



Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

OpenCourseWare
(<http://ocw.uc3m.es>)

Universidad Carlos III de Madrid

Marcelino Lázaro

Creative Commons License



1 / 418

Autor del curso



Marcelino Lázaro

Marcelino Lázaro es “Ingeniero de Telecomunicación” y “Doctor Ingeniero de Telecomunicación” por la Universidad de Cantabria, España, títulos obtenidos en 1996 y 2001, respectivamente.

Entre 1996 y 2002, trabajó en el Departamento de Ingeniería de Comunicaciones de la Universidad de Cantabria. En 2003, se unió al Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones, de la Universidad Carlos III de Madrid, España, donde en la actualidad es Profesor Titular de Universidad. Sus intereses en el ámbito de la investigación incluyen, entre otros, los campos del procesado digital de señal, la teoría estadística de la decisión y la estimación, y los métodos de aprendizaje.

- Marcelino Lázaro
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid
Av. Universidad 30, Leganés
28911 Madrid
España
www.tsc.uc3m.es/~mlazaro/

Objetivos de la asignatura

- Introducir la caracterización estadística tanto de las señales de información como del ruido en un sistema de comunicaciones
- Presentar el concepto de modulación en sistemas de comunicaciones analógicos
- Formar la base del núcleo de conocimientos sobre comunicaciones digitales
 - ▶ Modulación (transmisión de información digital) y detección (recuperación de información digital) transmitiendo sobre canales gaussianos
 - ▶ Límites fundamentales en las comunicaciones digitales
 - ▶ Introducción del concepto de codificación (detección/corrección de errores)

Temario de la asignatura

- 1 Introducción
- 2 Ruido en los sistemas de comunicación
 - ▶ Revisión: Probabilidad, variable aleatoria y procesos aleatorios
 - ▶ Caracterización del ruido en un sistema de comunicaciones
- 3 Modulaciones analógicas
 - ▶ Modulaciones lineales
 - ▶ Modulaciones angulares
- 4 Modulación y detección en canales gaussianos
 - ▶ Modelo de comunicación digital
 - ▶ Modulación de señales digitales (transmisión)
 - ▶ Detección de señales digitales (recepción)
- 5 Teoría de la información
 - ▶ Modelos probabilísticos de fuente y de canal
 - ▶ Medidas cuantitativas de información
 - ▶ Límites fundamentales en las comunicaciones digitales
 - ▶ Introducción al concepto de codificación

Bibliografía recomendada

Bibliografía Básica

- 1 A. Artés et al. “Comunicaciones Digitales”, Pearson Educación, 2007
 - ▶ Disponible on-line: www.tsc.uc3m.es/~antonio/
- 2 J.G. Proakis, M. Salehi. “Communication Systems Engineering” (2ª Ed.), Prentice-Hall, 1994

Bibliografía Complementaria

- 1 A. Papoulis. “Probability, random variables, and stochastic processes”, (3ª Ed.), McGraw-Hill, 1991
- 2 A.B. Carlson. “Communication Systems” (2ª Ed.), McGraw-Hill, 1986
- 3 S. Haykin. “An Introduction to Analog and Digital Communications”, Willey, 1989
- 4 B. Sklar. “Digital communications : fundamentals and applications”, Prentice Hall, 2001



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

Presentación de la Asignatura 5 / 418



Universidad
Carlos III de Madrid

OPEN COURSEWARE
CONSORTIUM

Teoría de la Comunicación

Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License

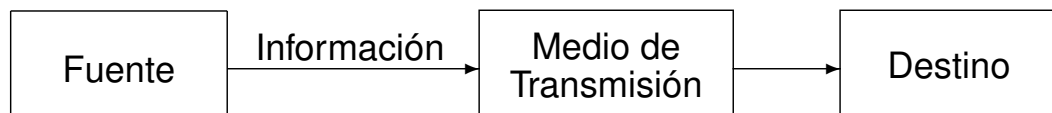


Índice de contenidos

- Definición de un sistema de comunicaciones
- Elementos funcionales básicos de un sistema de comunicaciones
- Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales
- Diseño de un sistema de comunicaciones

