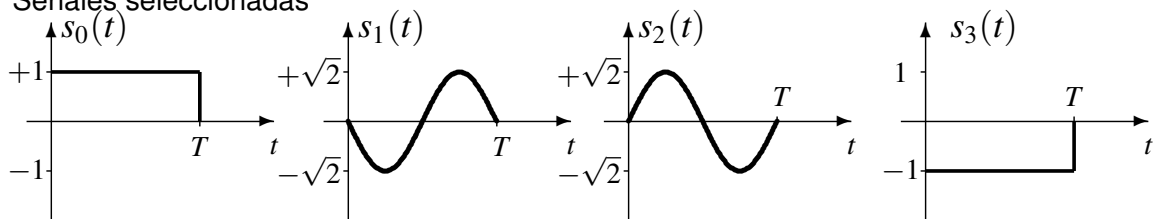
Demodulador digital



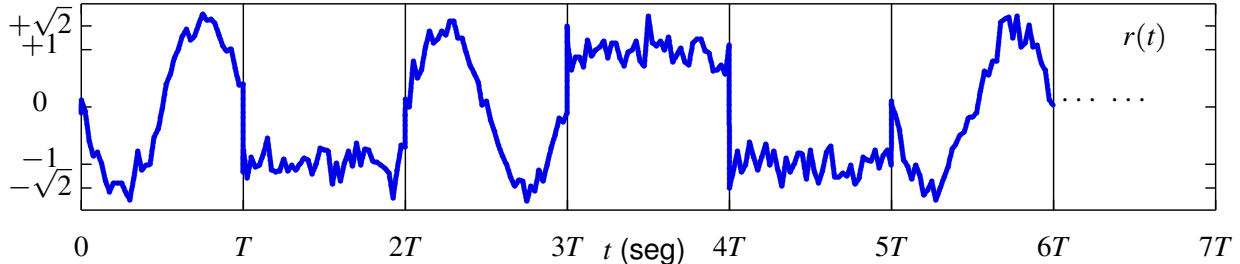
- Recuperación de la secuencia de bits $B_b[\ell]$ a partir de la señal recibida a través del canal, $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones en la transmisión: $r(t) \neq s(t)$
- Procesado de $r(t)$ para recuperar los bits transmitidos
 - ▶ Procesado a tramos: partición en intervalos de símbolo
 - ▶ Estimación del símbolo (m bits) transmitido en cada intervalo
- Estima del primer símbolo: $\hat{B} \equiv \hat{B}[0]$
 - ▶ Observación de la señal $r(t)$ en el primer intervalo: $0 \leq t < T$
 - ▶ Comparar con las M posibles formas de onda transmitidas
 - ★ Si la “más parecida” es $s_k(t)$, entonces $\hat{B} = b_k$
- Estima del símbolo de índice n : $\hat{B}[n]$
 - ▶ Observar la señal $r(t)$ en el intervalo $nT \leq t < (n + 1)T$
 - ▶ Comparar con las M posibles formas de onda
 - ★ Si la “más parecida” es $s_v(t)$, entonces $\hat{B}[n] = b_v$

Ejemplo $M = 4$

- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas



- Señal recibida



- Detección de símbolos

- ▶ Segmentación de la señal en intervalos de símbolo

- ★ $n = 0$, intervalo $0 \leq t < T$ - Señal "más parecida": $s_1(t) \rightarrow \hat{B}[0] = b_1$
- ★ $n = 1$, intervalo $T \leq t < 2T$ - Señal "más parecida": $s_3(t) \rightarrow \hat{B}[1] = b_3$
- ★ Siguiendo el mismo proceso: $\hat{B}[2] = b_2, \hat{B}[3] = b_0, \hat{B}[4] = b_3, \hat{B}[5] = b_1$

- Secuencia decidida: $\hat{B}[n] = b_1|b_3|b_2|b_0|b_3|b_1| \dots \Rightarrow \hat{B}_b[\ell]: 01|11|10|00|11|01| \dots$

Selección de las M fomas de onda - Factores a considerar

- 1 Prestaciones: probabilidad de equivocarse en el receptor (P_e)

- ▶ Decisión: señal más parecida - P_e depende del "parecido" entre señales
- ▶ Medida de "parecido" (distancia): energía de la diferencia (raíz cuadrada)

$$d(s_i(t), s_k(t)) = \sqrt{\mathcal{E}\{s_i(t) - s_k(t)\}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt}$$

- ★ Reducir errores: incrementar la distancia entre señales

- 2 Energía de la señal transmitida

- ▶ La energía de la señal transmitida está limitada en la práctica
- ▶ Cuantificación: energía media por símbolo transmitido (E_s)
 - ★ Probabilidad de cada símbolo: $p_B(b_i) = P(B[n] = b_i)$
 - ★ Energía del símbolo $b_i \equiv$ energía de la señal $s_i(t)$
 - ★ Energía media por símbolo: promedio de la energía de los M símbolos

$$E_s = \sum_{i=0}^{M-1} p_B(b_i) \cdot \mathcal{E}\{s_i(t)\}, \text{ siendo } \mathcal{E}\{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt$$

- 3 Adecuación al canal ($h(t)$)

- ▶ Minimizar la distorsión que sufre la señal en la transmisión: $r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$
- ▶ Situación ideal: distorsión lineal introducida por el canal nula (sólo ruido)

- ★ El ruido es el único elemento de distorsión: $r(t) = s(t) + n(t)$

- ★ Se consigue si: $s_i(t) * h(t) = s_i(t)$ ó $S_i(j\omega) \cdot H(j\omega) = S_i(j\omega)$ para $i = 0, 1, \dots, M - 1$

Conveniencia de una representación vectorial de las señales

- Diseño del modulador digital
 - ▶ Selección de las M señales que permiten transmitir cada bloque de m bits
- Considerar los 3 factores anteriores a la hora de seleccionar las M señales trabajando en el dominio temporal es un problema difícil de tratar
 - ▶ Se simplifica utilizando una representación vectorial de las señales
- Representación vectorial de las señales
 - ▶ Facilitará el cálculo de la energía de cada señal
 - ▶ Facilitará el cálculo del “*parecido*” entre señales
 - ▶ Permite separar el problema de la adecuación de las señales al canal de los otros dos factores a considerar

Representación geométrica de las señales Espacios vectoriales

Un espacio vectorial (\mathbb{V}) es un conjunto de elementos (vectores) que poseen las siguientes propiedades:

- Ley de composición interna: suma (+)

$$x, y, \in \mathbb{V}, \text{ Operación suma: } \boxed{x + y \in \mathbb{V}}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Conmutativa: $\forall x, y \in \mathbb{V}; x + y = y + x$
- b) Asociativa: $\forall x, y, z \in \mathbb{V}; x + (y + z) = (x + y) + z$
- c) Existencia de elemento neutro

$$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{V} : \forall x \in \mathbb{V}; x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$$

- d) Existencia de elemento inverso

$$\forall x \in \mathbb{V} \exists (-x) : x + (-x) = \mathbf{0}$$

Espacios vectoriales (II)

- Ley de composición externa: producto (\times) con escalares (\mathbb{C})

$$\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \text{ Operación producto: } \boxed{\alpha \times \mathbf{x} \in \mathbb{V}}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Asociativa:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \alpha \times (\beta \times \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \times \mathbf{x}$$

- b) Existencia de elemento neutro:

$$\exists e_n \in \mathbb{C} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; e_n \times \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- c) Distributiva respecto a la suma:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}; \alpha \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \times \mathbf{x} + \alpha \times \mathbf{y}$$

- d) Distributiva respecto al producto por un escalar:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; (\alpha + \beta) \times \mathbf{x} = \alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{x}$$

Espacios de Hilbert

- Espacio de Hilbert: espacio vectorial con producto escalar

$$\text{Notación: } \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \text{Operación } f : (\mathbb{V}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{C}$$

- Propiedades de la operación producto escalar

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$

b) $\langle (\alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha \times \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \times \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector elemento neutro)

Norma para el espacio vectorial

- El producto escalar define una norma para el espacio vectorial

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- Medida de distancia entre vectores

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- Ángulo entre dos vectores se mide como

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right)$$

- La definición del producto escalar no es única
 - ▶ Cada definición da lugar a un espacio de Hilbert distinto

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo continuo (espacio L_2)

- Producto escalar que define el espacio L_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}}$$

- Distancia entre dos señales

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t) - y(t)\}}$$

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo discreto (espacio ℓ_2)

- Producto escalar que define el espacio ℓ_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}}$$

- Distancia: distancia euclídea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n] - y[n]\}}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

- Expresiones para los espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] \right| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2}$$

- Se cumple la igualdad si los dos vectores son linealmente dependientes (proporcionales)

$$\mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{x}, \text{ para cualquier } \alpha \in \mathbb{C}$$

- ▶ Particulación para espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$y(t) = \alpha \times x(t) \text{ ó } y[n] = \alpha \times x[n]$$

Representación en una base del espacio vectorial

- Base para un espacio de Hilbert \mathbb{H} de dimensión D :
Subconjunto de D elementos $\{\mathbf{b}_n\}_{n=0}^{D-1} \in \mathbb{H}$ que permiten representar cada elemento del espacio como una combinación lineal de estos D elementos

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{D-1} c_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_n$$

- ▶ D coeficientes únicos $c_n(\mathbf{x})$ ($n \in \{0, 1, \dots, D-1\}$) para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ (coordenadas)

- Base ortogonal:

$$\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m \rangle = 0, \forall n \neq m$$

El producto escalar de dos elementos distintos de la base es nulo

- Base ortonormal: base ortogonal con elementos normalizados

$$\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m \rangle = 0, \forall n \neq m \text{ y además } \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n \rangle = 1 \rightarrow \|\mathbf{b}_n\| = 1$$

- ▶ Coeficientes en una base ortonormal:

$$c_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_n \rangle$$

Se obtienen a través del producto escalar (del vector con los elementos de la base)

Procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt

- Objetivo (general): encontrar una base ortonormal que permita representar un conjunto de vectores
- Objetivo (particular): encontrar una base ortonormal que permita representar un conjunto de M señales

- ▶ Señales (M)

$$\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$$

- ▶ Base ortonormal - N señales (dimensión N) - $N \leq M$

$$\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$$

- ▶ Representación de las señales

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- ▶ Coordenadas de una señal, $s_i(t)$, en la base

$$a_{i,j} = \langle s_i(t), \phi_j(t) \rangle$$

Representación vectorial (N dimensional): vector de coordenadas $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$

Obtención de la base

- Paso 0: Elegir $s_0(t)$ con energía no nula

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}}, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\{s_0(t)\} : \text{Energía de } s_0(t)$$

- Paso 1

- ▶ Proyección de $s_1(t)$ sobre $\phi_0(t)$

$$a_{1,0} = \langle s_1(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot \phi_0^*(t) dt$$

- ▶ Ortogonalización - Se sustrae esta proyección

$$d_1(t) = s_1(t) - a_{1,0} \cdot \phi_0(t)$$

- ▶ Normalización

$$\phi_1(t) = \frac{d_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\{d_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_1(t)|^2 dt$$

Obtención de la base (II)

- Paso k

- ▶ Proyección de $s_k(t)$ sobre los elementos ya disponibles de la base ($\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{k-1}(t)\}$)

$$a_{k,j} = \langle s_k(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \cdot \phi_j^*(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

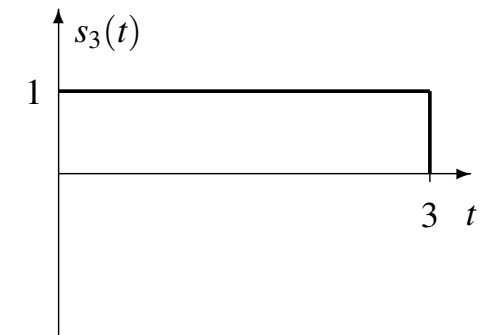
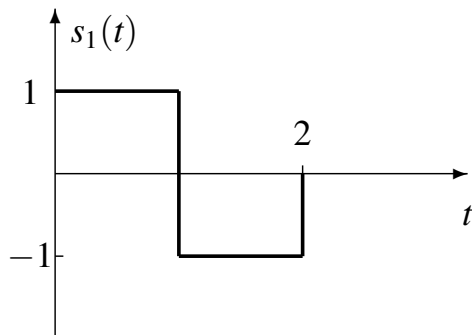
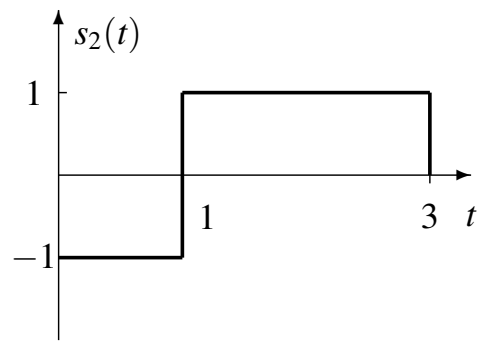
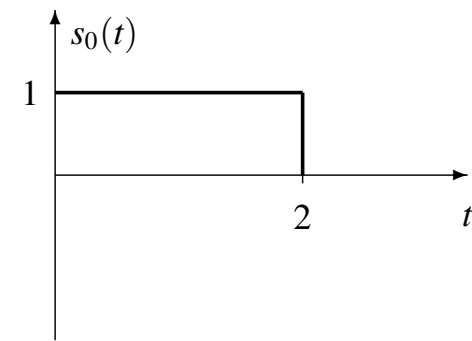
- ▶ Ortogonalización - Sustracción de las proyecciones

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j} \cdot \phi_j(t)$$

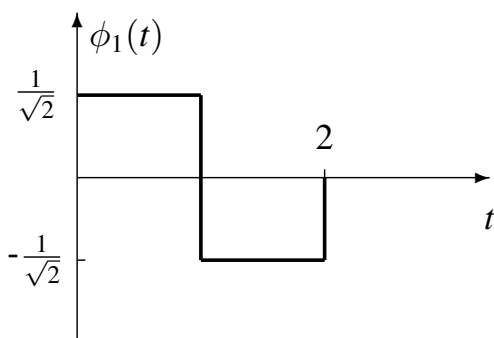
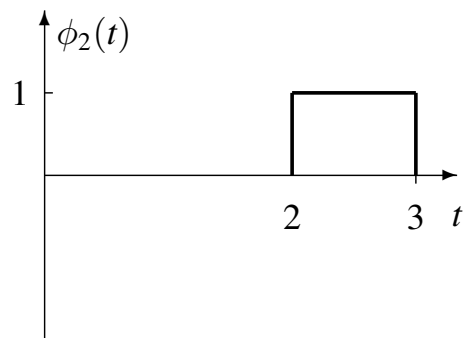
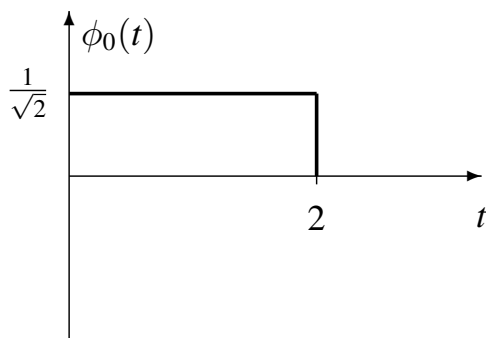
- ▶ Normalización

$$\phi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}}, \quad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}\{d_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_k(t)|^2 dt$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Señales



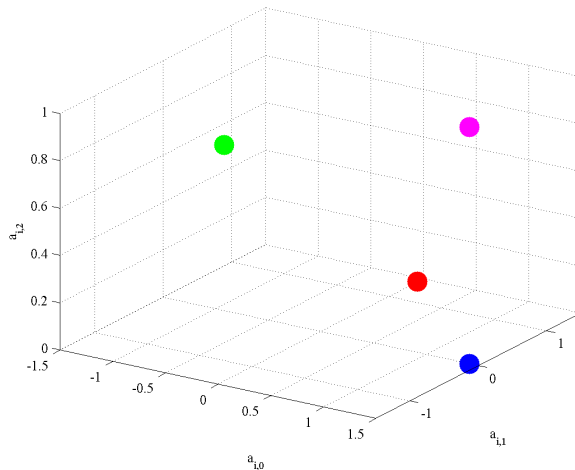
Ejemplo Gram-Schmidt - Base



Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas

- Representación vectorial de las señales

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa

- Base

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

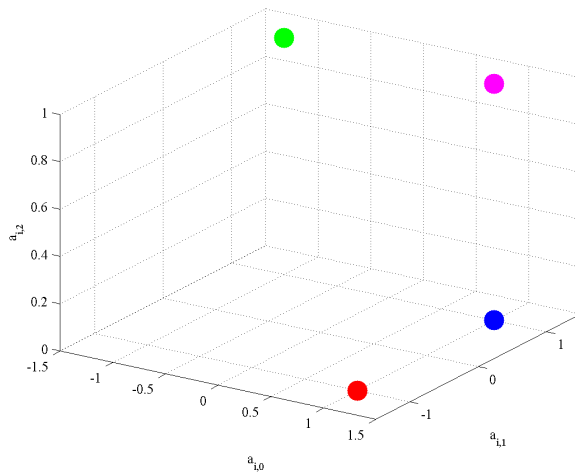
- Coordenadas en la base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas (base alternativa)

- Representación vectorial de las señales

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram Schmidt - Energías y distancias

- Energía de una señal y distancias entre señales se calculan de forma eficiente a partir de las representaciones vectoriales de las señales
 - ▶ Energía de una señal

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2$$

- ▶ Distancia entre dos señales

$$\begin{aligned} d(s_i(t), s_k(t)) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt} \\ &= \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2} \end{aligned}$$

Ejemplo Gram Schmidt - Energías y distancias (II)

- Coordenadas en la primera base

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas en la segunda base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

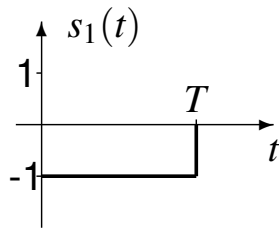
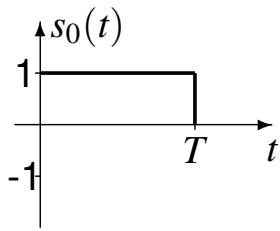
- Energías y distancias (independientemente de la base elegida)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= 2, \quad \mathcal{E}_1 = 2, \quad \mathcal{E}_2 = 3, \quad \mathcal{E}_3 = 3 \\ d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) &= 2, \quad d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) = \sqrt{5}, \quad d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_3) = 1 \\ d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \sqrt{9}, \quad d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) = \sqrt{5}, \quad d(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = 2 \end{aligned}$$

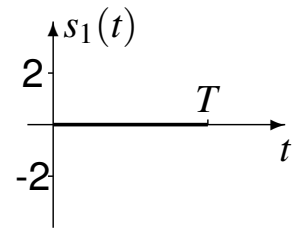
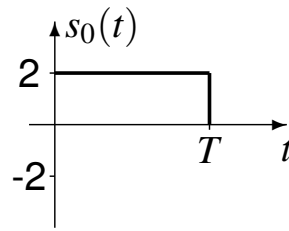
Ejemplo Gram Schmidt - Conclusiones

- La base ortonormal que permite representar las M señales no es única
 - ▶ Es válido cualquier conjunto de N señales ortonormales que permitan representar cada una de las M señales de forma exacta
- La energía de cada una de las señales y la distancia entre las mismas será la misma para cualquier base ortonormal
 - ▶ La elección de una base u otra sólo supondrá una rotación del sistema de referencia

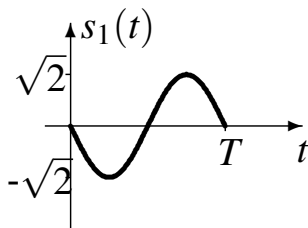
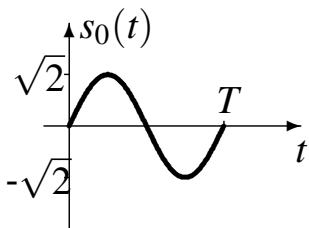
Ejemplo para $M = 2$ - Candidatos para $s_0(t), s_1(t)$



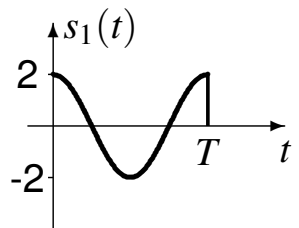
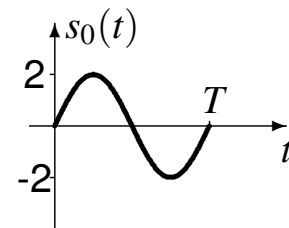
Conjunto 1



Conjunto 2



Conjunto 3



Conjunto 4

Distancias entre las señales

$$d(s_i(t), s_j(t)) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_j(t)|^2 dt}$$

- Primer conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |1 - (-1)|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

- Segundo conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |2 - 0|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

Distancias entre las señales

- Tercer conjunto

$$\begin{aligned}d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(-\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 8 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt} = \sqrt{4 \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T} = 2\sqrt{T}\end{aligned}$$

- Cuarto conjunto

$$\begin{aligned}d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 4 - 8 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt} = 2\sqrt{T}\end{aligned}$$

ya que

$$\int_0^T 8 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \left[\frac{2T}{\pi} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = 0$$

Energía media por símbolo

$$\begin{aligned}E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt\right] \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} P(s(t) = s_i(t)) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt\end{aligned}$$

- Conjunto 1

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |1|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |-1|^2 dt = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T$$

- Conjunto 2

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |2|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |0|^2 dt = \frac{1}{2}4T + \frac{1}{2}0 = 2T$$

Energía media por símbolo

$$\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

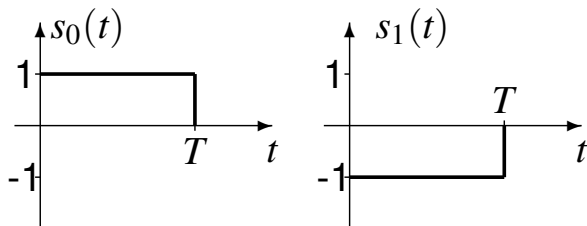
- Conjunto 3

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} = T$$

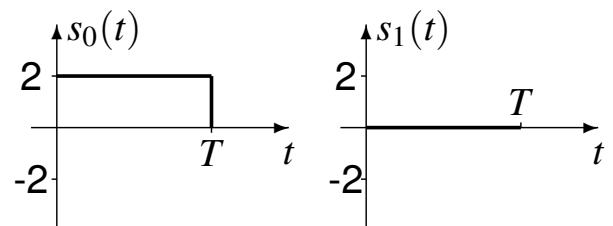
- Conjunto 4

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (2)^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 \frac{T}{2} = 2T$$

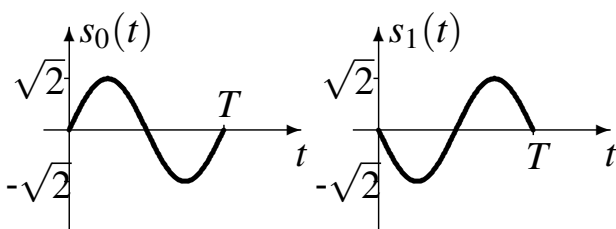
Ejemplo para $M = 2$ - Candidatos para $s_0(t)$, $s_1(t)$



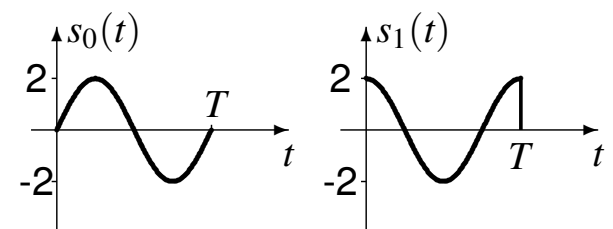
Conjunto 1



Conjunto 2



Conjunto 3



Conjunto 4

Base y constelación

- Se define una base para las M señales
- Se obtiene la representación vectorial de cada señal

$$s_i(t) \leftrightarrow \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$$

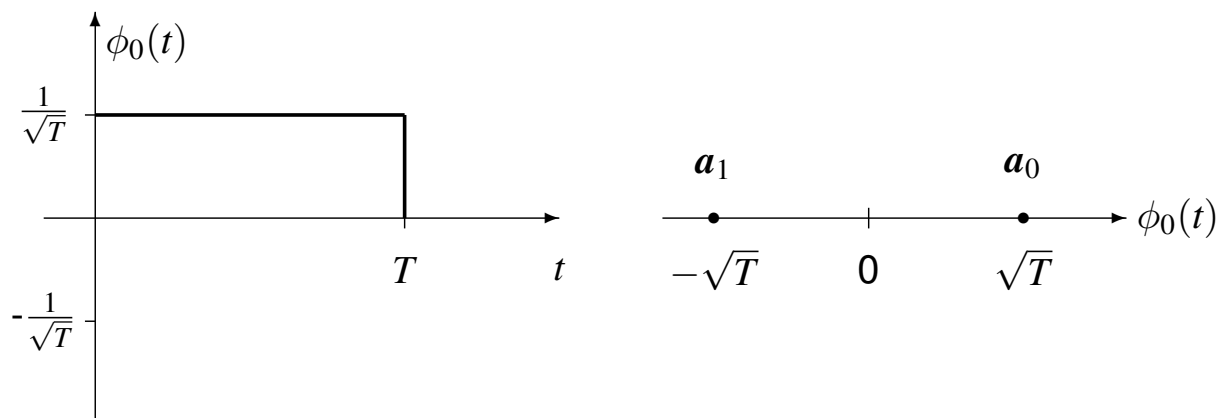
- Relación de la señal con la representación discreta

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- Facilita la medida de energía y distancias

$$\mathcal{E}\{s_i(t)\} = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2, \quad d(s_i(t), s_k(t)) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

Base y constelación - Conjunto 1

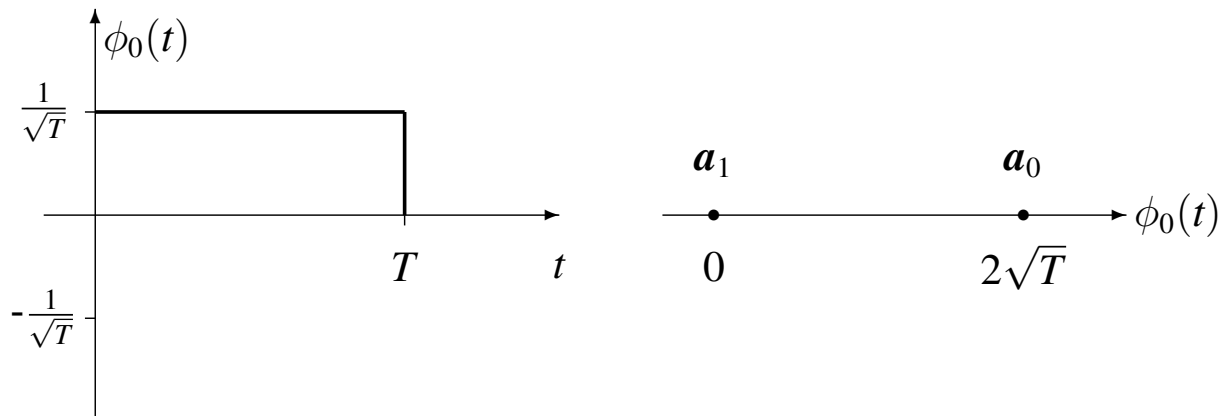


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = -\sqrt{T}$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 2

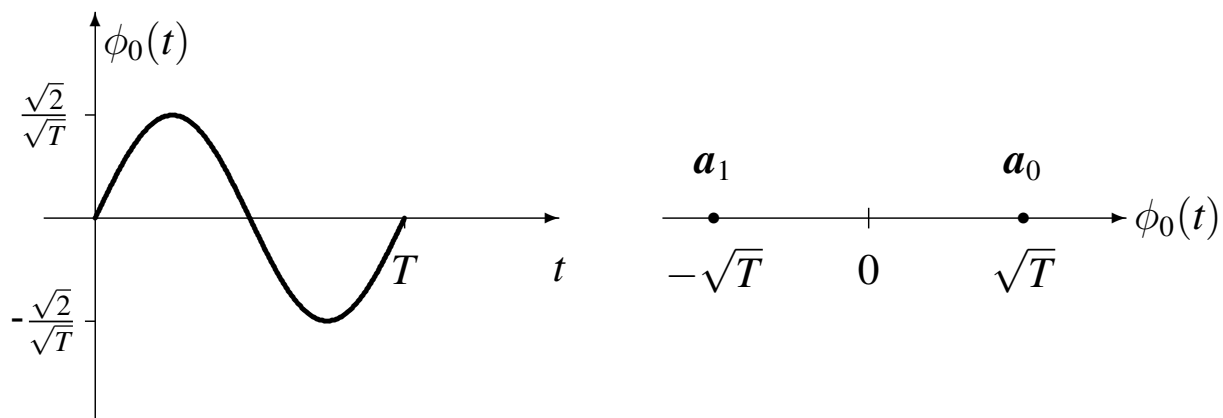


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +2\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = 0$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 3

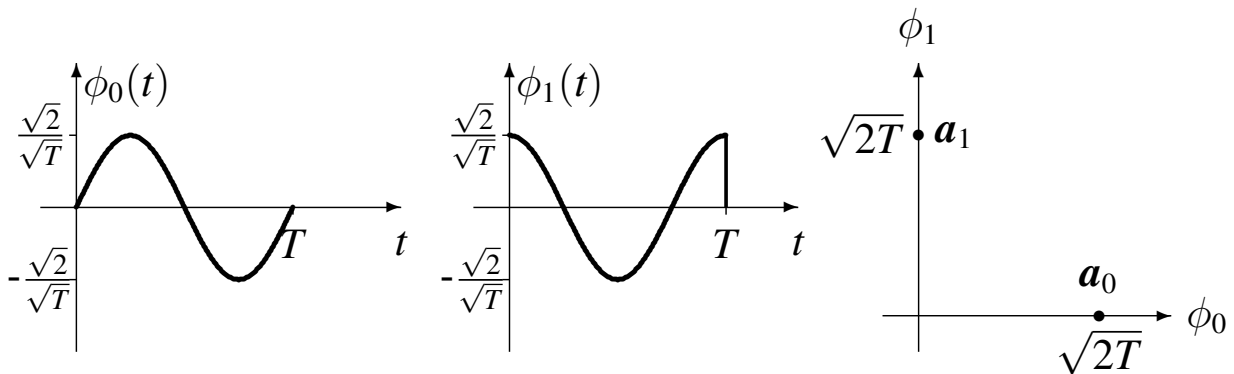


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = -\sqrt{T}$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 4



$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$$

$$s_0(t) = a_{0,0} \cdot \phi_0(t) + a_{0,1} \cdot \phi_1(t)$$

$$s_1(t) = a_{1,0} \cdot \phi_0(t) + a_{1,1} \cdot \phi_1(t)$$

Distancias entre las señales - Constelación

$$d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

- Primer conjunto: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Segundo conjunto: $\mathbf{a}_0 = 2\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = 0$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+2\sqrt{T}) - (0)|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Tercer conjunto: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Cuarto conjunto: $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(\sqrt{2T}) - (0)|^2 + |(0) - (\sqrt{2T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

Energía media por símbolo - Constelación

$$\begin{aligned} E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2 \end{aligned}$$

- Conjunto 1 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (+\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{T})^2 = \frac{1}{2} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot T = T$$

- Conjunto 2 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (+2\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2} \cdot (0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4T + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2T$$

Energía media por símbolo - Constelación (II)

- Conjunto 3 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (+\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{T})^2 = \frac{1}{2} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot T = T$$

- Conjunto 4 (símbolos equiprobables)

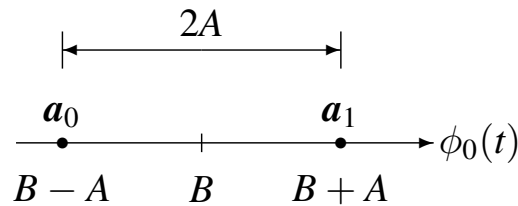
$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} \cdot \left[(\sqrt{2T})^2 + (0)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[(0)^2 + (\sqrt{2T})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2T + \frac{1}{2} \cdot 2T = 2T \end{aligned}$$

- Mínima energía para unas distancias entre símbolos dadas
 - ▶ En este caso Conjunto 1 y Conjunto 3 requieren menos energía para la misma distancia
 - ★ Para unas distancias entre símbolos dadas, se minimiza la energía si la media de la constelación es nula

$$E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} E[a_{i,0}] \\ E[a_{i,1}] \\ \vdots \\ E[a_{i,N-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Mínima E_s para unas distancias entre símbolos - Media nula

- Ejemplo en espacio 1D: símbolos $a_0 = B - A$, $a_1 = B + A$
 - ▶ Media B
 - ▶ Distancia entre símbolos $2A$



- Energía media por símbolo (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}\{a_0\} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}\{a_1\} = \frac{1}{2} \cdot (B - A)^2 + \frac{1}{2} \cdot (B + A)^2$$

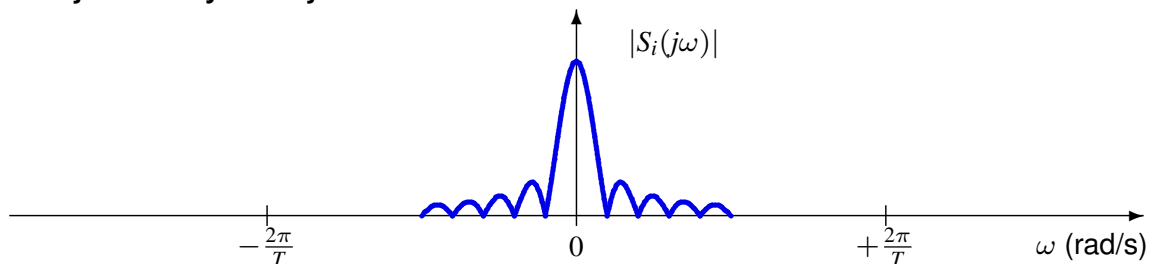
$$= \frac{1}{2} \cdot (B^2 + A^2 - 2AB) + \frac{1}{2} \cdot (B^2 + A^2 + 2AB) = B^2 + A^2$$

- ▶ Contribución media: B^2
 - ▶ Contribución distancia: A^2
- Mínima energía por símbolo para una distancia $2A$

Media nula ($B = 0$) $\rightarrow E_s = A^2$

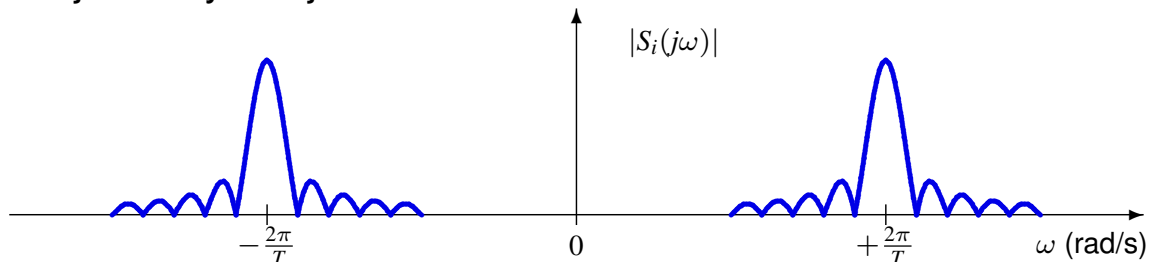
Respuesta en frecuencia de las señales

- Conjunto 1 y Conjunto 2



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias

- Conjunto 3 y Conjunto 4



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

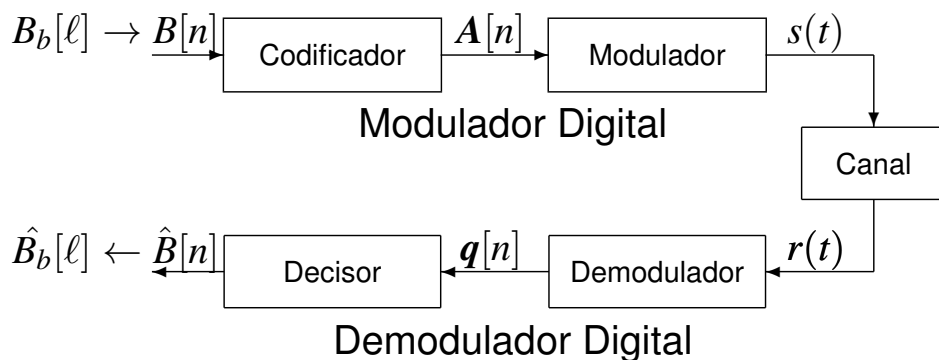
Diseño del modulador digital - Selección de las M señales

- Restricciones a tener en cuenta
 - ▶ Energía de las señales (E_s)
 - ▶ Distancia (medida de parecido) entre señales: $d(s_i(t), s_j(t))$
 - ▶ Adecuación a las características del canal: $s_i(t) * h(t) = s_i(t)$
- Representación discreta (vectorial) de las señales
 - ▶ Constelación de M puntos representando las señales
 - ★ M vectores a_i de dimensión N
 - ★ Permite evaluar energías y distancias (independientemente de la base)
 - ▶ Base ortonormal de dimensión N
 - ★ N funciones ortonormales, $\phi_j(t)$
 - ★ Permite evaluar la adecuación a las características del canal (independientemente de la constelación)

Si $\phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t), \forall j$, entonces $s_i(t) * h(t) = s_i(t), \forall i$

- ▶ Restricciones constelación – base
 - ★ Dimensión del espacio de señales, N

Modelo de comunicación digital



- División del modulador digital en dos módulos
 - ▶ Codificador
 - ▶ Modulador
- División del demodulador digital en dos módulos
 - ▶ Demodulador
 - ▶ Decisor
- Representaciones intermedias vectoriales: $A[n]$ y $q[n]$
 - ▶ Representación discreta de las señales en un espacio vectorial de dimensión N definido por una base $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ▶ Simplifican notablemente el diseño del transmisor y receptor

Descripción de cada módulo

● Codificador

- ▶ Define la representación vectorial de la señal asociada a cada símbolo (constelación)
 - ★ Intervalo de índice n : vector $A[n]$ representando $s(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$
- ▶ Criterios de diseño (para seleccionar la constelación)
 - ★ Energía
 - ★ Distancia (“*parecido*”) entre señales (prestaciones)

● Modulador

- ▶ Define la base ortonormal del espacio de señales
- ▶ Criterios de diseño (para seleccionar las N funciones $\phi_j(t)$)
 - ★ Adecuación a las características del canal

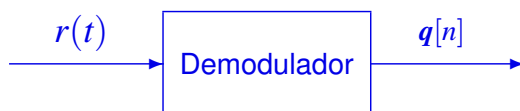
● Demodulador

- ▶ Convierte la señal recibida, por intervalos de símbolo, en vectores en el espacio de señales definido por la base $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ★ Intervalo de índice n : vector $q[n]$ representando $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$

● Decisor

- ▶ Compara el “*parecido*” entre la señal recibida y las M posibles señales $\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$ para decidir símbolos
 - ★ Medida de distancia sobre las representaciones vectoriales
 - ★ Compara las distancias de:
 - Vector de la señal recibida en el intervalo de símbolo: $q[n]$
 - Vectores de los M posibles símbolos: a_i para $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

Demodulador



- Obtiene la representación en tiempo discreto de la señal recibida $r(t)$
 - ▶ Proyección en el espacio de señales N -D del modulador

$$q[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n] \end{bmatrix} \equiv r(t) \text{ en base ortonormal } \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$$

- ▶ Proceso de la señal a tramos: por intervalos de símbolo
 - ★ En $q[n]$ se tiene la representación discreta de $r(t)$ en el intervalo de símbolo asociado a $A[n]$, i.e., $nT \leq t < (n+1)T$

● Cálculo de la proyección

- ▶ Proyección en una base ortonormal: producto escalar
 - ★ Proceso del primer intervalo de símbolo:

$$q[0] \equiv \mathbf{q} = [q_0, q_1, \dots, q_{N-1}]^T$$

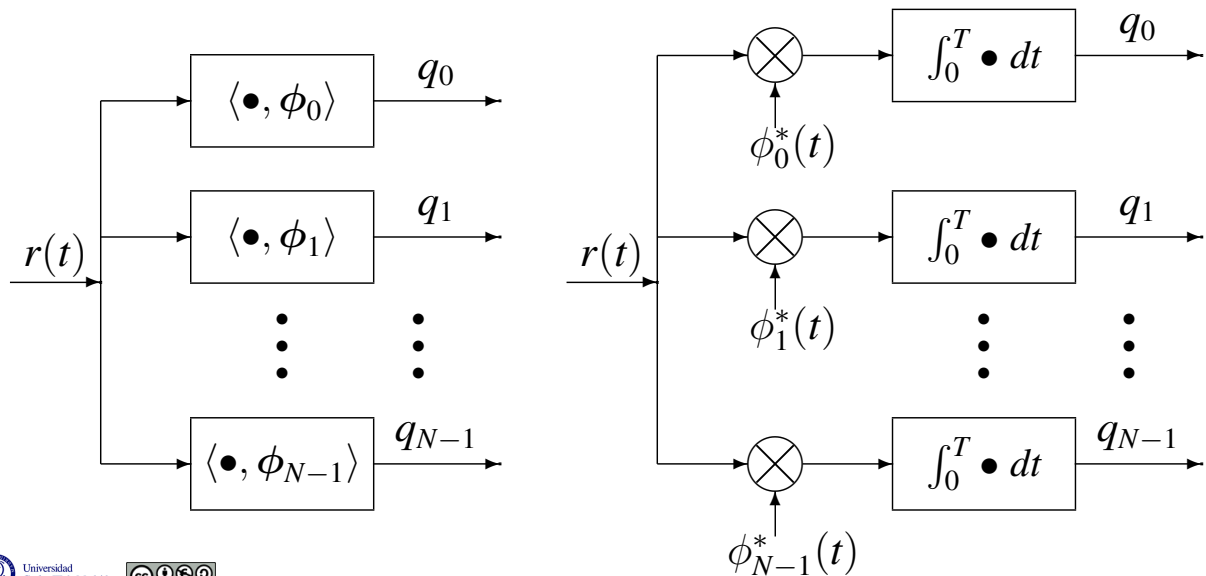
$$\text{Intervalo: } 0 \leq t < T$$

$$q_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt = \int_0^T r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt$$

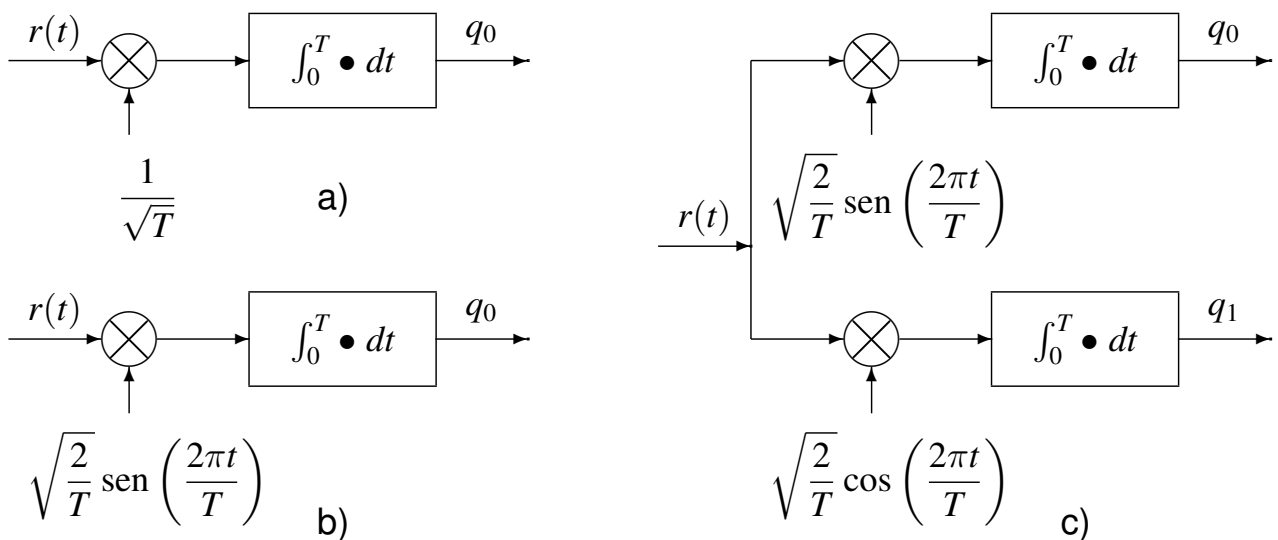
Demodulador por correlación

- Implementación directa del producto escalar
 - ▶ Banco de N correladores con $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo

$$q_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle = \int_0^T r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt$$



Ejemplos de implementación - Conjuntos de señales anteriores candidatos a implementar el modulador



- a) Conjuntos 1 y 2
- b) Conjunto 3
- c) Conjunto 4

Demodulador mediante filtros adaptados

- Filtrado de la señal con un banco de N filtros
 - ▶ Respuesta de los filtros: $h_k(t)$, con $k = 0, 1, \dots, N - 1$
 - ▶ Salida del filtro de índice k

$$y_k(t) = r(t) * h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot h_k(t - \tau) d\tau$$

- Filtros adaptados a los elementos de la base ortonormal
 - ▶ Respuesta del filtro adaptado

$$h_k(t) = \phi_k^*(-t)$$

- ▶ Señal de salida del filtro

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot \phi_k^*(-(t - \tau)) d\tau$$