Definición de un sistema de comunicaciones

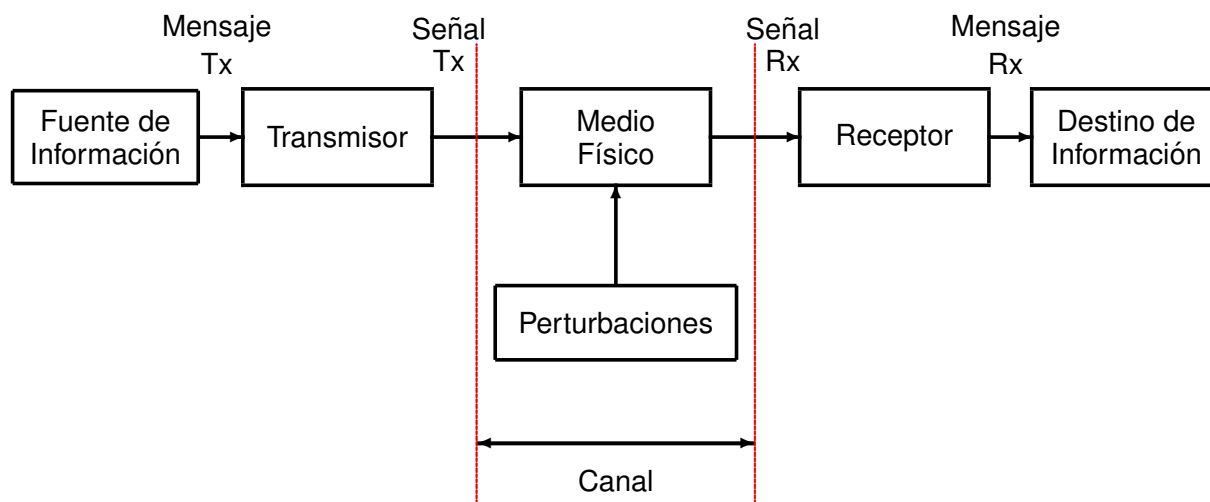
- Finalidad de un sistema de comunicaciones: **transmisión**
- Transmisión: *proceso de **enviar**, transportar, **información** de un punto (fuente) hasta otro punto (destino) a través de un canal o medio de transmisión*



- Representación física de la información para su transmisión
 - ▶ Caso más habitual: señal eléctrica o electromagnética
 - ★ Conversión información / señal eléctrica: Transductor
 - Ejemplo: salida de un micrófono (señal de voz)



Esquema funcional de un sistema de comunicaciones



Fuente de información

- Mensaje: manifestación física de la información
- Clasificación (en función del formato):
 - ▶ Fuente Analógica
 - ★ Mensajes: forma de onda continua
 - ★ Transductor: conversión a señal eléctrica/electromagnética



- ★ Objetivo de la transmisión: *Fidelidad*
 - ▶ Fuente Digital
 - ★ Información contenida en un conjunto de símbolos (alfabeto finito)
 - Ejemplo: bits (alfabeto {0, 1})
 - Información: 0110001101110010111010010101010...
 - ★ Se envían en tiempo discreto
 - ★ Objetivo de la transmisión: *Probabilidad de error* ↓

Transmisor

- Conversión de la señal de información en una señal eléctrica/electromagnética que será transmitida a través del canal de comunicaciones
- Modulación: conversión de la información en una señal adecuada a las características del canal
 - ▶ Conocimiento relativo del canal
 - ★ En particular, la banda de frecuencias en la que es utilizable
- Estrategias de transmisión
 - ▶ Transmisión en banda base (BB)
 - ★ Transmisión en baja frecuencia, centrada en cero Hz
 - ▶ Transmisión paso banda (PB)
 - ★ Transmisión en torno a una cierta frecuencia $f_c \neq 0$ Hz

Canal

- Medio físico para enviar la información
 - ▶ Cables, fibra óptica, espectro radioeléctrico, ...
- Modelo habitual: sistema lineal e invariante ($h(t)$)

$$r(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

- Canal ideal: retardo y atenuación

$$r(t) = K \times s(t - t_0)$$

término de atenuación $K < 1$ y término de retardo t_0 seg.