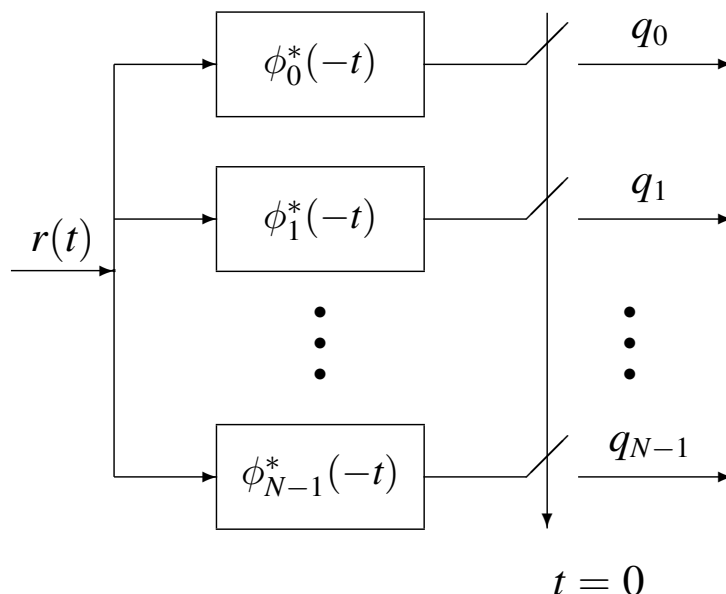
- ▶ Valor de la señal $y_k(t)$ en el instante $t = 0$

$$y_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot \phi_k^*(\tau) d\tau \equiv \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = q_k$$

- ★ Coordenada de índice k de la salida del demodulador

Demodulador mediante filtros adaptados (II)

- Banco de N filtros adaptados
 - ▶ Filtros adaptados a los N elementos de la base ortonormal
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo
 - ★ Muestreo en $t = 0$ de la salida de los filtros



Demodulador con filtros adaptados causales

- Soporte para la respuesta de los elementos de la base
 - ▶ Funciones $\phi_k(t)$ definidas en $0 \leq t < T$
 - ▶ Soporte de los filtros adaptados $h_k(t) = \phi_k^*(-t)$
 - ★ Funciones $\phi_k^*(-t)$ definidas en $-T < t \leq 0$
 - ★ Respuestas al impulso NO causales (anticausales)
 - ★ Implementación real NO es posible
- Implementación real de los filtros adaptados
 - ▶ Conversión en respuesta causal: retardo de T segundos

$$h_k^T(t) = h_k(t - T) = \phi_k^*(-(t - T)) = \phi_k^*(T - t)$$

- ▶ Producto escalar (para obtener coordenada q_k)
 - ★ Usando $h_k^T(t)$ se retarda T segundos la señal de salida

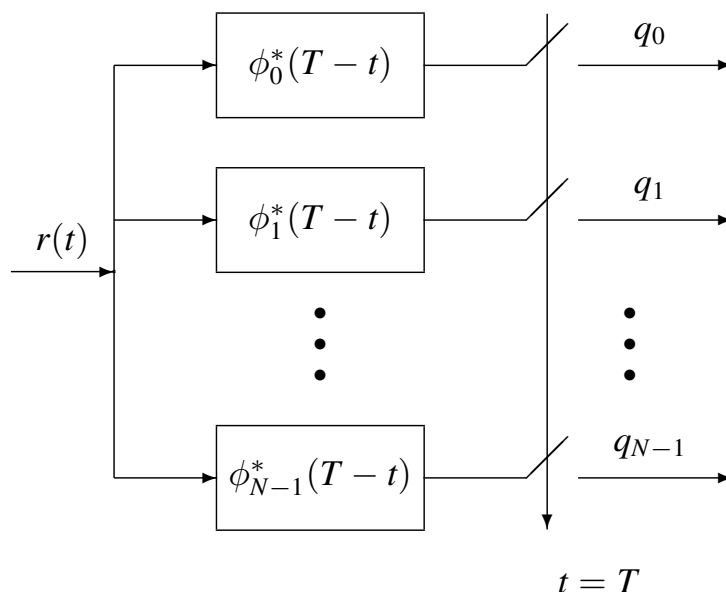
$$y_k^T(t) = r(t) * h_k^T(t) = y_k(t - T)$$

- ★ Hay que retardar el instante de muestreo T segundos

$$q_k = \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = y_k(0) = y_k^T(T)$$

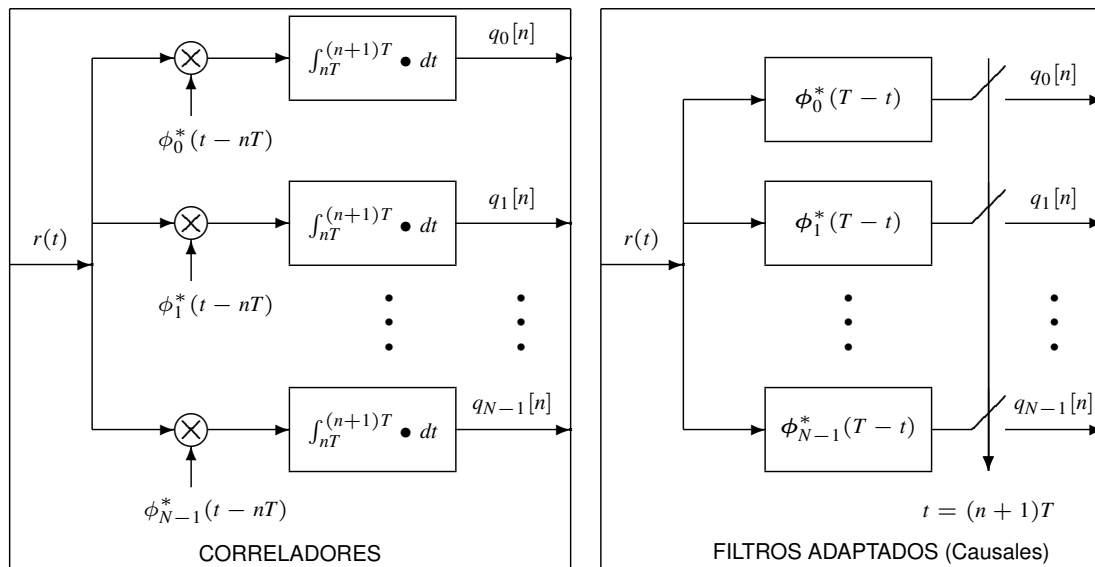
Demodulador mediante filtros adaptados causales (II)

- Banco de N filtros adaptados causales
 - ▶ Retardo de T segundos en la respuesta de los filtros
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo
 - ★ Retardo de T seg. en el instante de muestreo: $t = T$



Demodulador con flujo indefinido de símbolos

- Se ha analizado el proceso de la primera observación $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}[0]$
- Obtención de $\mathbf{q}[n]$: proceso de $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$



NOTA: se ha representado el caso general para una posible base $\{\phi_k(t)\}$ compleja, aunque en este capítulo sólo se considera el caso real



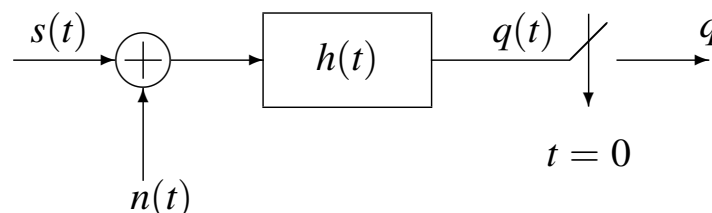
©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Demodulador 67 / 167

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N

- Filtrado de una señal $s(t)$ más ruido $n(t)$ con filtro $h(t)$



- ▶ S : Energía en q debida a la señal $s(t)$
 - ★ $s(t)$ es una señal real determinista
- ▶ N : Energía en q debida al ruido $n(t)$
 - ★ Modelo de ruido: proceso aleatorio estacionario, blanco y gaussiano, con estadísticos

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}, R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- ▶ Cálculo de la relación señal a ruido (S/N)

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{\text{Energía en } q \text{ debida a } s(t)}{\text{Energía en } q \text{ debida a } n(t)}$$

- ★ Búsqueda del filtro real $h(t)$ que maximiza la relación S/N



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Demodulador 68 / 167

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (II)

- Salida del filtro

$$\begin{aligned} q(t) &= (s(t) + n(t)) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

- Valor en el instante $t = 0$

$$q = q(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau}_{\text{término de señal} \equiv s} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau}_{\text{término de ruido} \equiv z} = s + z$$

- Relación señal a ruido en q

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E[|s|^2]}{E[|z|^2]}$$

- ▶ Cálculo de $E[|s|^2]$

- ★ Procesado de $s(t)$, señal determinista

$$E[|s|^2] = |s|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau \right|^2 \quad (\text{valor determinista})$$

- ▶ Cálculo de $E[|z|^2]$

- ★ Procesado de $n(t)$, señal aleatoria

Cálculo del valor esperado de $|z|^2$ teniendo en cuenta los estadísticos de la señal de ruido $n(t)$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (III)

- Estadísticos de $n(t)$

$$\text{Densidad espectral de potencia } S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}; \quad \text{Autocorrelación } R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- Cálculo de $E[|z|^2]$

$$\begin{aligned} E[|z|^2] &= E \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\theta) \cdot h(-\theta) d\theta \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E[n(\tau) \cdot n(\theta)]}_{R_n(\tau - \theta)} \cdot h(-\tau) \cdot h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{N_0}{2} \delta(\tau - \theta)}_{R_n(\tau - \theta)} \cdot h(-\tau) \cdot h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\} \end{aligned}$$

NOTA: se ha aplicado la propiedad de la integral de una delta multiplicando a una función

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{|s|^2}{E[z^2]} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz para $s(t)$ y $h(-t)$ reales

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau\right)$$

- ▶ La igualdad (valor máximo) se obtiene para $h(-t) = \alpha \times s(t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$

- Relación señal a ruido máxima:

$$\begin{aligned} \max_{h(t)} \left(\frac{S}{N}\right)_q &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}} \Bigg|_{h(-t)=\alpha \cdot s(t)} \\ &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \cdot \left(\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right)}{\frac{N_0}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \mathcal{E}\{s(t)\}} = \frac{\mathcal{E}\{s(t)\}}{\frac{N_0}{2}} \end{aligned}$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

De este resultado se obtienen dos conclusiones:

- 1 Para señales reales, la relación señal a ruido a la salida se hace máxima cuando $h(t) = \alpha \cdot s(-t)$ para cualquier valor de α (exceptuando $\alpha = 0$) y, particularmente, para el filtro adaptado

$$h(t) = s(-t)$$

Para señales complejas se llega a la misma conclusión pero con el filtro adaptado complejo

$$h(t) = s^*(-t)$$

- 2 La relación señal a ruido a la salida del filtro adaptado no depende de la forma específica de $s(t)$, sino únicamente de su energía y de la densidad espectral de potencia de ruido a la entrada del filtro

Demodulador - Modelo estadístico de \mathbf{q} para $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

- Modelo de la salida del demodulador \mathbf{q} asumiendo:
 - ▶ Elección óptima del modulador para el canal

$$\text{Base ortonormal : } \langle \phi_j(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T \phi_j(t) \cdot \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j \\ 1, & \text{si } k = j \end{cases} \equiv \delta[j - k]$$

- ★ Adecuación al canal \rightarrow canal gaussiano:

$$\phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t) \rightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

- ▶ Símbolo transmitido es $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i = [a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,N-1}]^T$
 - ★ Señal generada en el primer intervalo de símbolo $0 \leq t < T$:

$$s(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- Coordenada de índice k de \mathbf{q}

$$\begin{aligned} q_k &= \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T r(t) \cdot \phi_k^*(t) dt = \int_0^T (s(t) + n(t)) \cdot \phi_k^*(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t) \right) \phi_k^*(t) dt + \underbrace{\int_0^T n(t) \cdot \phi_k^*(t) dt}_{z_k} \end{aligned}$$

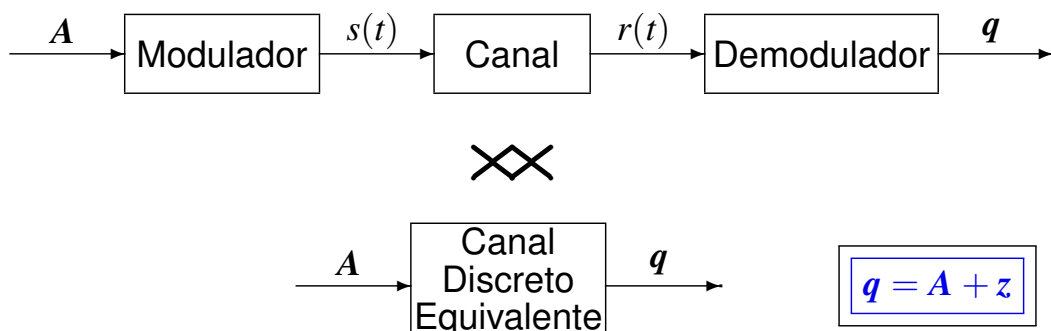
$$= \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \int_0^T \phi_j(t) \cdot \phi_k^*(t) dt + z_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \delta[j - k] + z_k = a_{i,k} + z_k$$

Canal discreto equivalente

- Modelo completo de la observación \mathbf{q} dado que $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_i + \mathbf{z}$$

- Canal discreto equivalente



Canal discreto equivalente - Modelo estadístico para \mathbf{z}

- Modelo para $n(t)$ es un proceso aleatorio gaussiano
 - ▶ Coordenadas $\{z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\}$ son variables aleatorias conjuntamente gaussianas
 - ★ Caracterización - función densidad de probabilidad conjunta gaussiana
 - Parámetros: Vector de medias / Matriz de covarianzas
- Media de cada coordenada

$$E[z_k] = E \left[\int_0^T n(t) \cdot \phi_k^*(t) dt \right] = \int_0^T \underbrace{E[n(t)]}_{m_n(t)=0} \cdot \phi_k^*(t) dt = 0$$

- Covarianza entre dos coordenadas

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_j, z_k) &= E[z_j \cdot z_k^*] = E \left[\left(\int_0^T n(t) \cdot \phi_j^*(t) dt \right) \left(\int_0^T n^*(\tau) \cdot \phi_k(\tau) d\tau \right) \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \underbrace{E[n(t) \cdot n^*(\tau)]}_{R_n(t-\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t-\tau)} \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t-\tau) \cdot \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(t) dt = \frac{N_0}{2} \cdot \delta[j-k] \end{aligned}$$



▶ Variables aleatorias z_j y z_k ($k \neq j$) incorreladas → independientes



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Demodulador 75 / 167

Distribuciones marginales y conjuntas para \mathbf{z}

- Distribución marginal

$$f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}}$$

- ▶ Gaussiana de media nula y varianza $\frac{N_0}{2}$

$$f_{z_k}(z_k) = \mathcal{N} \left(0, \frac{N_0}{2} \right)$$

- Distribución conjunta (para $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]^T$)

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \prod_{k=0}^{N-1} f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{N_0}}$$

- ▶ Gaussiana N -dimensional de media nula y varianzas $\frac{N_0}{2}$

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \mathcal{N}^N \left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2} \right)$$



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Demodulador 76 / 167

Distribuciones condicionales para q dado $A = a_i$

- Canal discreto equivalente

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{z}$$

- Distribución para cada coordenada dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

$$q_k = a_{i,k} + z_k, \quad \text{con } f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}}$$

$$f_{q_k|A}(q_k|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}\left(a_{i,k}, \frac{N_0}{2}\right)$$

- ▶ Gausiana de media $a_{i,k}$ y varianza $\frac{N_0}{2}$

- Distribución de la observación conjunta dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) &= \prod_{k=0}^{N-1} f_{q_k|A_k}(q_k|a_{i,k}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}^N\left(\mathbf{a}_i, \frac{N_0}{2}\right) \end{aligned}$$

- ▶ Gausiana N -dimensional de media \mathbf{a}_i y varianzas $\frac{N_0}{2}$

Decisor



- Estima la secuencia de símbolos transmitidos $B[n]$
 - ▶ Estima de esta secuencia símbolo a símbolo
 - ▶ En el instante discreto n :
 - ★ Se procesa la observación en n , i.e., $\mathbf{q}[n]$
 - ★ Se estima el símbolo transmitido en n , i.e., $\hat{B}[n]$
- Objetivo de diseño
 - ▶ Minimizar la probabilidad de error de símbolo P_e

Decisión para $P_e = P(\hat{B}[n] \neq B[n])$ mínima

Diseño del decisor - Regiones de decisión

- Alfabeto de M posibles valores

$$B[n] \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$$

- Forma de establecer la decisión para una observación $\mathbf{q}[n]$
 - ▶ División del dominio de $\mathbf{q}[n]$ en M regiones disjuntas
 - ★ Cada región I_k se asocia a un símbolo b_k
 - ★ Se decidirá $\hat{B}[n] = b_k$ cuando $\mathbf{q}[n] \in I_k$
 - ★ Por eso se denominan regiones de decisión
- Establecimiento de las regiones de decisión
 - ▶ Hay que hacer la división del dominio de $\mathbf{q}[n]$ para cumplir el criterio de diseño del decisor
 - ★ Minimización de la probabilidad de error de símbolo P_e

NOTA: Recuerde que hay una asociación unívoca $B[n] = b_i \leftrightarrow A[n] = a_i$

Desarrollo del decisor

- Desarrollo para el primer símbolo: $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}[0] \rightarrow \hat{B} \equiv \hat{B}[0]$
- Probabilidad de error para un caso concreto
 - ▶ Caso en que observando $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ se decide $\hat{B} = b_i$

$$\begin{aligned} P_e^{(\mathbf{q}=\mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B}=b_i)} &= P(B \neq b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) = 1 - P(B = b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) \\ &= 1 - p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) \end{aligned}$$

- ▶ Probabilidad condicional $p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) \equiv$ Probabilidad *a posteriori*
- Probabilidad de error para un decisor “tonto” (constante)
 - ▶ Decisión es siempre $\hat{B} = b_i$, para cualquier valor de \mathbf{q}
 - ▶ Promedio de la probabilidad de error cuando se decide $\hat{B} = b_i$, para todos los posibles valores de \mathbf{q}

$$\begin{aligned} P_e^{(\hat{B}=b_i, \forall \mathbf{q})} &= E_{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0)} \left[P_e^{(\mathbf{q}=\mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B}=b_i)} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0)] \cdot f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) \cdot f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|\mathbf{q}}(b_i | \mathbf{q}_0) \cdot f_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \end{aligned}$$

Desarrollo del decisor (II)

- Probabilidad de error usando REGIONES DE DECISIÓN

- ▶ División del dominio de q en M regiones disjuntas $\{I_k\}_{k=0}^{M-1}$
- ▶ Se decide $\hat{B} = b_i$ si la observación q cae en I_i
- ▶ Probabilidad de error:

$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \int_{I_i} p_{B|q}(b_i|q_0) \cdot f_q(q_0) dq_0$$

- Minimización de la probabilidad de error

- ▶ Se minimiza maximizando el segundo término (rojo)
- ▶ $f_q(q_0)$ es independiente del símbolo transmitido o decidido
- ▶ Para cada valor de q_0 sólo se puede variar la $p_{B|q}(b_i|q_0)$ que se suma eligiendo b_i entre uno de los M posibles valores de $\{b_k\}_{k=0}^{M-1}$
 - ★ Esto equivale a modificar la definición de $\{I_k\}_{k=0}^{M-1}$

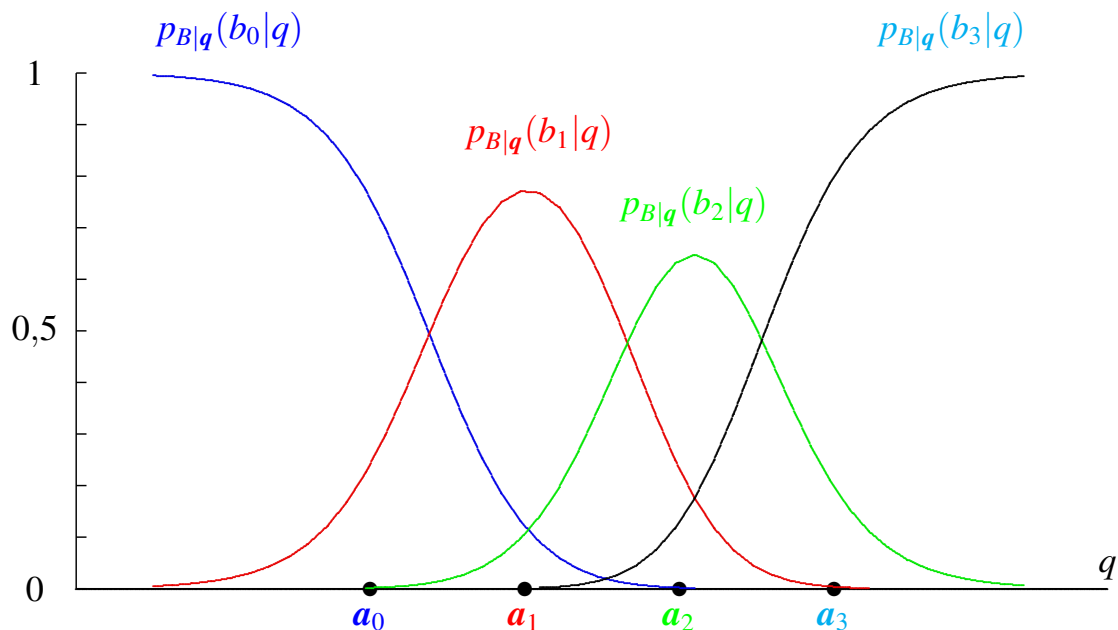
- Diseño de las regiones de decisión - CRITERIO MAXIMO A POSTERIORI

- ▶ Asignación de un valor del dominio de la observación $q = q_0$ a la región de decisión que maximiza la probabilidad a posteriori

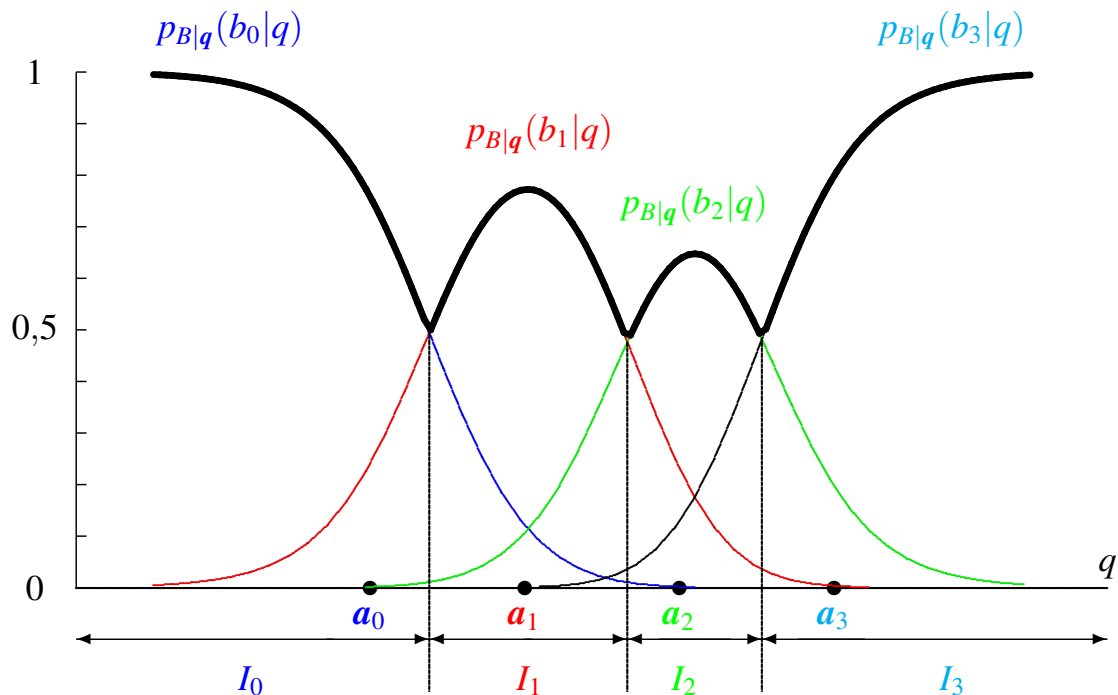
$$q_0 \in I_i \text{ si } p_{B|q}(b_i|q_0) > p_{B|q}(b_j|q_0), \quad \forall j \neq i$$

- ▶ En el caso: $p_{B|q}(b_i|q_0) = p_{B|q}(b_k|q_0) > p_{B|q}(b_j|q_0), \forall j \neq \{i, k\}$

Regiones de decisión para P_e mínima - Un ejemplo



Regiones de decisión para P_e mínima - Un ejemplo



Criterio Maximo A Posteriori (MAP) - Desarrollo

- Probabilidades a posteriori $p_{B|q}(b_i|q_0)$ - Regla de Bayes

$$p_{B|q}(b_j|q_0) = \frac{p_B(b_j) \cdot f_{q|B}(q_0|b_j)}{f_q(q_0)}$$

- ▶ Teniendo en cuenta que $B = b_j$ implica que $A = a_j$ y viceversa

$$f_{q|B}(q_0|b_j) \equiv f_{q|A}(q_0|a_j)$$

- Criterio MAXIMO A POSTERIORI (MAP): Se asigna q_0 a I_i si

$$\frac{p_B(b_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i)}{f_q(q_0)} > \frac{p_B(b_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j)}{f_q(q_0)} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i$$

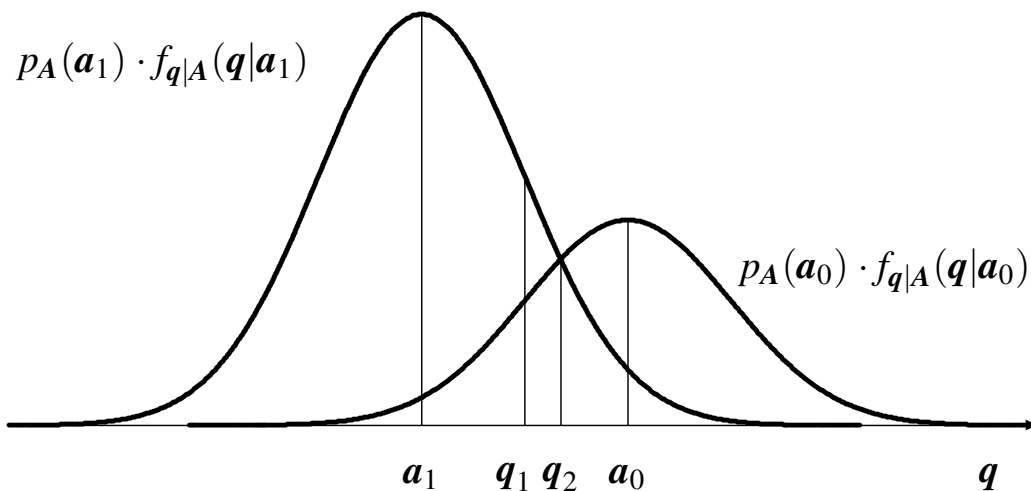
Como $f_q(q_0)$ es una cantidad no negativa

$$q_0 \in I_i \text{ si } \begin{cases} p_B(b_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i) > p_B(b_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j) \\ p_A(a_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i) > p_A(a_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j) \end{cases} \quad \forall j \neq i$$

Criterio MAP con $f_{q|A}(q_0|a_i)$ gaussianas

- Ejemplo:

- ▶ Caso binario ($M = 2$)
- ▶ $p_B(b_0) = p_A(a_0) = 1/3$ y $p_B(b_1) = p_A(a_1) = 2/3$



$$I_1 = (-\infty, q_2), \quad I_0 = [q_2, \infty)$$

$$p_B(b_0) < p_B(b_1) \text{ ó } p_A(a_0) < p_A(a_1) \Rightarrow d(q_2, a_0) < d(q_2, a_1)$$

Criterio de Máxima Verosimilitud

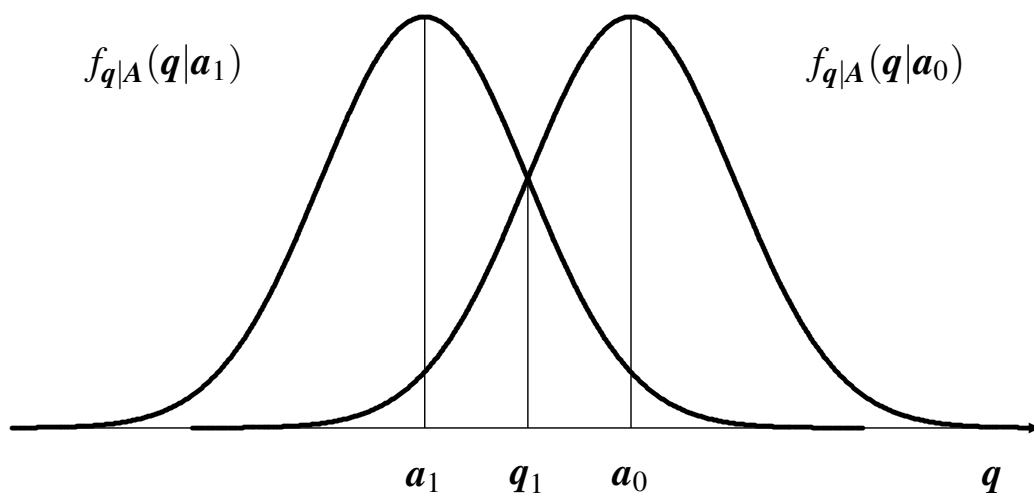
- Acrónimo ML (*Maximum Likelihood*)
- Se aplica cuando los símbolos son equiprobables

$$p_B(b_i) = p_A(a_i) = \frac{1}{M}, \quad \forall i$$

- En ese caso, q_0 se asigna a la región I_i si

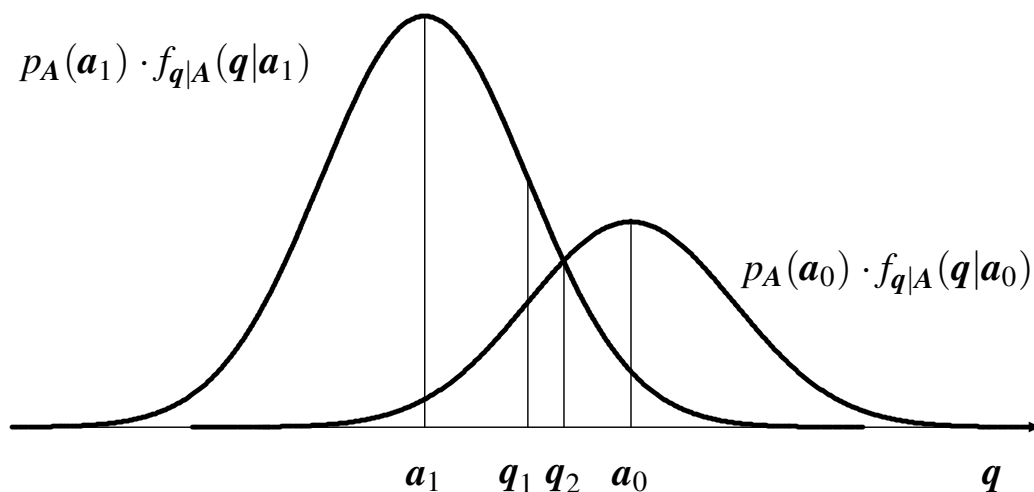
$$f_{q|A}(q_0|a_i) > f_{q|A}(q_0|a_j) \quad \forall j \neq i$$

Criterio ML (b_i equiprobables)



$$q_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}, \quad I_1 = (-\infty, q_1), \quad I_0 = [q_1, \infty)$$

Criterio MAP (b_i no equiprobables)



$$I_1 = (-\infty, q_2), \quad I_0 = [q_2, \infty)$$

$$p_B(b_0) < p_B(b_1) \text{ ó } p_A(a_0) < p_A(a_1) \Rightarrow d(q_2, a_0) < d(q_2, a_1)$$

Si los símbolos no son equiprobables se tiende a hacer mayor la región de decisión de los símbolos más probables

Caso $f_{q|A}(q|a_i)$ gaussiana y $p_B(b_i) = 1/M$

- Criterio ML: q_0 pertenece a I_i si

$$\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|q_0 - a_i\|^2}{N_0}} > \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|q_0 - a_j\|^2}{N_0}} \quad \forall j \neq i$$

$$e^{-\frac{\|q_0 - a_i\|^2}{N_0}} > e^{-\frac{\|q_0 - a_j\|^2}{N_0}} \quad \forall j \neq i$$

La exponencial es una función monótona creciente $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

$$-\frac{\|q_0 - a_i\|^2}{N_0} > -\frac{\|q_0 - a_j\|^2}{N_0} \quad \forall j \neq i$$

Multiplicando por N_0 y quitando el signo negativo

$$\|q_0 - a_i\|^2 < \|q_0 - a_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

Aplicando la definición de la norma de un vector

$$\|q_0 - a_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |q_{0,k} - a_{i,k}|^2 = |d(q_0, a_i)|^2$$

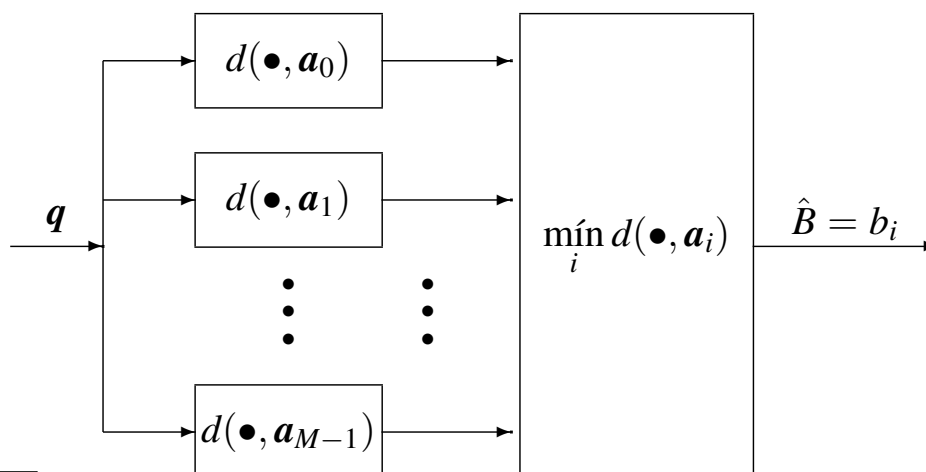
- ▶ Criterio de mínima distancia euclídea

$$q \in I_i \text{ si } d(q_0, a_i) < d(q_0, a_j), \quad \forall j \neq i$$

Decisor de Mínima Distancia

- Símbolos equiprobables
- Distribución $f_{q|A}(q|a_i)$ gaussiana (ruido gaussiano)

NOTA: En realidad, también se cumplirá para cualquier distribución simétrica respecto del origen (función par) y decreciente en el caso 1-D, ya que en ese caso dos distribuciones con distinta media “se cortarán” en el punto medio entre ambas medias, o para funciones de base radial decrecientes en el caso N -D



Cálculo de la probabilidad de error

- Cuando se transmite el símbolo $B = b_i$ (o $A = a_i$)
 - ▶ Distribución de la observación $f_{q|A}(q|a_i)$
 - ▶ Probabilidad de error condicional

$$P_{e|B=b_i} = P_{e|A=a_i} \equiv P_{e|a_i}$$

Si se transmite el símbolo $B = B_i$

- ★ Se produce un error cuando se decide $\hat{B} = b_j \neq b_i$
- ★ Esto ocurre cuando al transmitir a_i la observación $q \notin I_i$

$$P_{e|a_i} = \int_{q \notin I_i} f_{q|A}(q|a_i) dq$$

- Probabilidad de error total
 - ▶ Se promedian las probabilidades de error condicionales

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot P_{e|a_i}$$

- ★ Para símbolos equiprobables

$$p_A(a_i) = \frac{1}{M} \rightarrow P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|a_i}$$

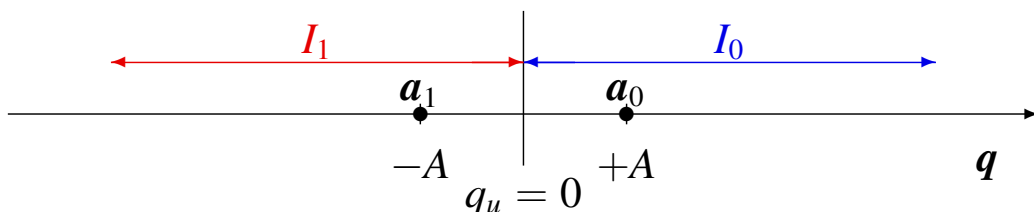
Ejemplo

- Caso unidimensional ($N = 1$) y binario ($M = 2$)
 - ▶ Constelación

$$a_0 = +A, a_1 = -A$$

- ▶ Símbolos equiprobables $p_A(a_0) = p_A(a_1) = \frac{1}{2}$
- ▶ Regiones de decisión

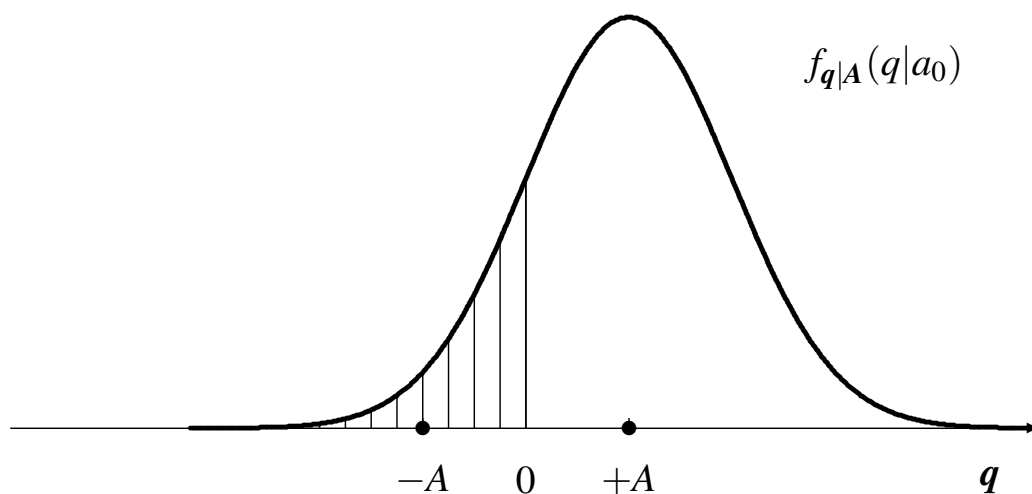
$$\text{Umbral } q_u = 0 \rightarrow I_0 = [0, \infty), I_1 = (-\infty, 0)$$



- Probabilidad de error

$$\begin{aligned} P_e &= p_A(a_0) \cdot P_{e|a_0} + p_A(a_1) \cdot P_{e|a_1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_{e|a_0} + \frac{1}{2} \cdot P_{e|a_1} \end{aligned}$$

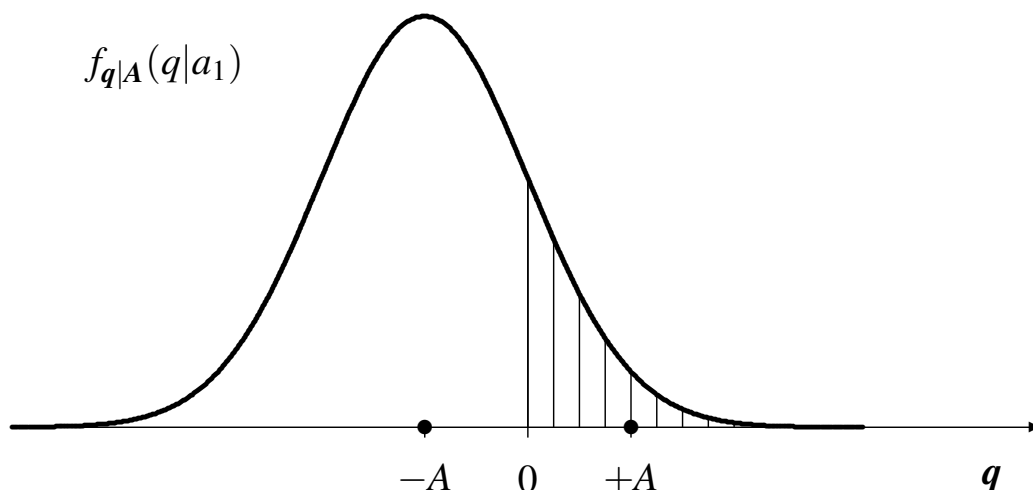
Probabilidad de error $B = b_0$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$ gaussiana de media $+A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error $B = b_1$

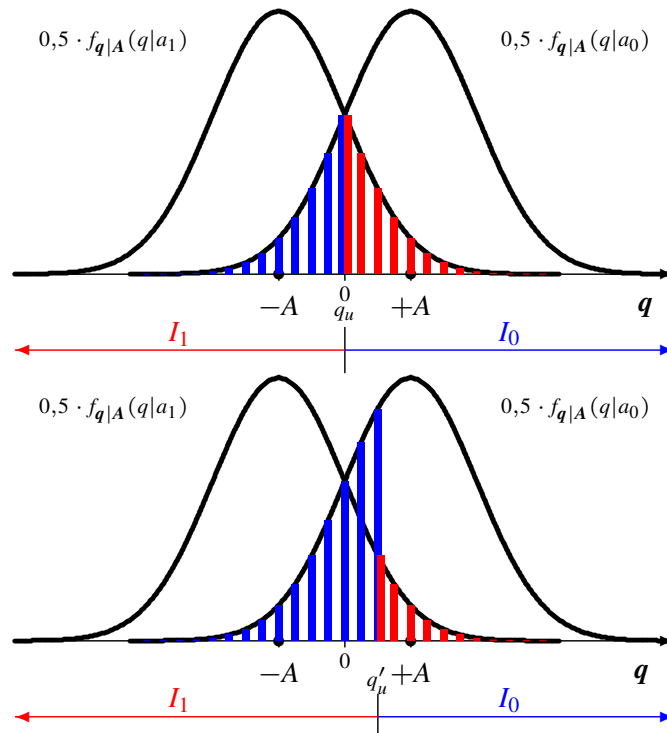


- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$ gaussiana de media $-A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error total - Interpretación gráfica

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|a_0} + \frac{1}{2}P_{e|a_1} = \frac{1}{2} \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq + \frac{1}{2} \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq$$



Resultado general caso 1-D binario equiprobable

- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$q_u = \frac{a_0 + a_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

$$d(a_0, q_u) = d(a_1, q_u) = \frac{d(a_0, a_1)}{2}$$

- Probabilidad de error

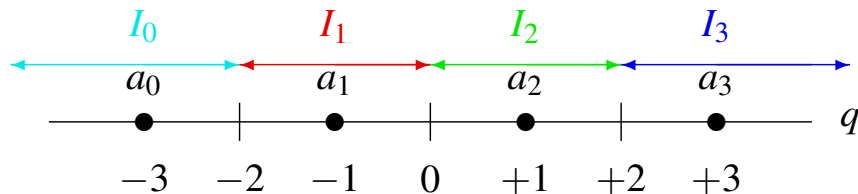
$$P_e = Q \left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

Espacio 1-D M -ario

● Ejemplo:

- ▶ $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4}$
- ▶ Constelación: $\mathbf{a}_0 = -3$, $\mathbf{a}_1 = -1$, $\mathbf{a}_2 = +1$, $\mathbf{a}_3 = +3$
- ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$

$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$



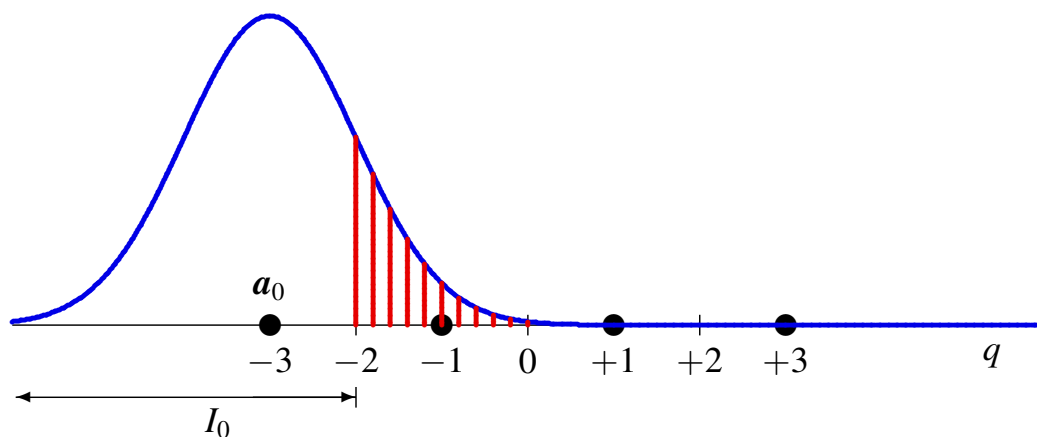
- ▶ Probabilidades de error condicionales

$$P_{e|a_0} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|a_1} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|a_2} = P_{e|a_1}, P_{e|a_3} = P_{e|a_0}$$

- ▶ Probabilidad de error total

$$P_e = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|a_i} = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

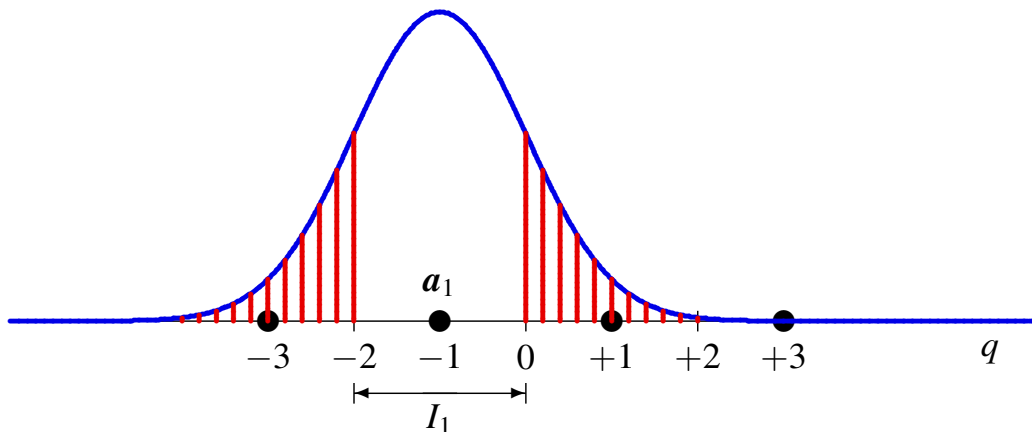
Cálculo $P_{e|a_0}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_0 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_0)$ fuera de I_0