- ▶ Respuesta del canal


$$h(t) = K \times \delta(t - t_0) \leftrightarrow H(j\omega) = K \times e^{-j\omega t_0}$$

- Efectos no deseados
 - ▶ Distorsión lineal
 - ▶ Distorsión no lineal
 - ▶ Ruido

Receptor

- Función: convertir la señal recibida en información
- Objetivo: recuperar la información transmitida con un objetivo de calidad
 - ▶ Sistemas analógicos: señal recibida lo suficientemente *parecida* a la señal recibida (fidelidad)
 - ★ Cuantificación: relación señal a ruido (S/N)
 - ▶ Sistemas digitales: recibir un número limitado de bits erróneos
 - ★ Cuantificación: probabilidad de error de bit (BER)
- Tareas a realizar
 - ▶ Demodulación: proceso inverso al de la modulación
 - ▶ Rechazar en lo posible todas las perturbaciones
 - ▶ Deshacer las distorsiones del canal
 - ★ Más sencillo en sistemas digitales

Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales

- Sistema de comunicaciones analógico
 - ▶ Diseñado para enviar como información una forma de onda continua
- Sistema de comunicaciones digital
 - ▶ Diseñado para enviar como información una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito (M posibles valores para cada símbolo)
 - ★ Ejemplo más común: Bits ($M = 2$): $\{0, 1\}$
 - Información: 0110001101110011010101110010011010...
 - ▶ Transmisión a una velocidad (tasa de símbolo) dada: R_s símbolos/s
 - ★ Se transmite un símbolo cada $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
 - ▶ Los símbolos han de convertirse en señales eléctricas para su transmisión
 - ★ Cada símbolo se asocia a una forma de onda
 - ★ Caso más simple: formas de onda de $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
- Preponderancia de los sistemas de comunicaciones digitales

Diseño de un sistema de comunicaciones

- Factores a tener en cuenta en el diseño
 - ▶ Calidad requerida
 - ★ Sist. analógicos: fidelidad → relación señal a ruido (S/N)
 - ★ Sist. digitales: tasa de errores (BER)
 - ▶ Consumo de recursos
 - ★ Ancho de banda
 - ★ Energía/Potencia
 - ★ Limitación en estos recursos
 - Limitaciones físicas
 - Limitaciones administrativas
 - Limitaciones económicas
 - ▶ Coste
 - ▶ Tecnologías existentes
- Objetivo del diseño
 - ▶ Proporcionar la calidad requerida con las restricciones en los recursos disponibles con el menor coste posible (en ocasiones limitado) haciendo uso de las tecnologías disponibles

Análisis de sistemas de comunicaciones

- Los sistemas de comunicaciones transmiten información
 - ▶ Conversión de información en una señal adecuada
 - ▶ Transmisión de esta señal a través de un cierto medio (canal)
 - ▶ Procesado de la señal recibida para extraer la información
- Tareas del transmisor y receptor
 - ▶ Generar y procesar señales
- Análisis de un sistema de comunicaciones
 - ▶ Caracterización de las señales
 - ▶ Modelo para el procesado o transformación de señales

Señales

- Definición: funciones con las que se representan variaciones de una magnitud física a lo largo del tiempo
- Clasificación según la naturaleza de la variable independiente
 - ▶ En tiempo continuo: $x(t)$
 - ▶ En tiempo discreto: $x[n]$
- Clasificación según la naturaleza de la señal
 - ▶ Determinista
 - ★ Conocida completamente en cualquier instante de tiempo
 - ★ Señalización, códigos de encriptación o codificación
 - ▶ Aleatoria
 - ★ Desconocida en cualquier instante de tiempo
 - ★ Conocimiento estadístico
 - ★ Ejemplos: Señales de información, ruido e interferencias
- Sistemas: transforman señales

Caracterización de señales y sistemas - Programa del Grado

- Señales deterministas
 - ▶ Dominio del tiempo: **Sistemas y circuitos**
 - ★ Valor medio
 - ★ Energía/Potencia
 - Señal de energía: $E_x < \infty$ ($P_x = 0$)
 - Señal de potencia: $0 < P_x < \infty$ ($E_x = \infty$)
 - ★ Valor eficaz: valor de continua con la misma potencia
 - ★ Operaciones básicas (desplazamiento, escalado,...)
 - ★ Señales básicas
 - ★ Sistemas lineales e invariantes: convolución
 - ▶ Dominio de la frecuencia : **Sistemas lineales**
 - ★ Señales periódicas ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$): Desarrollo en Serie de Fourier
 - ★ Señales aperiódicas: Transformada de Fourier
 - ★ Sistemas lineales en el dominio transformado
- Señales aleatorias
 - ▶ **Estadística**
 - ★ Variables aleatorias y procesos aleatorios (dominio temporal)
 - ▶ **Teoría de la Comunicación**



Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 2

RUIDO EN LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



19/418

Índice de contenidos

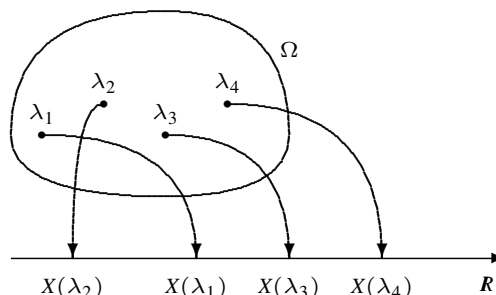
- Revisión de conceptos de probabilidad
 - ▶ Variable aleatoria
 - ▶ Procesos aleatorios
- Caracterización del ruido en sistemas de comunicaciones
 - ▶ Procesos blancos
 - ▶ Procesos gaussianos
 - ▶ Suma de procesos aleatorios
 - ▶ Modelo estadístico del ruido térmico
 - ▶ Relación señal a ruido

Variable aleatoria (Real)

Función que asigna un valor numérico (real) a la salida de un experimento aleatorio

$$\Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda) \in \mathbf{R}$$



- Rango de X : $\text{Rango}_X = \{x \in \mathbf{R} : \exists \lambda \in \Omega, X(\lambda) = x\}$
 - ▶ V.a. discreta: rango formado por conjunto discreto de valores
 - ▶ V.a. continua: rango continuo de valores
- Descripción (probabilística):
 - ▶ Función de distribución: $F_X(x)$
 - ▶ Función densidad de probabilidad: $f_x(x)$

Función de distribución

- Definición

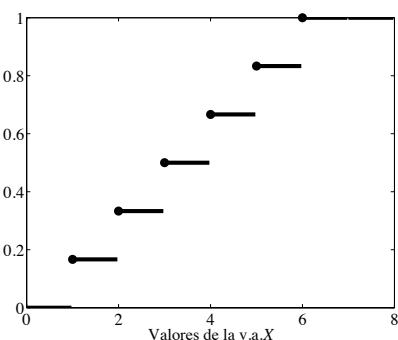
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Interpretación frecuencial (probabilística)

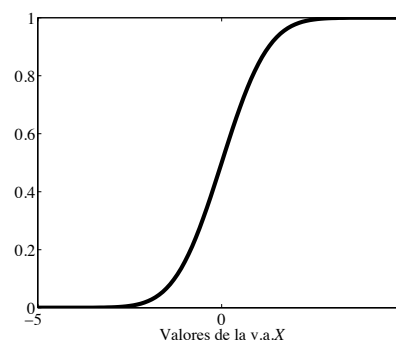
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_x}{n}$$

n : número de realizaciones de la variable aleatoria X

n_x : número de resultados en las n realizaciones con $X \leq x$

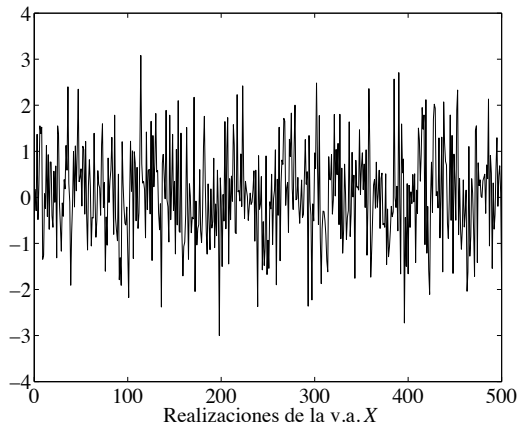


(a) Discreta

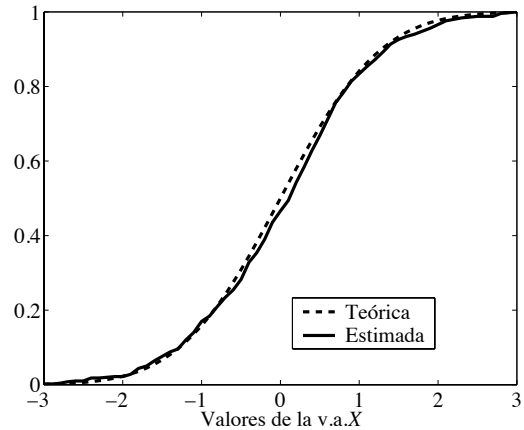


(b) Continua

Estima de la función de distribución



(a) Realizaciones



(b) Estima de $F_X(x)$

Propiedades de la función de distribución

- 1 $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- 2 $x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ ($F_X(x)$ es no decreciente)
- 3 $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(\infty) = 1$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$)
- 4 $F_X(x^+) = F_X(x)$ ($F_X(x)$ es continua por la derecha)
- 5 $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$$