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

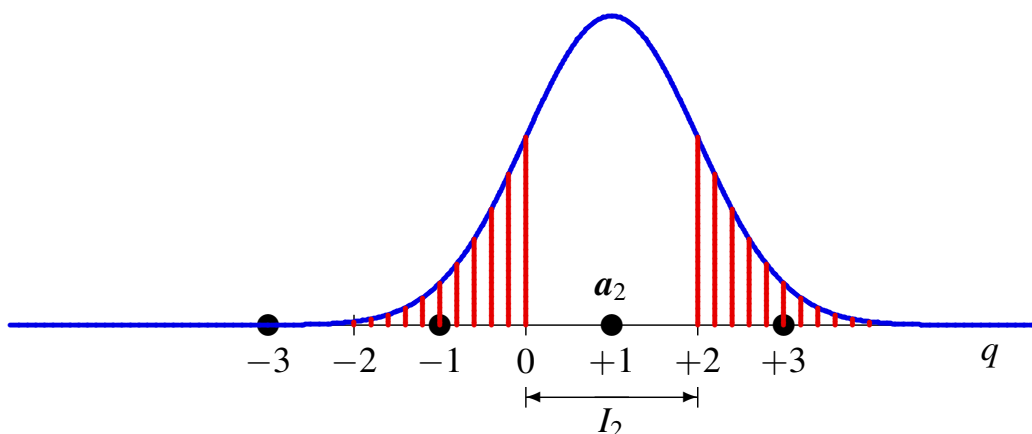
Cálculo $P_{e|a_1}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_1 = -1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_1)$ fuera de I_1

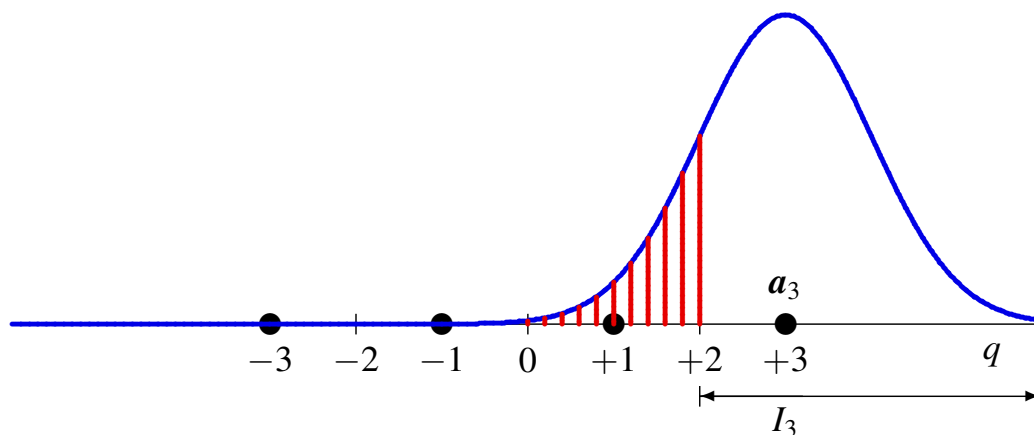
$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cálculo $P_{e|a_2}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_2 = +1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_2)$ fuera de I_2

$$P_{e|a_2} = \int_{q \notin I_2} f_{q|A}(q|a_2) dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_3 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_3)$ fuera de I_3

$$P_{e|a_3} = \int_{q \notin I_3} f_{q|A}(q|a_3) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

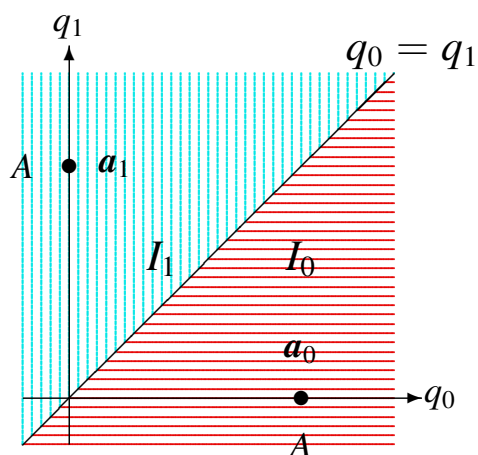
Ejemplo binario 2D

- Símbolos equiprobables $p_A(a_0) = p_A(a_1) = \frac{1}{2}$
- Constelación

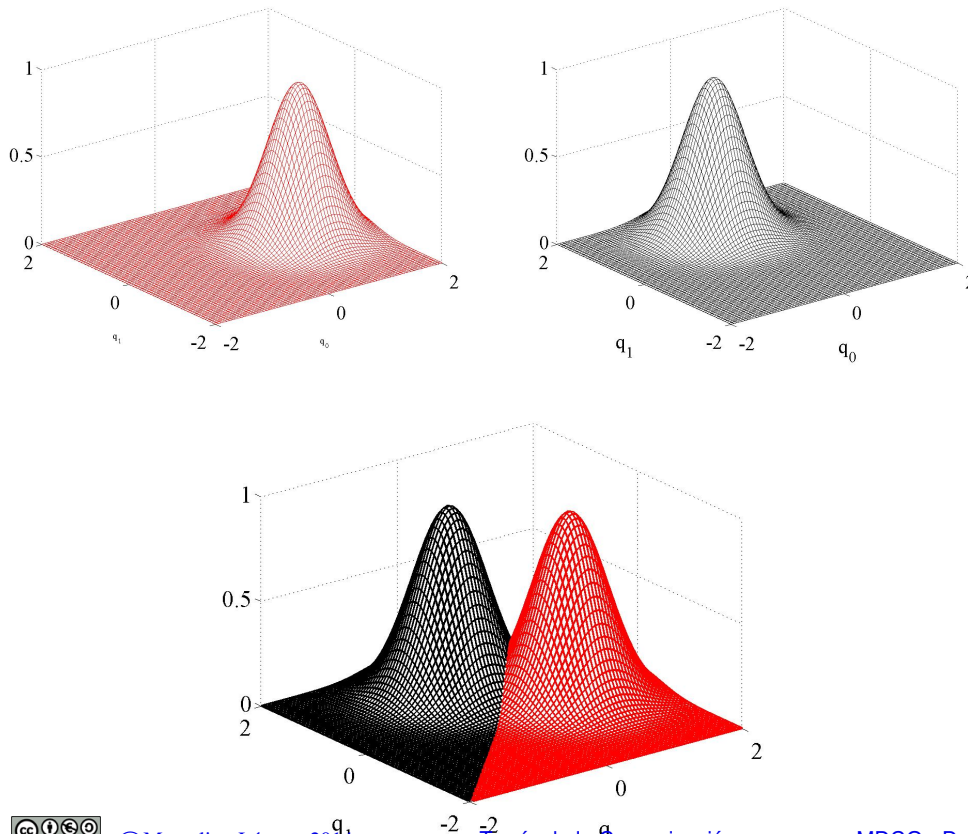
$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Regiones de decisión: frontera $q_0 = q_1$

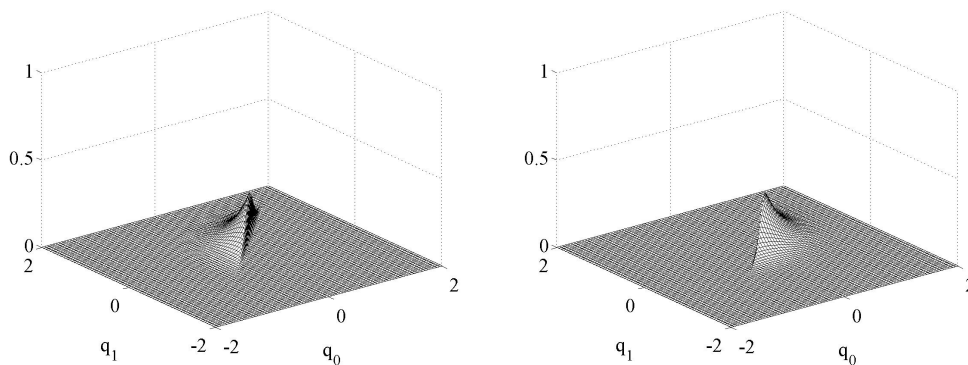
$$I_0 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 \geq q_1 \right\} \quad I_1 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 < q_1 \right\}$$



Distribuciones $f_{q|A}(q|a_0), f_{q|A}(q|a_1)$ ($A = 1$)



Cálculo de las probabilidades de error

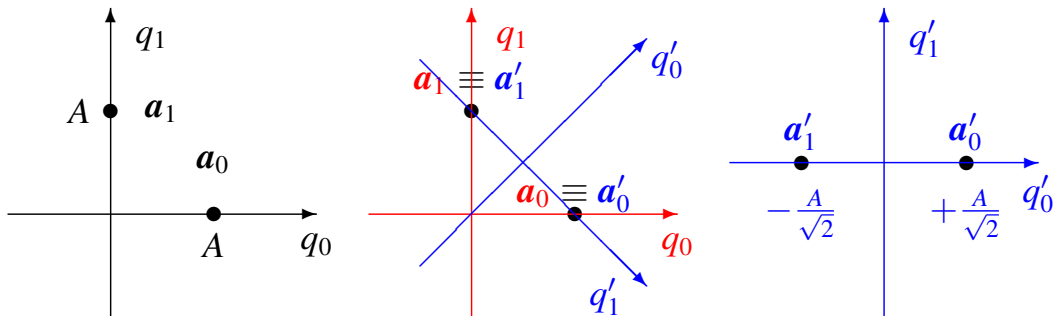


- Hay que integrar las distribuciones condicionales para a_0 y para a_1 fuera de sus regiones de decisión
- Integrales de gaussianas en 2D en un semiplano
 - ▶ No existen expresiones analíticas ni tablas numéricas

Cambio de sistema de coordenadas

- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - ▶ Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$



- ▶ El valor de la segunda coordenada es nulo para ambos símbolos

Cambio de sistema de coordenadas

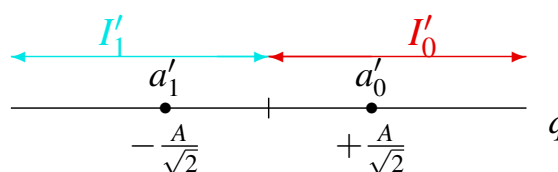
- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - ▶ Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$

- ▶ Nueva constelación (se mantiene la distancia)

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ★ Se puede eliminar la segunda coordenada : Espacio 1D!!!



Desarrollo formal del cambio de coordenadas

- Transformación para el cambio de coordenadas

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$

- Si el símbolo transmitido es a_0 , entonces $q_0 = a_{0,0} + z_0$, $q_1 = a_{0,1} + z_1$
Lo que implica que q'_0 y q'_1 toman la forma

$$q'_0|_{A=a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) - (a_{0,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) - (0 + z_1)) = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{0,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{A=a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) + (a_{0,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) + (0 + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

- Si el símbolo transmitido es a_1 entonces $q_0 = a_{1,0} + z_0$, $q_1 = a_{1,1} + z_1$
Lo que implica que q'_0 y q'_1 toman la forma

$$q'_0|_{A=a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) - (a_{1,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) - (A + z_1)) = \underbrace{-\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{1,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{A=a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) + (a_{1,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) + (A + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

Desarrollo formal del cambio de coordenadas (II)

- Coordenadas de la nueva constelación

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ No hay término de señal en la segunda coordenada

- Términos de ruido

- ▶ Términos z'_0 y z'_1 proporcionales a $z_0 - z_1$ y a $z_0 + z_1$, respectivamente
- ▶ Son independientes (gaussianos e incorrelados)

$$\text{Cov}(z_0 - z_1, z_0 + z_1) = E[(z_0 - z_1)(z_0 + z_1)] = E[z_0^2 - z_1^2] = \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{2} = 0$$

- ★ Se puede descartar la segunda coordenada (no hay señal y el término de ruido z'_1 es independiente de z'_0)
- ▶ Estadísticos z'_0

$$E[z'_0] = E\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_0] \pm \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_1] = 0$$

$$\text{Var}(z'_0) = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right)^2\right] = \frac{1}{2}E[z_0^2] + \frac{1}{2}E[z_1^2] - E[z_0z_1] = \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} - 0 = \frac{N_0}{2}$$

Resultado general caso binario equiprobable

- Siempre es posible encontrar un cambio de coordenadas con uno de los ejes pasando por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Lo relevante es la distancia entre los puntos
- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión para símbolos equiprobables
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$\mathbf{q}_u = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

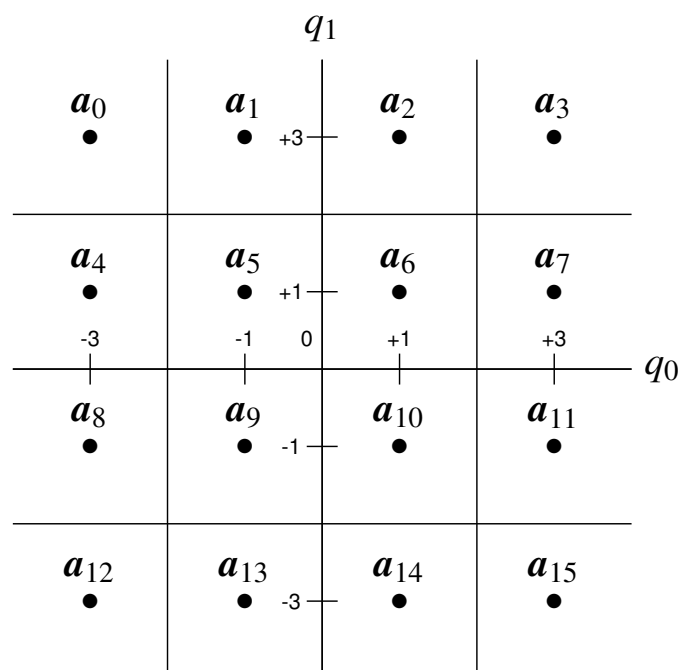
$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{q}_u) = d(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_u) = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2}$$

- Probabilidad de error

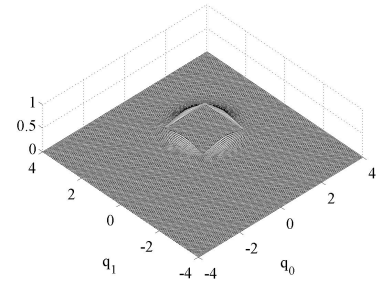
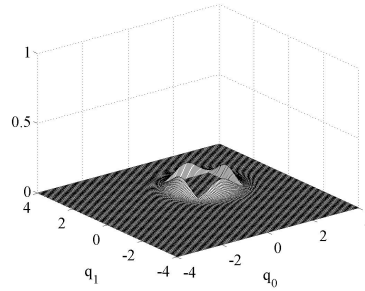
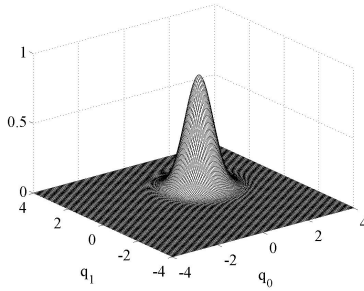
$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional

- Ejemplo: constelación de 16 símbolos con regiones formando una retícula alineada con los ejes q_0 y q_1



Cálculo de la probabilidad de error para a_6



- Coordenadas del símbolo: $\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$

▶ Distribución $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6)$: gaussiana 2D en \mathbf{a}_6 ($\sigma^2 = N_0/2$)

$$f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6) = \mathcal{N}^2\left(\mathbf{a}_6, \frac{N_0}{2}\right) = \mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Cálculo de la probabilidad de error condicional $P_{e|a_6}$
 - ▶ Región de decisión - Cuadrado $0 \leq q_0 < 2$ y $0 \leq q_1 < 2$
 - ★ No hay expresiones analíticas para calcular directamente la integral de una gaussiana fuera de este cuadrado

Espacio 2D - Regiones de decisión forman una rejilla

- En este caso las regiones de decisión se pueden describir mediante dos condiciones independientes sobre q_0 y sobre q_1 que han de cumplirse de forma simultánea

▶ Ejemplos

$$I_6 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 0 \leq q_1 < 2$$

$$I_2 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 2 \leq q_1 < \infty$$

▶ Se puede descomponer el problema 2D en 2 problemas 1D acoplados

$$P_{e|a_i} = 1 - P_{a|a_i} = 1 - P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}} = 1 - [(1 - P_{e|a_{i,0}}) (1 - P_{e|a_{i,1}})]$$

- ★ La probabilidad de acierto $P_{a|a_i}$ se puede escribir como el producto de la probabilidad de acertar en cada una de las dos direcciones del espacio $P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}}$
- ★ La probabilidad de acierto en una de las direcciones del espacio ($P_{a|a_{i,0}}$ ó $P_{a|a_{i,1}}$) se puede escribir como 1 menos la probabilidad de error en esa dirección ($P_{e|a_{i,0}}$ ó $P_{e|a_{i,1}}$)

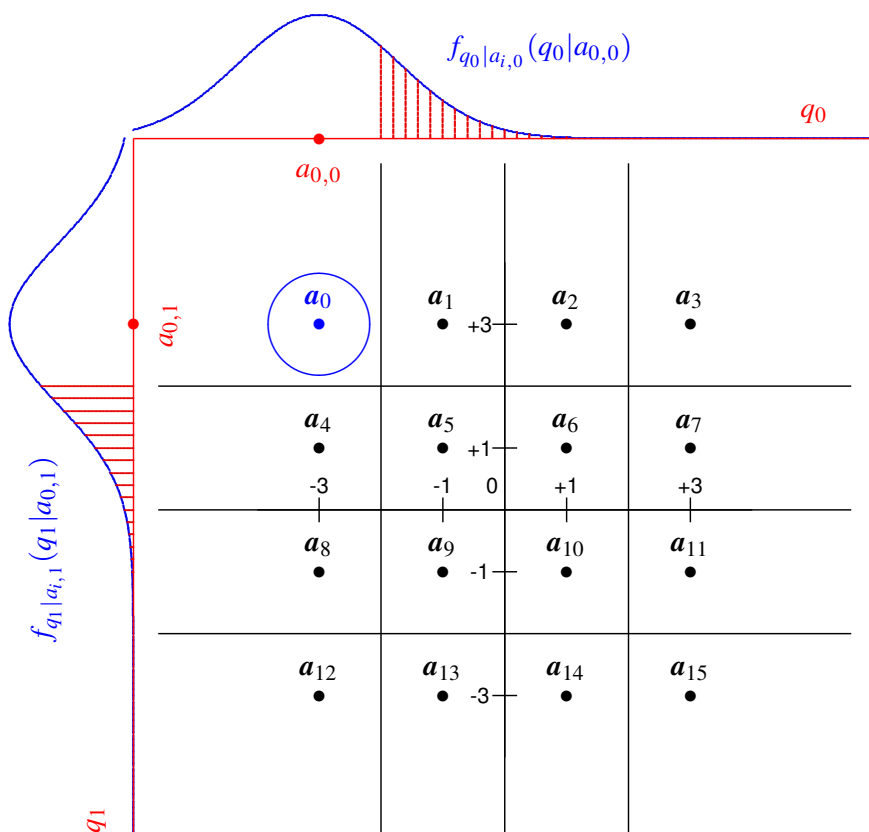
Tres tipos de regiones de decisión

- Tipo 1: $\{I_0, I_3, I_{12}, I_{15}\}$
 - ▶ Una única frontera de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 2: $\{I_5, I_6, I_9, I_{10}\}$
 - ▶ Dos fronteras de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 3: $\{I_1, I_2, I_4, I_7, I_8, I_{11}, I_{13}, I_{14}\}$
 - ▶ Una frontera en una de las direcciones del espacio
 - ▶ Dos fronteras en la otra dirección
- Cálculo de la probabilidad de error para símbolos equiprobables
 - ▶ Todos los símbolos de un mismo tipo tienen la misma probabilidad de error condicional
 - ★ Ejemplos de cada tipo: a_0 (Tipo 1), a_5 (Tipo 2), a_7 (Tipo 3)

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot P_{e|a_i} = 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_0} + 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_5} + 8 \times \frac{1}{16} P_{e|a_7}$$

$$= 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{9}{4}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)



Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,0} = -3$
 - ▶ Región de decisión : $-\infty < q_0 < -2$

$$P_{a|a_{0,0}} = 1 - P_{e|a_{0,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

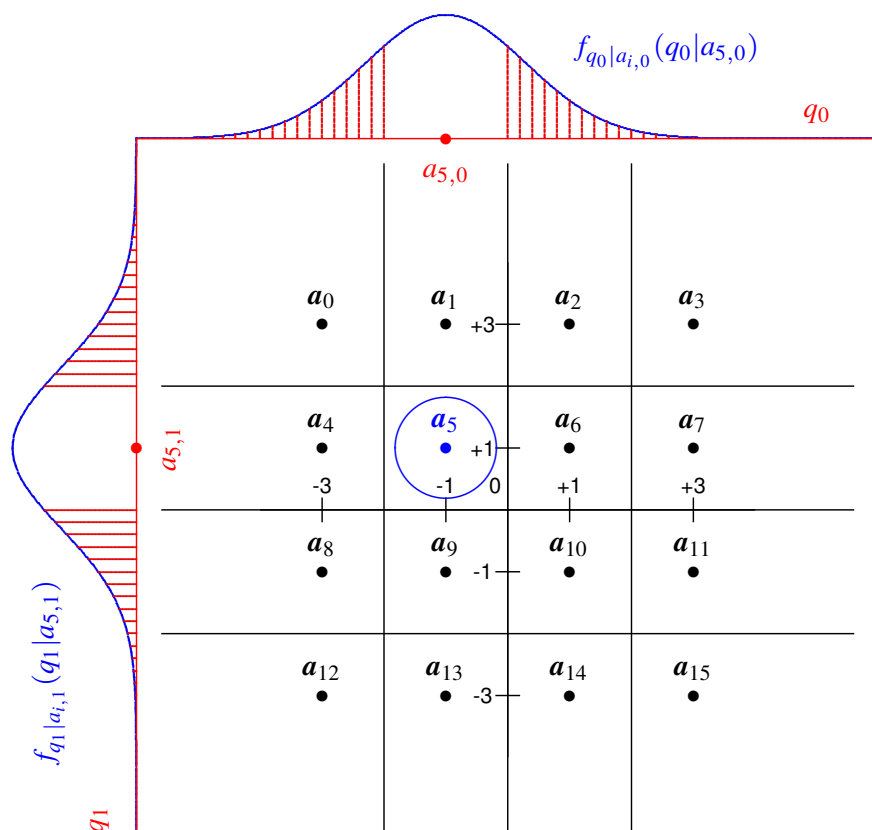
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,1} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_1 < +\infty$

$$P_{a|a_{0,1}} = 1 - P_{e|a_{0,1}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_0} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 2 (ejemplo a_5)



Regiones de Tipo 2 (ejemplo a_5)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,0} = -1$
 - ▶ Región de decisión : $-2 \leq q_0 < 0$

$$P_{a|a_{5,0}} = 1 - P_{e|a_{5,0}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

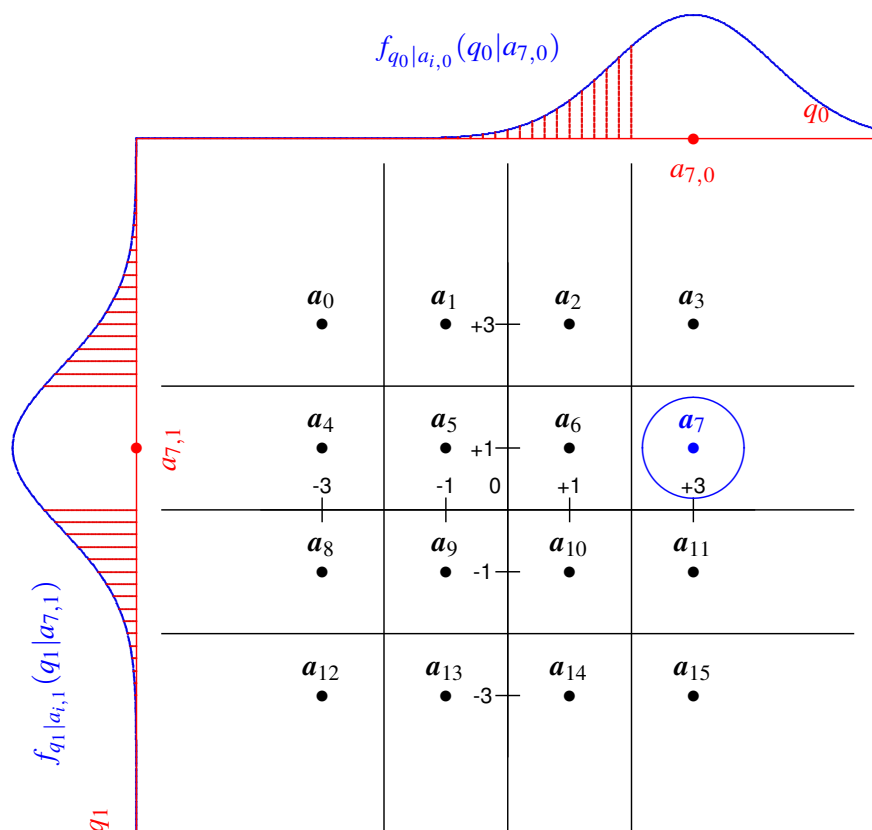
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{5,1}} = 1 - P_{e|a_{5,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_5} = 1 - \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)



Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,0} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_0 < +\infty$

$$P_{a|a_{7,0}} = 1 - P_{e|a_{7,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

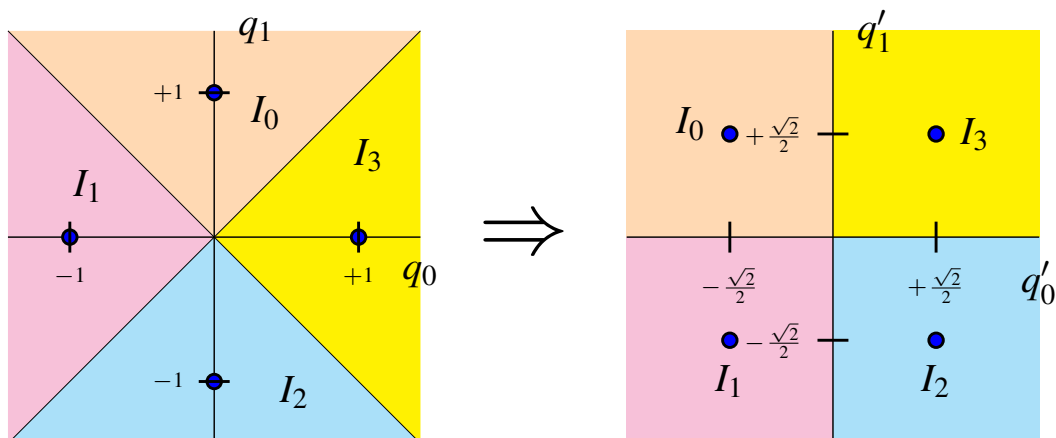
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{7,1}} = 1 - P_{e|a_{7,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

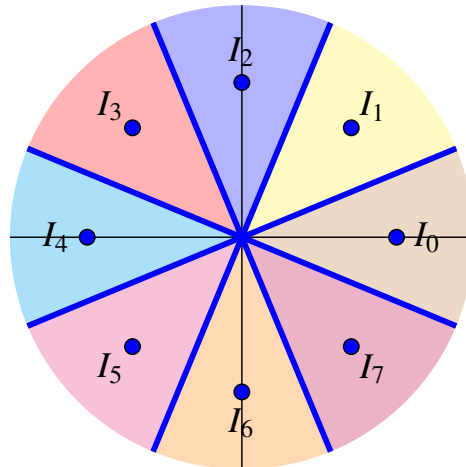
$$P_{e|a_7} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] \cdot \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] = 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional (II)



- Las regiones de decisión forman una rejilla, pero no alineada con las direcciones del espacio
 - ▶ Es posible hacer un cambio de coordenadas para girar 45° la constelación de forma que las regiones de decisión estén alineadas con los nuevos ejes
 - ★ Es posible calcular la probabilidad de error en ese caso

Decisor M -ario en espacio multidimensional (III)



- Las regiones de decisión no forman una rejilla
 - ▶ No es posible calcular de forma analítica la probabilidad de error, ni hacer transformaciones sencillas que lo permitan
 - ★ Se pueden calcular de forma exacta mediante cálculo numérico (ordenadores)
 - ★ Se puede recurrir a aproximaciones o cotas analíticas

Aproximaciones de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o resulta complicado calcular la probabilidad de error exacta
- Aproximación de la probabilidad de error
 - ▶ La probabilidad de error entre símbolos depende de la distancia ente los mismos
 - ★ Lo más probable, en caso de error, es decidir de forma errónea un símbolo que está a mínima distancia del transmitido
 - ▶ Aproximación más utilizada
 - ★ Se asume que sólo se cometerán errores con símbolos que están a mínima distancia

$$P_e \approx k \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación
- ★ k : máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo de la constelación

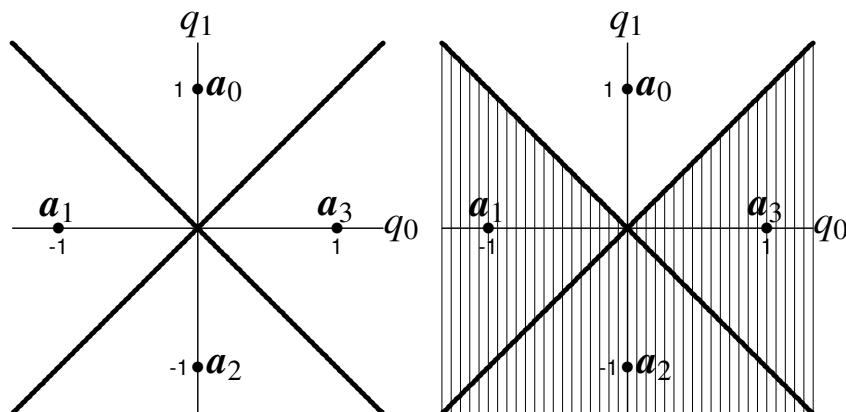
Cotas de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o es complicado calcular la probabilidad de error exacta, y se quiere asegurar una prestación mínima (probabilidad de error máxima)
- Se obtiene una expresión que acota superiormente la probabilidad de error

$$P_e \leq \text{Cota}$$

- Cotas utilizadas con mayor frecuencia
 - ▶ Cota de la unión
 - ★ Acota la probabilidad de error de forma ajustada
 - La probabilidad de error no es lejana al valor de la cota
 - ★ Su cálculo se complica para constelaciones con muchos símbolos
 - ▶ Cota holgada
 - ★ Cota menos ajustada pero más fácil de calcular

Cota de la unión - Ejemplo



- Se va a tratar de acotar la probabilidad de error para esta constelación
- Probabilidad de error condicional $P_{e|a_0}$
 - ▶ Hay que integrar $f_{q|A}(q|a_0)$ fuera de I_0
 - ★ $f_{q|A}(q|a_0)$ es una gaussiana 2D centrada en a_0
 - ★ Integración de $f_{q|A}(q|a_0)$ en la zona rallada de la figura

Cota de la unión - Interpretación gráfica

- Probabilidades de error si sólo estuvieran \mathbf{a}_0 y otro símbolo \mathbf{a}_i

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{2}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3) = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_3)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

- ▶ Corresponden a integrales de la gaussiana centrada en \mathbf{a}_0 en los semiplanos de la figura de la siguiente diapositiva

★ Sumadas, forman una cota de la probabilidad de error

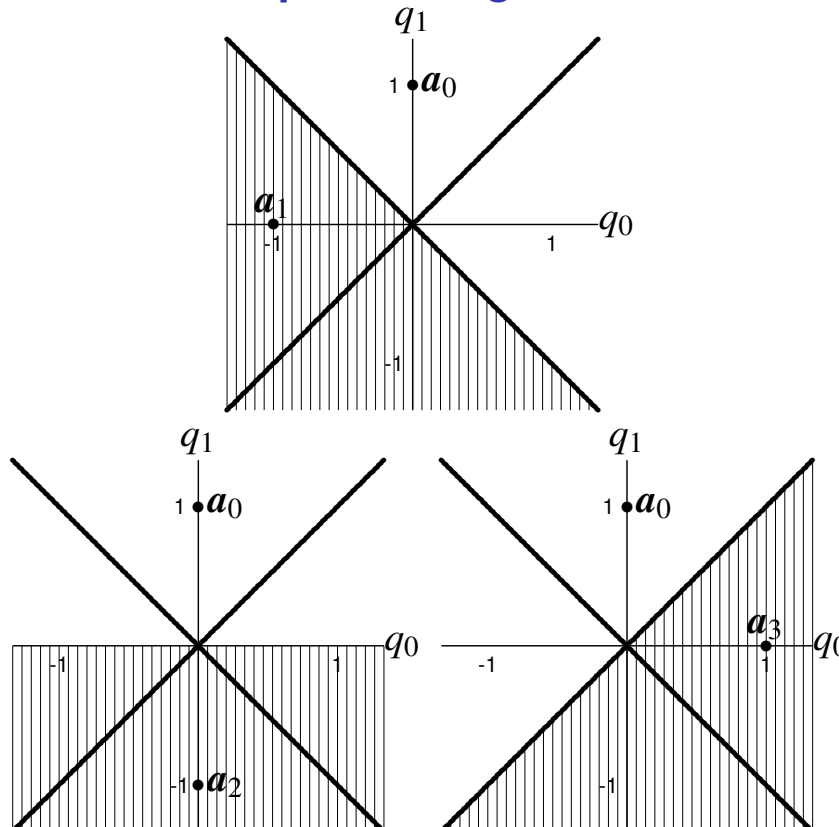
- Cota para la probabilidad de error condicional

$$P_{e|\mathbf{a}_0} \leq \sum_{j=1}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_j) \rightarrow \text{En general } P_{e|\mathbf{a}_i} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$$

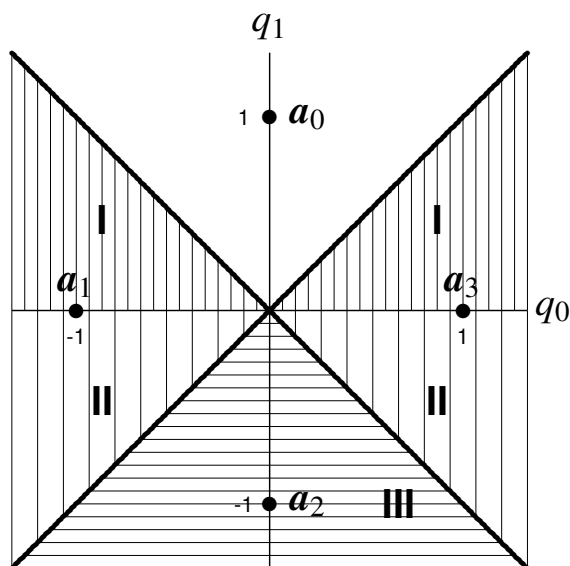
- Cota de la unión

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cota de la unión - Interpretación gráfica

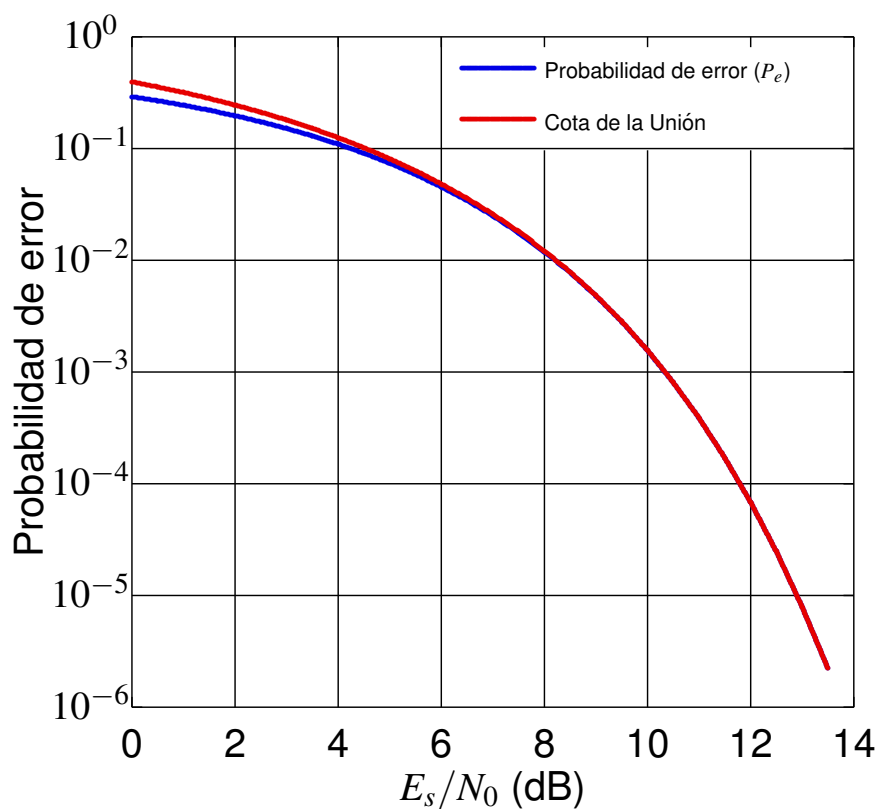


Cota de la Unión - Límite Superior



- La suma de los tres términos integra la gaussina en toda la región deseada
 - ▶ Una única vez en las zonas marcadas con **I**
 - ▶ Dos veces en las zonas marcadas con **II**
 - ▶ Tres veces en la zona marcada con **III**

Cota de la Unión - Prestaciones



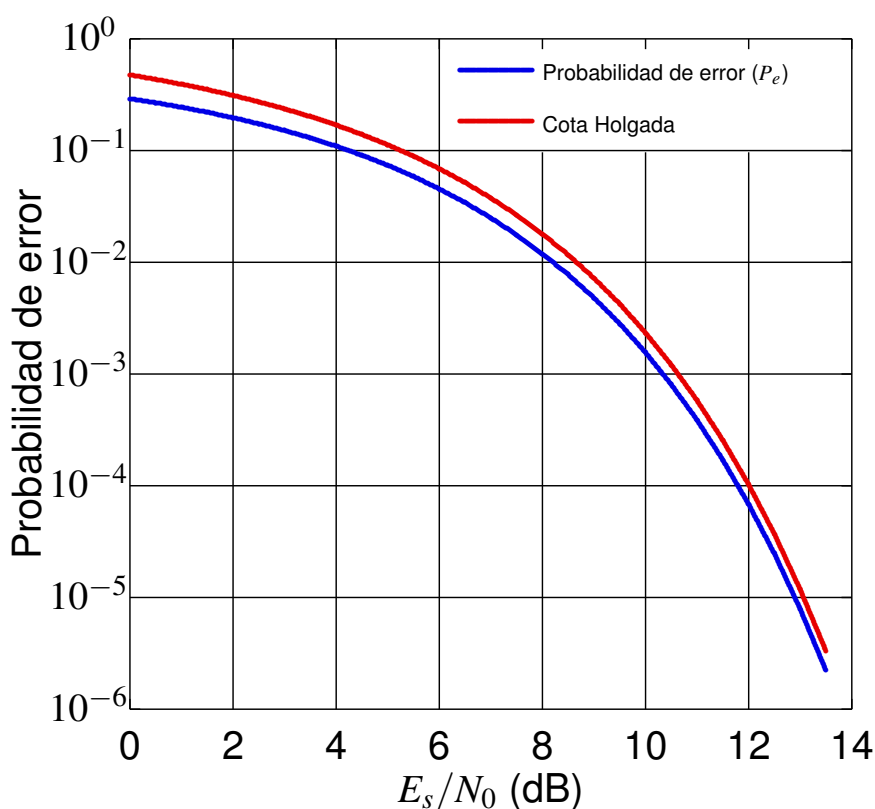
Cota holgada

- La cota de la unión requiere computar las distancias entre cada par de símbolos y evaluar la función $Q(x)$ para cada término
 - ▶ Número de distancias mínimo (incluso considerando la simetría $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)$) es $N_{distancias} = \sum_{k=1}^{M-1} k$
 - ★ $M = 4$ significa $N_{distancias} = 6$
 - ★ $M = 8$ significa $N_{distancias} = 28$
 - ★ $M = 16$ significa $N_{distancias} = 120$
 - ★ $M = 64$ significa $N_{distancias} = 2016$
- Cota holgada
 - ▶ Se asume que todos los símbolos están a d_{min} de los $M - 1$ símbolos restantes y se usa la cota de la unión para este caso

$$P_e \leq (M - 1) \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ★ Como siempre habrá símbolos a distancias mayores, esta expresión es una cota para la cota de la unión, y por tanto, es una cota para la probabilidad de error

Cota Holgada - Prestaciones



Expresiones de P_e en función de E_s/N_0

- Las prestaciones se representan a menudo como una función de la relación E_s/N_0
- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

$$Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \text{ ó } Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden reescribir como

$$Q\left(v \cdot \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ donde } Q\left(\underbrace{\frac{d_{min}}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ ó } Q\left(\underbrace{\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ Factor v : valor constante, que depende de la constelación
 - ★ Cuanto más alto es v , más eficiente es la constelación

Ejemplos - Constelaciones binarias equiprobables

- En este caso, para cualquier dimensión N

$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Se compararán dos casos

- ▶ Caso (a): Constelación binaria simétrica ($N = 1$)

$$\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$$

- ▶ Caso (b): Constelación ortogonal ($N = 2$)

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Cálculo de distancias y energías

- ▶ Caso (a): $E_s = A^2$, $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = 2 \cdot A$
- ▶ Caso (b): $E_s = A^2$, $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{2} \cdot A$

- Cálculo del factor de eficiencia v

- ▶ Caso (a):

$$v = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = \sqrt{2} \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ Caso (b):

$$v = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = 1 \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Codificador

- Convierte la secuencia de símbolos $B[n]$, (obtenida a partir de la secuencia de bits $B_b[\ell]$), en una secuencia de vectores con la representación discreta de las señales, $A[n]$

- ▶ Posible valores de $A[n]$: Constelación: $\{a_i\}_{i=0}^{M-1}$, $a_i \in \mathbb{R}^N$
- ▶ $M = 2^m$ símbolos - $m = \log_2 M$ bits por símbolo
- ▶ Tasa binaria: R_b - Tasa de símbolo: R_s

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s} - R_s = \frac{1}{T} \text{ symbols/s (bauds)} - R_b = m \cdot R_s$$

- Restricciones en el diseño de la constelación: P_e , BER , E_s
 - ▶ Prestaciones: distancia entre símbolos (distancia mínima)
 - ▶ Energía por símbolo: norma al cuadrado

$$d(a_i, a_j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k} - a_{j,k}|^2}, \quad d_{min} = \min_{i \neq j} d(a_i, a_j), \quad \mathcal{E}\{a_i\} = \|a_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k}|^2$$

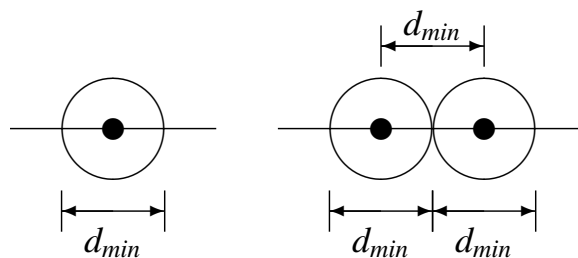
- ▶ Compromiso: garantizar una mínima distancia, con los símbolos lo más cercanos posibles al origen de coordenadas
 - ★ Media de la constelación nula: $E[a_i] = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$

Codificador - Empaquetado de esferas

- El compromiso entre distancia y energía se puede entender como un problema de empaquetado de esferas de un diámetro constante
 - ▶ Garantizar unas prestaciones mínimas equivale a garantizar una distancia mínima

$$P_e \approx k \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ▶ Símbolo: esfera centrada en a_i con diámetro d_{min}
 - ★ Dos esferas en contacto están a distancia d_{min}



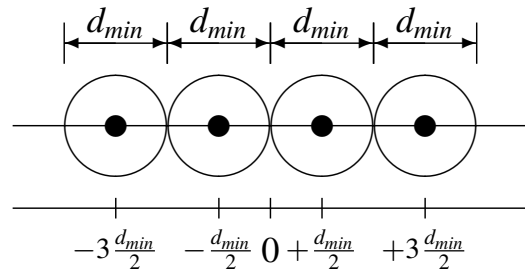
- ▶ El problema de diseño se puede plantear como
 - ★ Colocar M esferas de diámetro d_{min} en el menor espacio posible (espacio N -D) y centradas en el origen (media nula)

Empaquetado de esferas

- Diseño en espacio 1-D

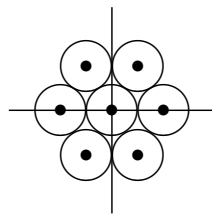
- ▶ M puntos equiespaciados en una recta - Coordenadas

$$\left\{ \pm \frac{d_{min}}{2}, \pm 3 \cdot \frac{d_{min}}{2}, \dots, \pm (M-1) \cdot \frac{d_{min}}{2} \right\}$$

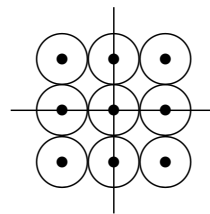


- Diseño en espacio 2-D

- ▶ Se forman círculos a partir de una esfera central
- ▶ Se recolocan para que la media sea nula