$$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$

- 6 $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

- 7 $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Función densidad de probabilidad

- Definición

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- ▶ V.a. discreta: puntos de masa $p_i = P(X = x_i)$
- ▶ Notación v.a. discreta: $p_X(x_i) = p_i$

- Interpretación frecuencial (probabilística)

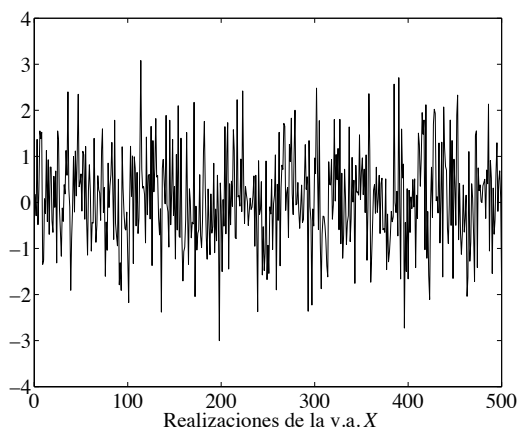
$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta_x)}{\Delta_x}$$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta_x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_x}{n} \right\}$$

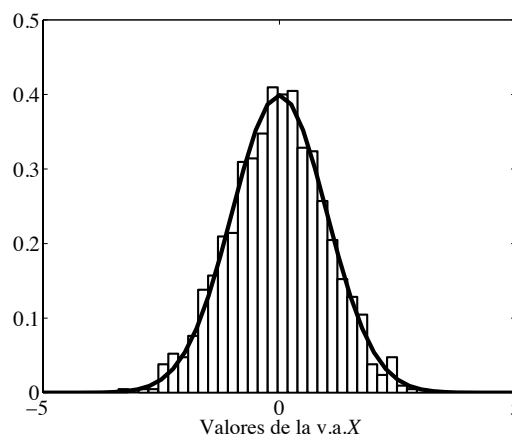
n : número de realizaciones de la variable aleatoria X

n_x : número de resultados en las n realizaciones con $x \leq X \leq x + \Delta_x$

Estima de la f.d.p.



(a) Realizaciones



(b) Estima de $f_X(x)$

Propiedades de $f_X(x)$

- 1 $f_X(x) \geq 0$
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$
- 3 $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x) \cdot dx = P(a < X \leq b)$
- 4 En general, $P(X \in A) = \int_A f_X(x) \cdot dx$
- 5 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u) \cdot du$

Variable aleatoria de Bernoulli

- Variable aleatoria discreta con $\text{Rango}_X = \{0, 1\}$
- Parámetro: $p = P(X = 1)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplos de aplicación en comunicaciones
 - ▶ Generador de datos binario
 - ▶ Modelo de errores

Variable aleatoria Binomial

- Número de 1's en n experimentos de Bernoulli (indep.)
- Parámetros: n, p .
- Rango $_X = \{0, 1, \dots, n\}$

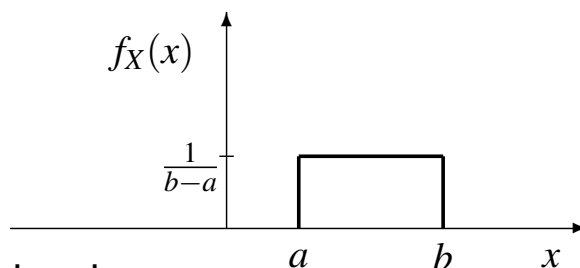
$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & 0 \leq x \leq n \text{ y } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
 - ▶ Número total de bits recibidos con error

Variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria continua de parámetros a y b
 - ▶ Notación: $\mathcal{U}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

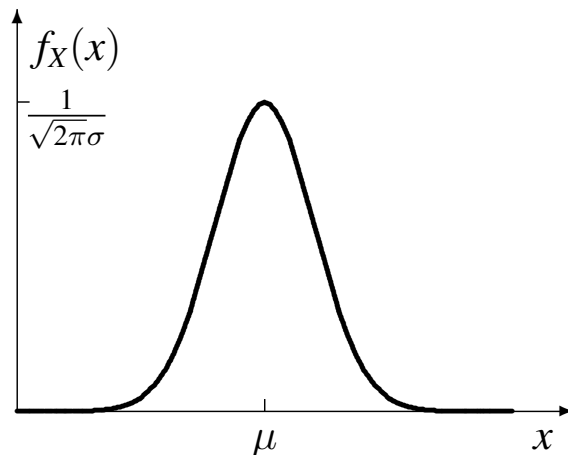


- Ejemplo aplicación en comunicaciones
 - ▶ Fase aleatoria en una senoide: v.a. uniforme entre 0 y 2π

Variable aleatoria gaussiana (normal)

- Parámetros: media (μ), y varianza (σ^2)
 - ▶ Notación: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

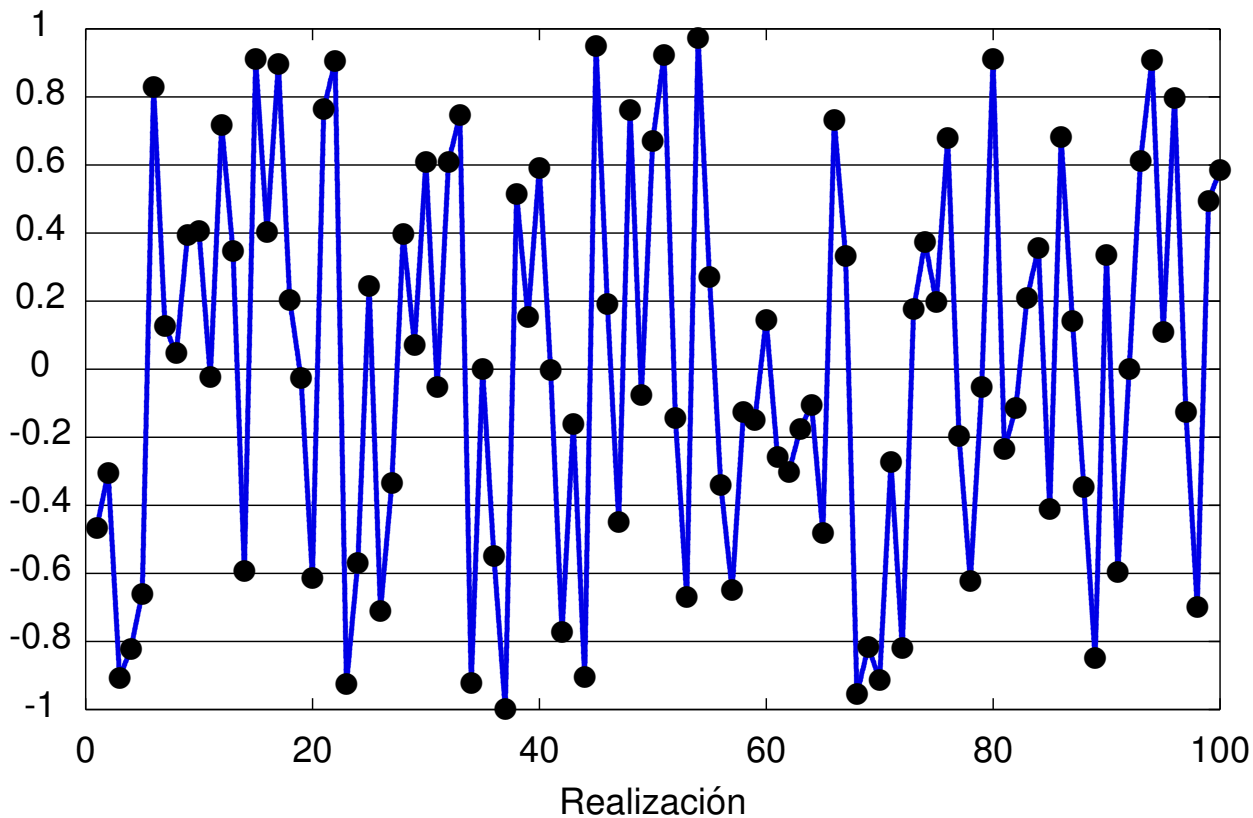


- Ejemplo de aplicación en comunicaciones
 - ▶ Modelado del ruido térmico

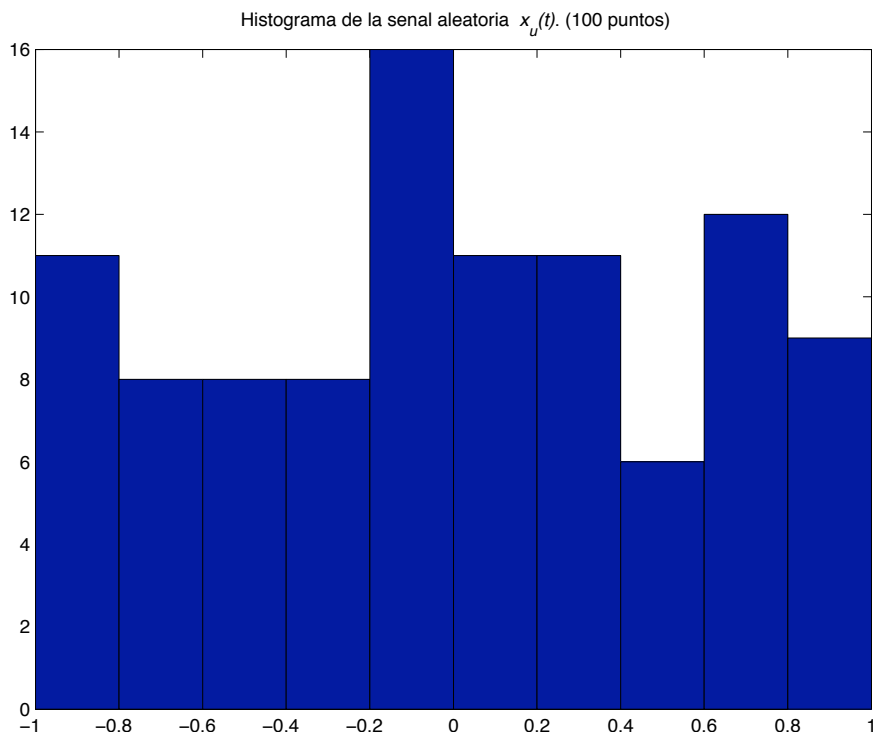
Interpretación de la función densidad de probabilidad

- La f.d.p. indica cómo se distribuyen los valores que toma una variable aleatoria