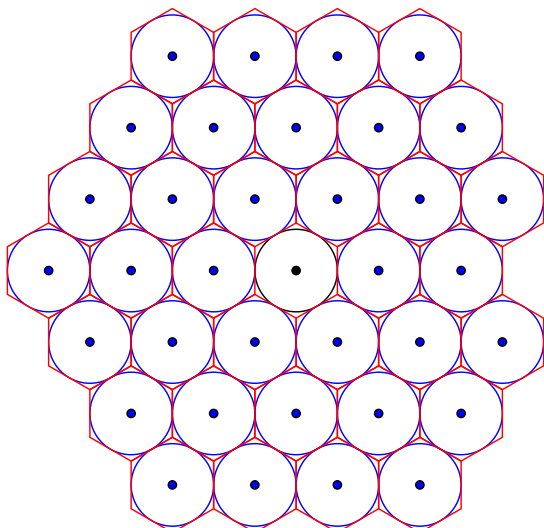


Espacio 2D - Sí

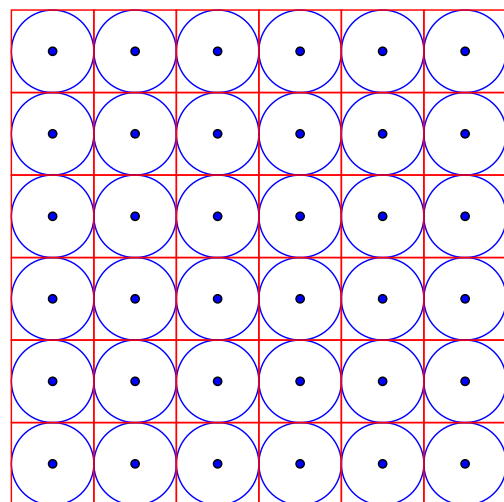


Espacio 2D - NO

Constelaciones Hexagonales vs. Reticulares



Empaquetado 2D - Sí



Empaquetado 2D - No

Comparación de empaquetado de 36 esferas

Constelación equivalente con media nula

- La probabilidad de error depende de las posiciones relativas entre símbolos
 - ▶ Estas posiciones relativas definen las distancias $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$
- Para unas distancias dadas, la mínima E_s se obtiene si la constelación tiene media nula
- Transformación en constelación equivalente con media nula
 - ▶ Cálculo de la media de la constelación

$$E[\mathbf{a}_i] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_i$$

- ★ Vector N dimensional (un valor por cada coordenada de \mathbf{a}_i)
- ▶ Se le resta a cada símbolo de la constelación inicial esta media

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$$

- ★ La media de la nueva constelación es nula

$$E[\mathbf{a}'_i] = \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{p_{A'}(\mathbf{a}'_i)}_{p_A(\mathbf{a}_i)} \cdot \mathbf{a}'_i = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$$

Constelación equivalente con media nula - Ejemplo

- Constelación con $M = 4$ símbolos, $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4} \forall i$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

$$E_s = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + 2^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + 2^2 \right] = \frac{13}{4} = 3,25$$

- Media de la constelación

$$E[\mathbf{a}_i] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +1 \end{bmatrix}$$

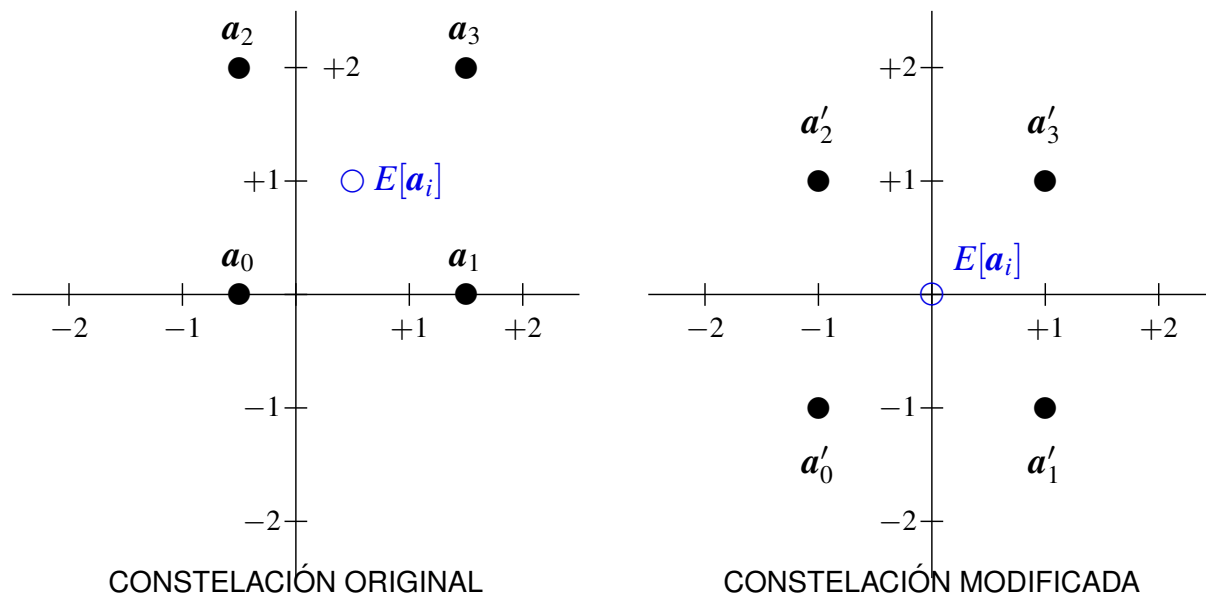
- Constelación modificada: $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$

$$\mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}_0 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

$$E'_s = \frac{1}{4} \cdot \left[(-1)^2 + (-1)^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[(+1)^2 + (-1)^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[(-1)^2 + (+1)^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[(+1)^2 + (+1)^2 \right] = 2$$

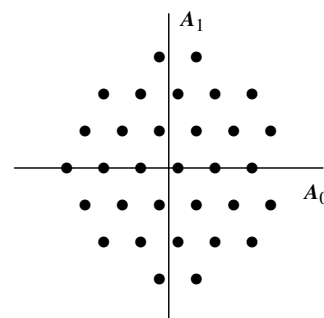
Constelación equivalente con media nula - Ejemplo (II)



Diseño del codificador

● Empaquetado de esferas

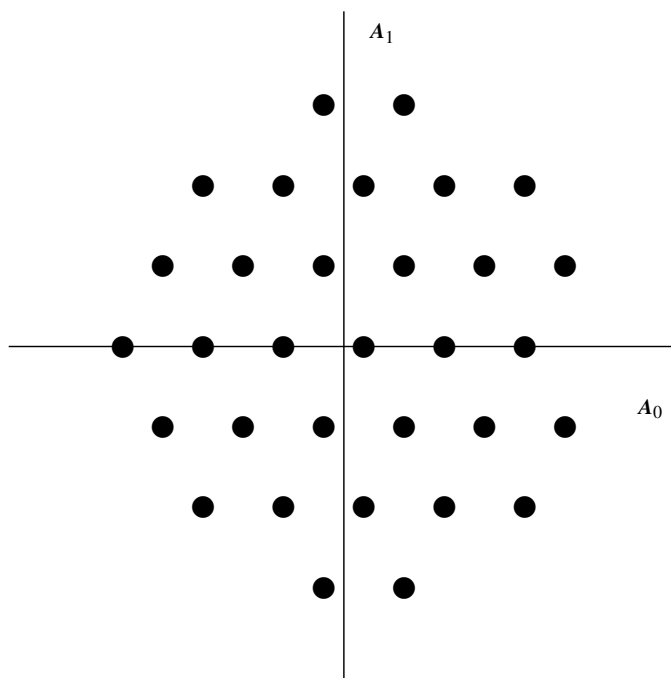
- ▶ Óptimo: mínima P_e para una E_s dada
- ▶ Constelaciones hexagonales
- ▶ Regiones de decisión hexagonales



● Consideraciones prácticas

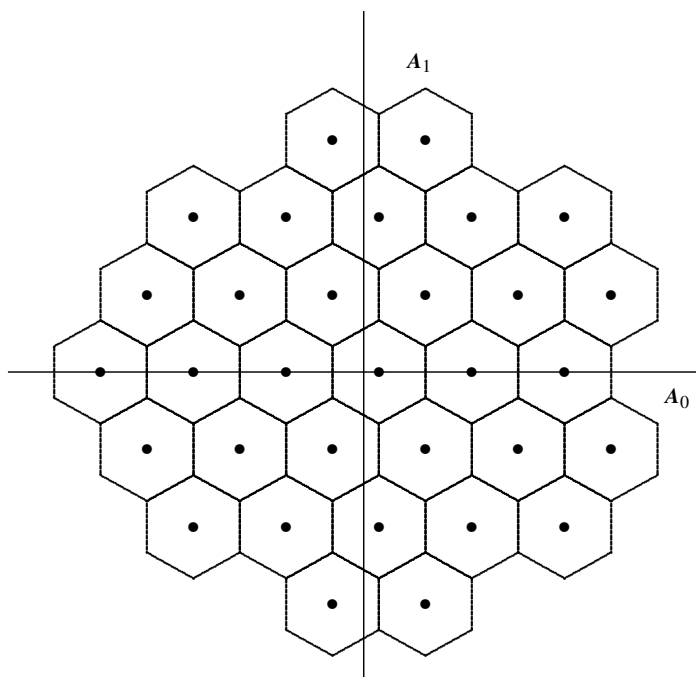
- ▶ Simplicidad de implementación del transmisor
 - ▶ Limitación de la energía de pico
 - ▶ Relación potencia de pico / potencia media
 - ▶ Simplicity of the receiver - Regiones de decisión
- ⇒ Otras constelaciones: QAM, PSK, unipolar, ortogonal, ...

Constelaciones Hexagonales



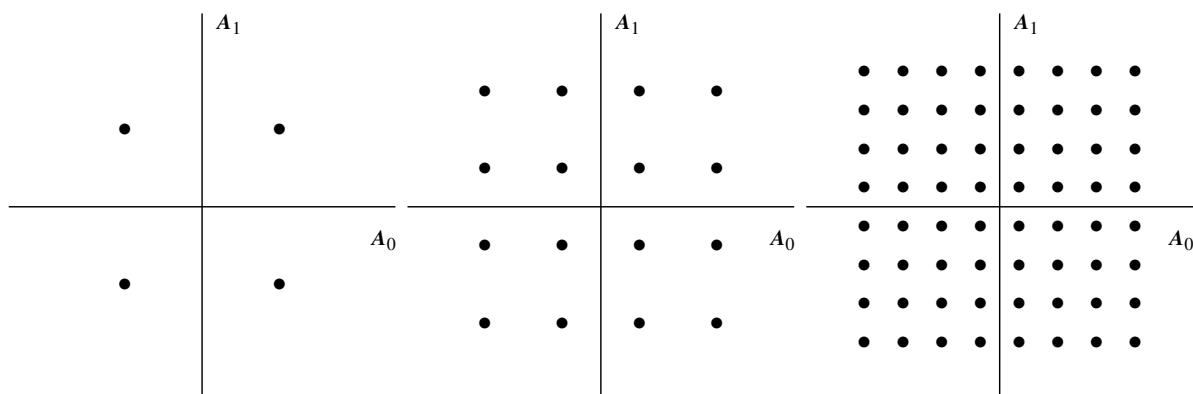
Constelación Hexagonal de 32 símbolos

Constelaciones Hexagonales - Regiones de decisión



Constelación Hexagonal de 32 símbolos

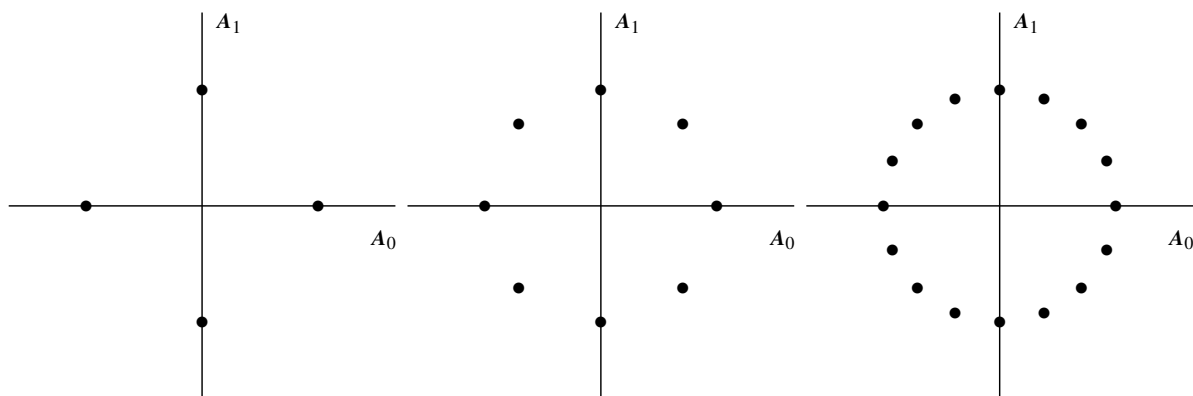
Constelaciones QAM



Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM

- Puntos en una retícula
 - ▶ Facilidad de implementación de transmisor / receptor
 - ★ Generación / procesado de forma independiente para cada coordenada

Constelaciones PSK



Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

- Puntos en un círculo de radio constante
 - ▶ Energía constante para todos los símbolos

Asignación binaria

- Asignación binaria - Conversión $B_b[\ell] \rightarrow B[n]$
 - ▶ m bits se transmiten en cada símbolo b_i (a_i)
 - ▶ $M = 2^m$ símbolos $\rightarrow m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Objetivo de la asignación binaria (valores de los m bits) a cada símbolo
 - ▶ Minimización de la probabilidad de error de bit (BER)
- Técnica de asignación binaria óptima
 - ▶ Codificación de Gray

Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- BER: *Bit Error Rate*
- Se promedia la BER condicional para a_i

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot BER_{a_i}$$

- Cálculo de las BER condicionales

$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \rightarrow a_j} \cdot \frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$$

- ▶ $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$: probabilidad de transmitiendo $A = a_i$, decidir $\hat{A} = a_j$

$$P_{e|a_i \rightarrow a_j} = \int_{q_0 \in I_j} f_{q|A}(q_0|a_i) dq_0$$

- ▶ $m_{e|a_i \rightarrow a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
- ▶ m : número de bits por símbolo de la constelación

Ejemplo - Espacio 1-D M -ario

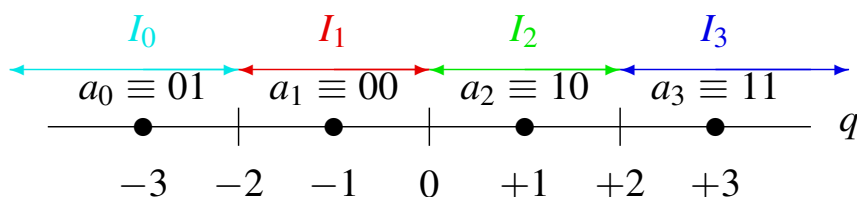
● Ejemplo:

- ▶ $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4}$
- ▶ Constelación: $\mathbf{a}_0 = -3$, $\mathbf{a}_1 = -1$, $\mathbf{a}_2 = +1$, $\mathbf{a}_3 = +3$
- ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$

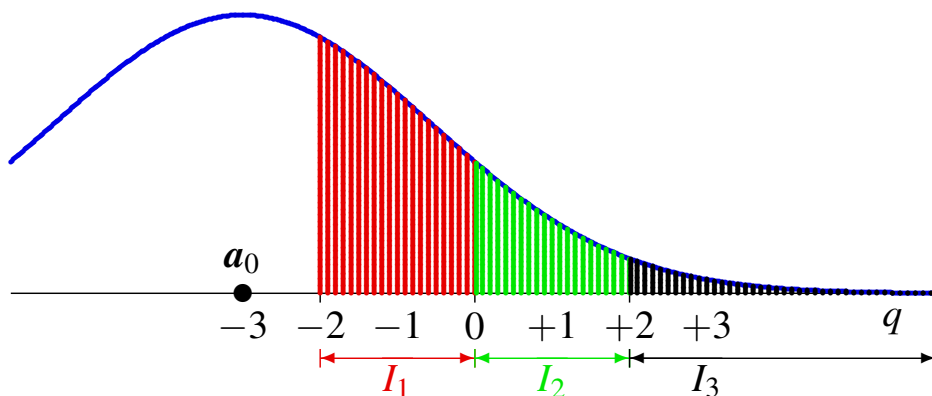
$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$

- ▶ Asignación binaria

$$\mathbf{a}_0 \equiv 01, \mathbf{a}_1 \equiv 00, \mathbf{a}_2 \equiv 10, \mathbf{a}_3 \equiv 11$$



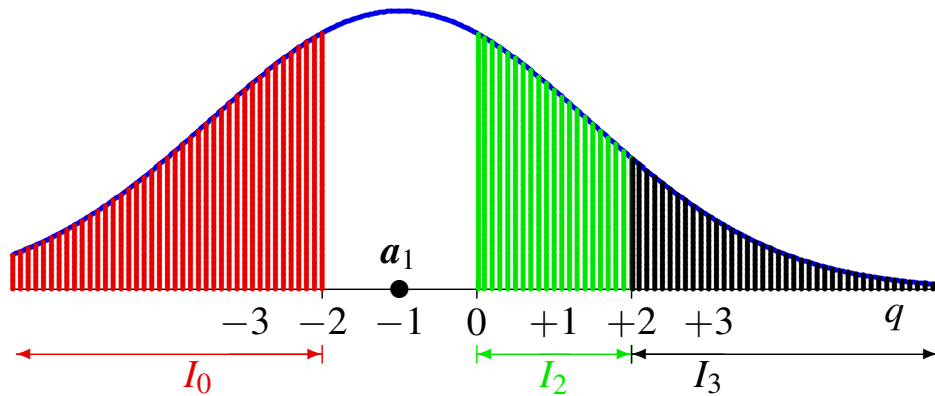
Cálculo de BER_{a_0}



- Asignación binaria: $\mathbf{a}_0 \equiv 01$, $\mathbf{a}_1 \equiv 00$, $\mathbf{a}_2 \equiv 10$, $\mathbf{a}_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|\mathbf{a}_0)$: gaussiana de media \mathbf{a}_0 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_0} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_1}

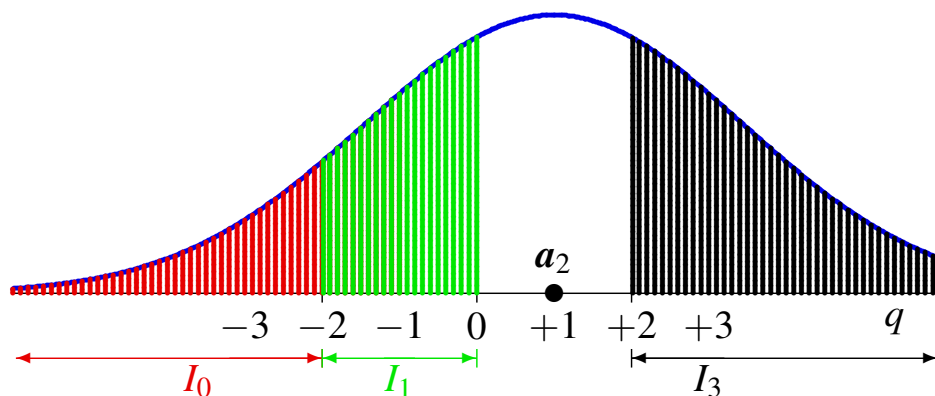


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$: gaussiana de media a_1 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_1} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_2}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_2}

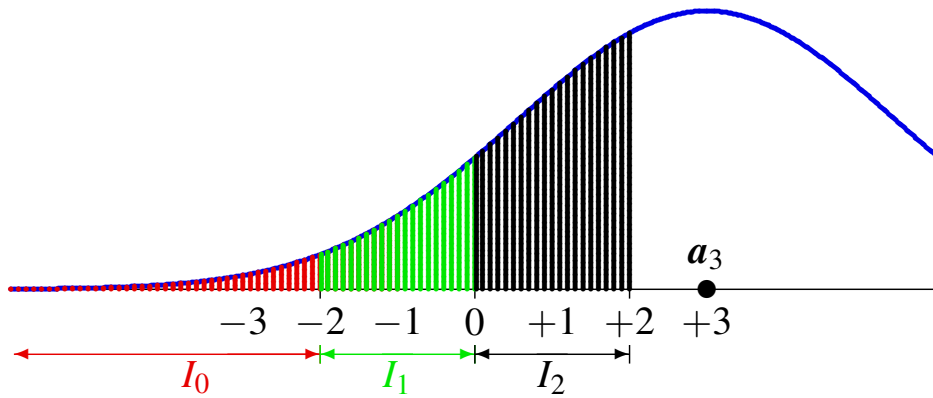


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$: gaussiana de media a_2 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_2} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_1}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_3}

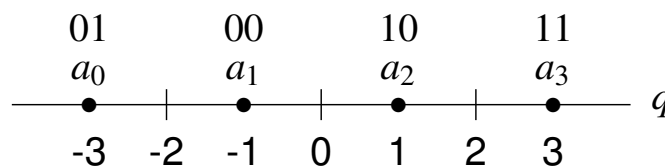


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$: gaussiana de media a_3 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_3} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_2}}{m}}$$

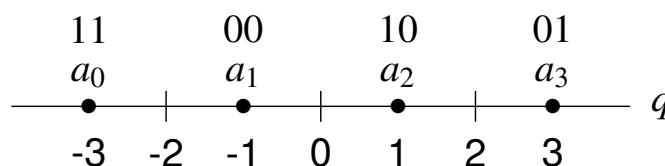
Cambio en la asignación binaria

- Resultado final para constelación anterior



$$BER = \frac{3}{4} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4} Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Si se cambia la asignación binaria

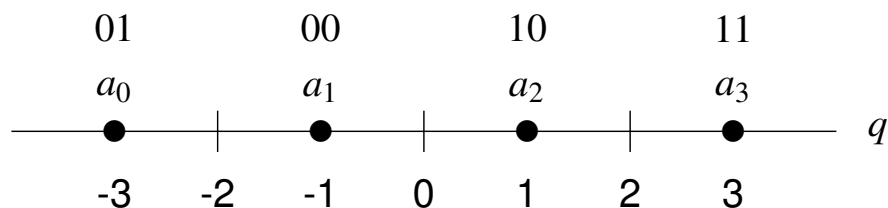


- ▶ No varían los términos $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
- ▶ Sí varían los términos $m_{e|a_i \rightarrow a_j} \Rightarrow$ Varía la BER !!!

$$BER = \frac{5}{4} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{4} Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Codificación de Gray

- Los bloques de m bits asignados a símbolos que están a mínima distancia difieren sólo en 1 bit