- Rangos donde $f_X(x)$ toma valores elevados indican una probabilidad alta de que la variable aleatoria tome valores en ese rango
 - ▶ Por esta razón esta función puede utilizarse para el cálculo de probabilidades sobre los posibles valores de una variable aleatoria
- Una f.d.p. se puede interpretar como un histograma llevado al límite
- A continuación se muestran varios ejemplos
 - ▶ Variable aleatoria uniforme
 - ▶ Variable aleatoria gaussiana

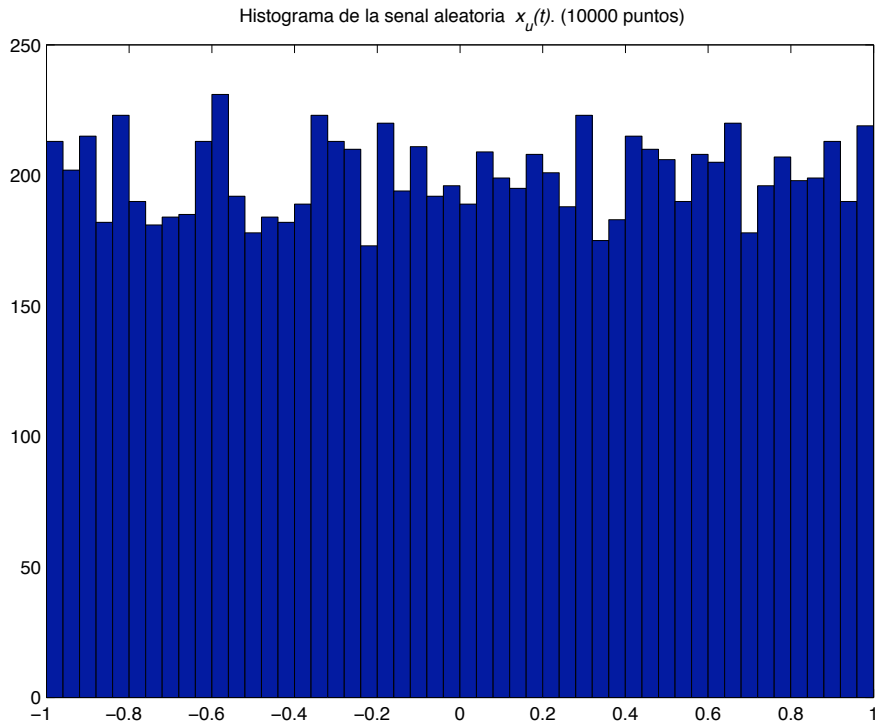
Realizaciones de una variable aleatoria uniforme



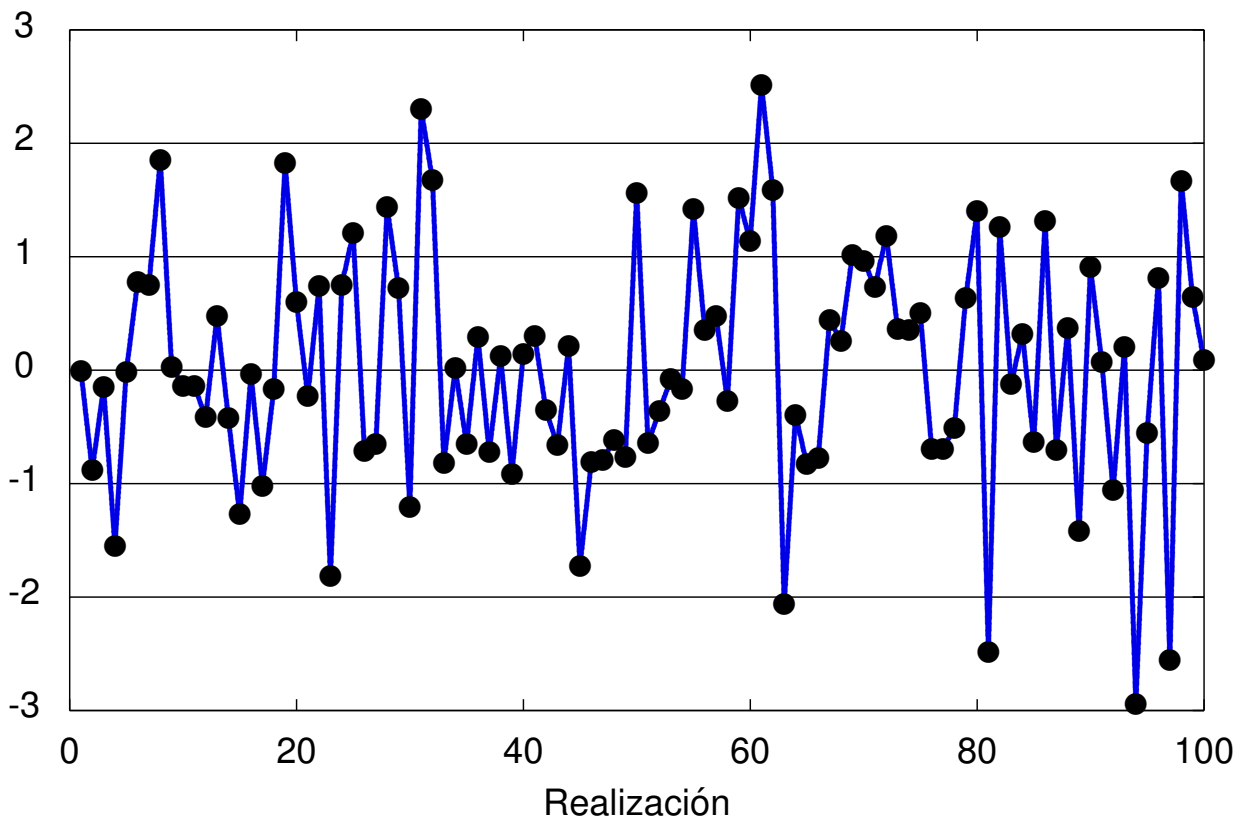
Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria uniforme