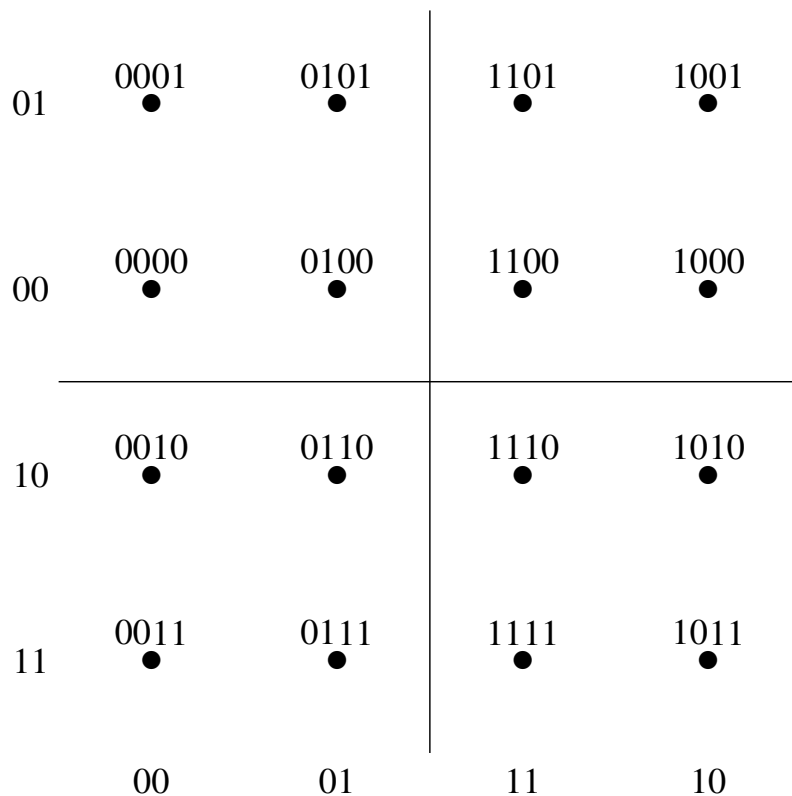


- Para relaciones señal a ruido altas

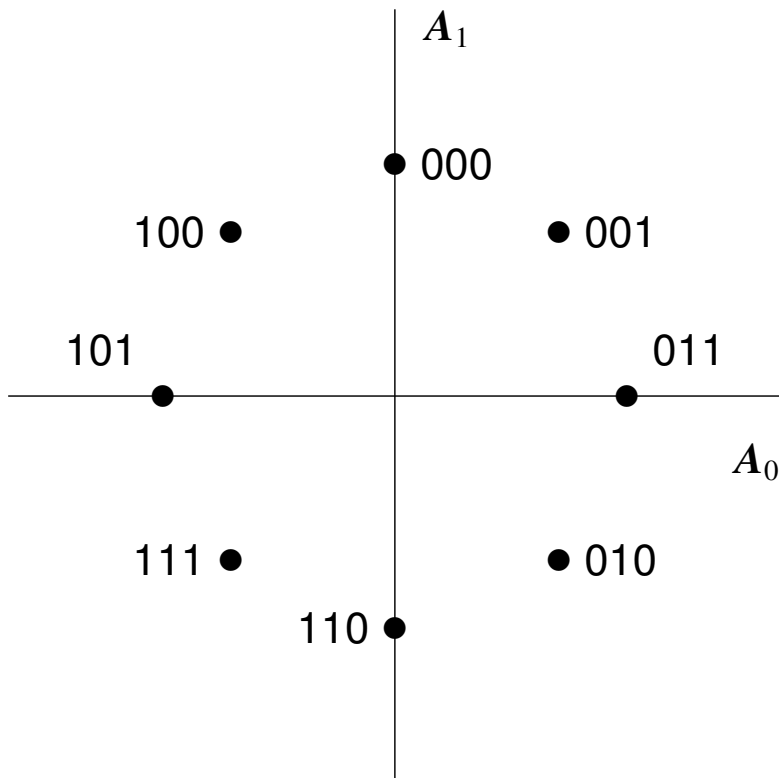
$$BER \approx \frac{1}{m} \cdot P_e$$

$m = \log_2(M)$: número de bits por símbolo

Codificación Gray QAM



Codificación Gray PSK

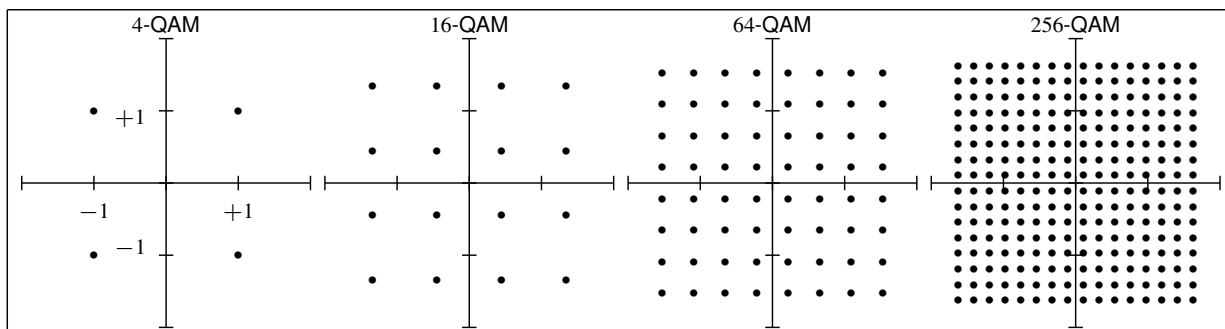


Densidad de las constelaciones

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
 - ▶ Aumento en la tasa binaria
 - ★ Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
 - ▶ Reducción de prestaciones para una E_s dada
 - ★ Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M -QAM

M (símbolos)	m (bits/símbolo)	E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$)	d_{min} con $E_s = 2$
4	2	2	2
16	4	10	0,8944
64	8	42	0,4364
256	16	170	0,2169



P_e o BER en función de E_s/N_0 (o de E_b/N_0)

- Las prestaciones se representan a menudo como una función de la relación E_s/N_0 o de la relación E_b/N_0
 - E_b : Energía media por bit de información

$$E_b = \frac{E_s}{m}$$

- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

$$Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \text{ ó } Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden escribir como

$$Q\left(v \cdot \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ donde } Q\left(\underbrace{\frac{d_{min}}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ ó } Q\left(\underbrace{\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- En este caso v es un entero, que depende de la constelación

Ejemplos - Constelaciones binarias equiprobables

- En este caso, para cualquier dimensión N

$$P_e = BER = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Se compararán dos casos

- Caso (a): Constelación binaria simétrica ($N = 1$)

$$\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$$

- Caso (b): Constelación ortogonal ($N = 2$)

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Cálculo de distancias y energías

- Caso (a): $E_s = A^2$, $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = 2 \cdot A$
- Caso (b): $E_s = A^2$, $d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{2} \cdot A$

- Cálculo de la constante v

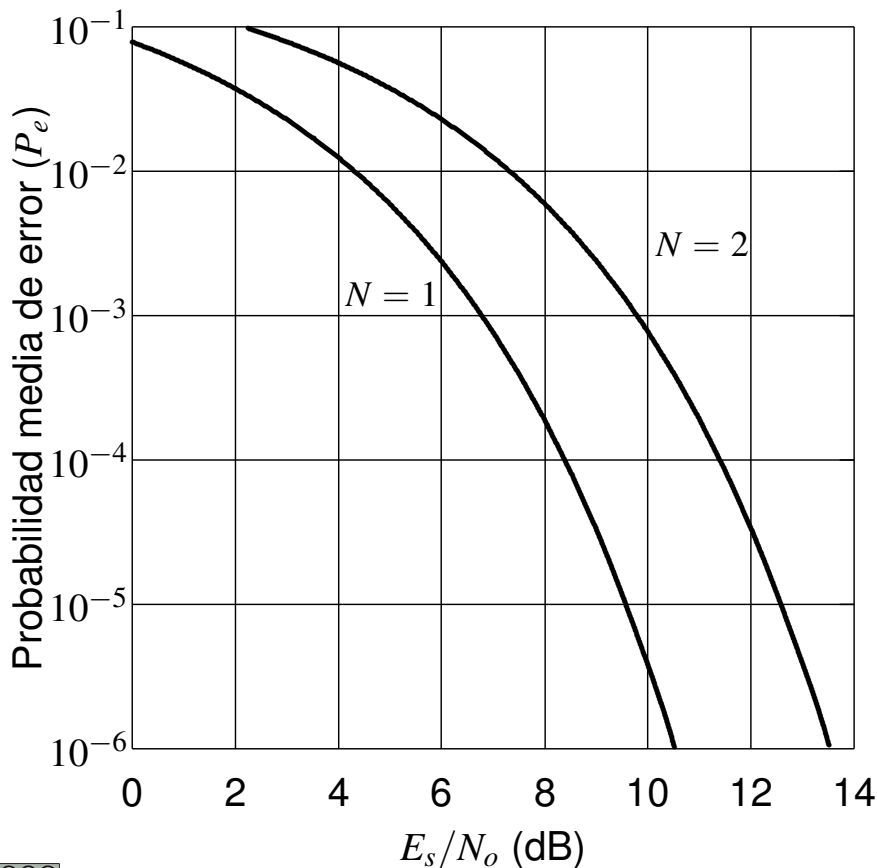
- Caso (a):

$$v = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = \sqrt{2} \rightarrow P_e = BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

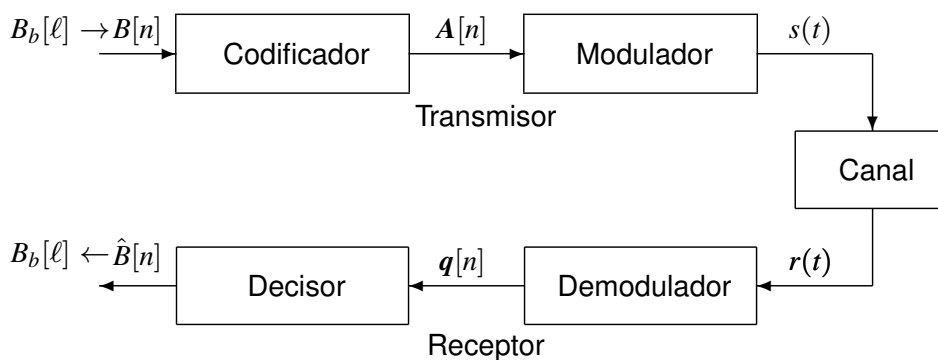
- Caso (b):

$$v = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = 1 \rightarrow P_e = BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Ejemplos - Gráfica de P_e en función de E_s/N_0 (en dB)



Transmisión digital - Tasas de transmisión



- Codificador: constelación de M símbolos
 - ▶ $m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Transmisión de 1 símbolo (m bits) cada T segundos
- Relación entre tasa de bit y tasa de símbolo
 - ▶ Tasa de símbolo

$$R_s = \frac{1}{T} \text{ símbolos/s (baudios)}$$

- ▶ Tasa de bit

$$R_b = m \times R_s \text{ bits/s}$$

$$\text{Tiempo de bit: } T_b = \frac{T}{m} \text{ segundos}$$

Generación de señales

- Codificador: constelación de M símbolos (dimensión N)
 - ▶ Asignación binaria de m bits por símbolo
 - ★ Codificación de Gray
- Modulador: base ortonormal de dimensión N
 - ▶ Asociación de una señal (de T segundos) a cada símbolo

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \times \phi_j(t)$$

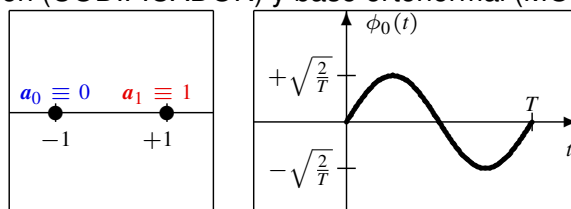
- Generación de la señal por bloques de tamaño T segundos (intervalos de símbolo)
 - ▶ Si $A[n] = a_k$ entonces $s(t) = s_k(t - nT)$ en $nT \leq (n + 1)T$
 - ★ En el intervalo de símbolo asociado a $A[n]$ ($nT \leq (n + 1)T$) se pone la forma de onda asociada al símbolo correspondiente
 - ▶ Expresión analítica de la señal completa

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \times \phi_j(t - nT)$$

$A_j[n]$: coordenada de índice j del símbolo $A[n]$

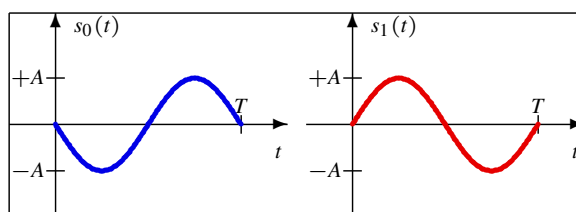
Generación de señales - Ejemplo A

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



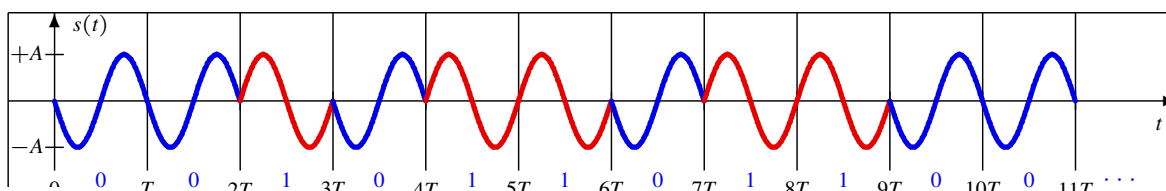
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t), s_1(t) = +1 \times \phi_0(t)$$



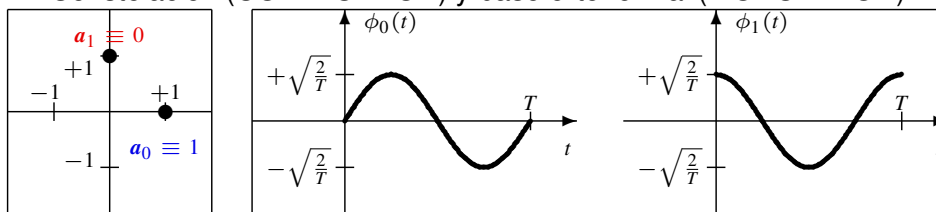
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00101101100 \dots$$



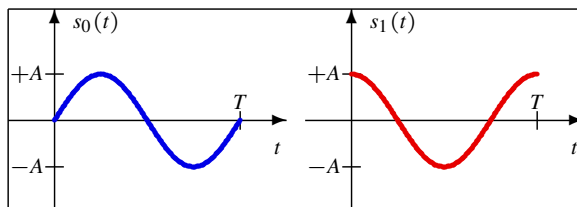
Generación de señales - Ejemplo B

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



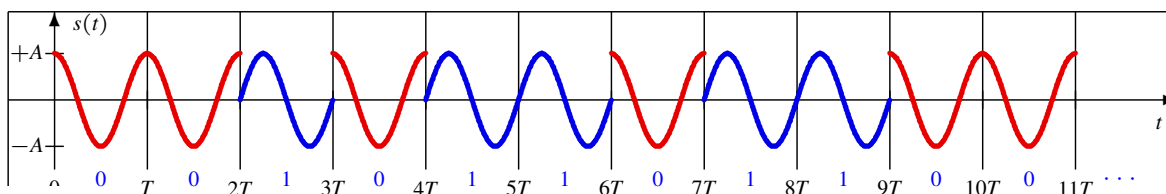
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = +1 \times \phi_0(t) + 0 \times \phi_1(t), s_1(t) = 0 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



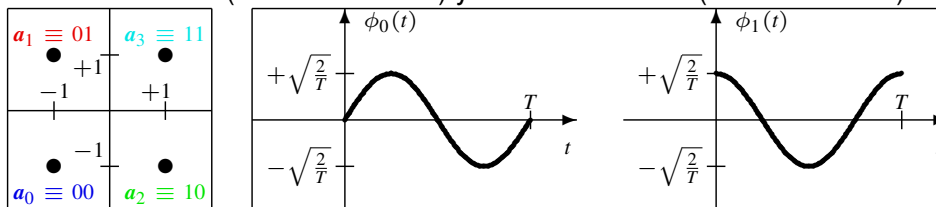
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00101101100 \dots$$



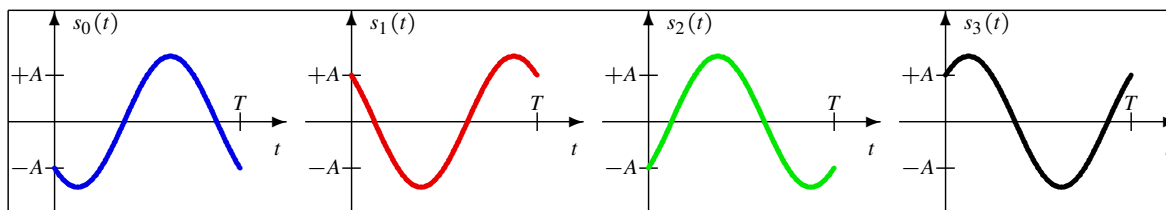
Generación de señales - Ejemplo C

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



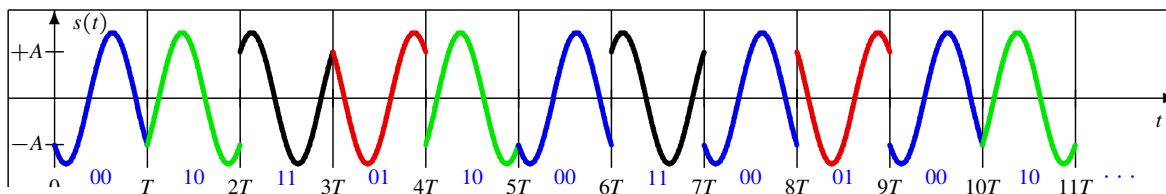
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



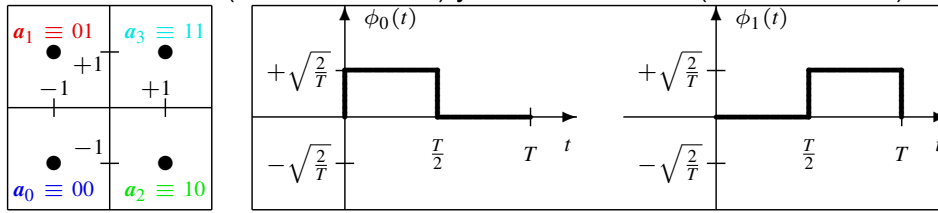
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 001011011001100110010010 \dots$$



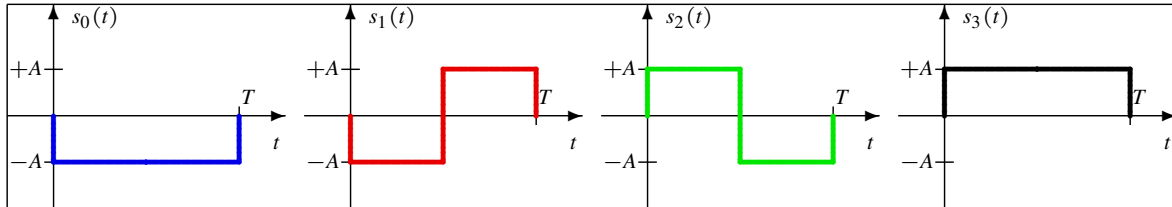
Generación de señales - Ejemplo D

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



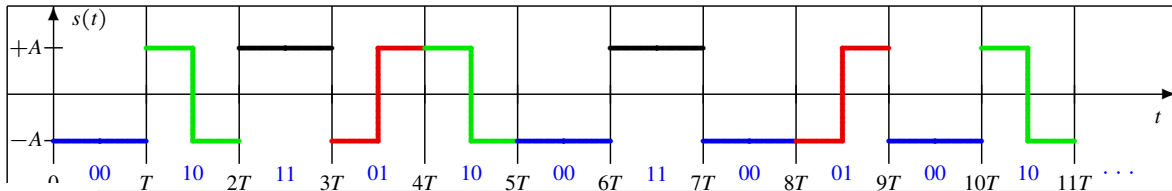
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \dots$$



Elección del modulador

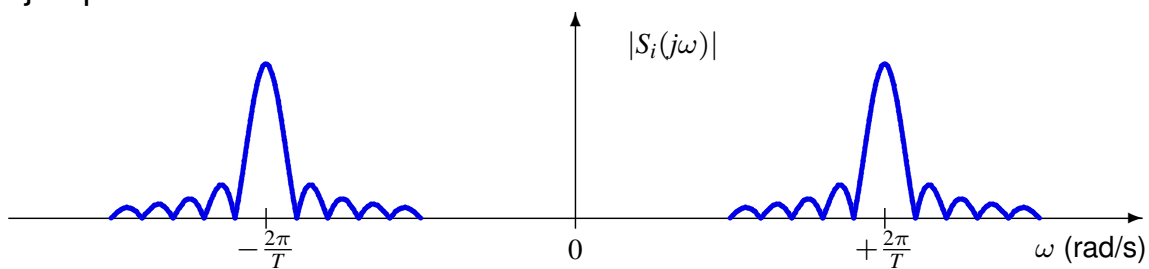
- Se ha visto que un mismo codificador se puede combinar con múltiples moduladores (conjuntos de N funciones formando una base ortonormal)
- Un codificador (constelación+asignación binaria) determina
 - ▶ Energía de las señales a transmitir
 - ▶ Prestaciones
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de símbolo P_e
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de bit BER
- Elección del modulador
 - ▶ Adecuación al canal de transmisión
 - ★ Adecuación perfecta:

$$\phi_i(t) * h(t) = \phi_i(t) \Leftrightarrow \Phi_i(j\omega) \times H(j\omega) = \Phi_i(j\omega)$$

- ★ Difícil de conseguir de forma exacta en la práctica
- ★ Búsqueda de señales cuya respuesta en frecuencia esté en la banda de paso del canal de transmisión
 - Distinción entre canales en banda base y paso banda

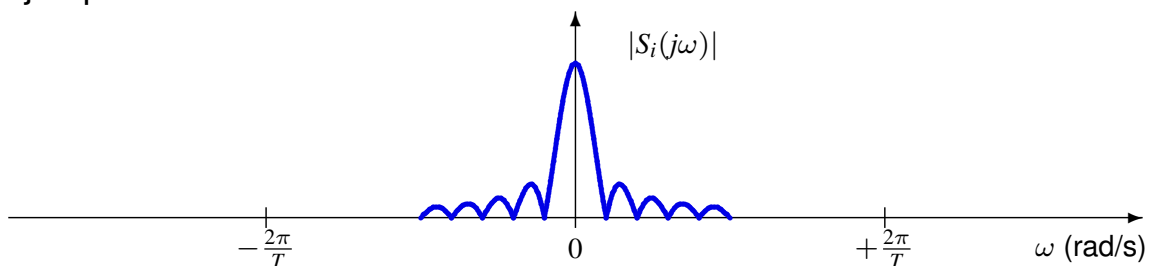
Respuesta en frecuencia de las señales

- Depende de la respuesta en frecuencia de los elementos de la base
- Ejemplo C



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

- Ejemplo D



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias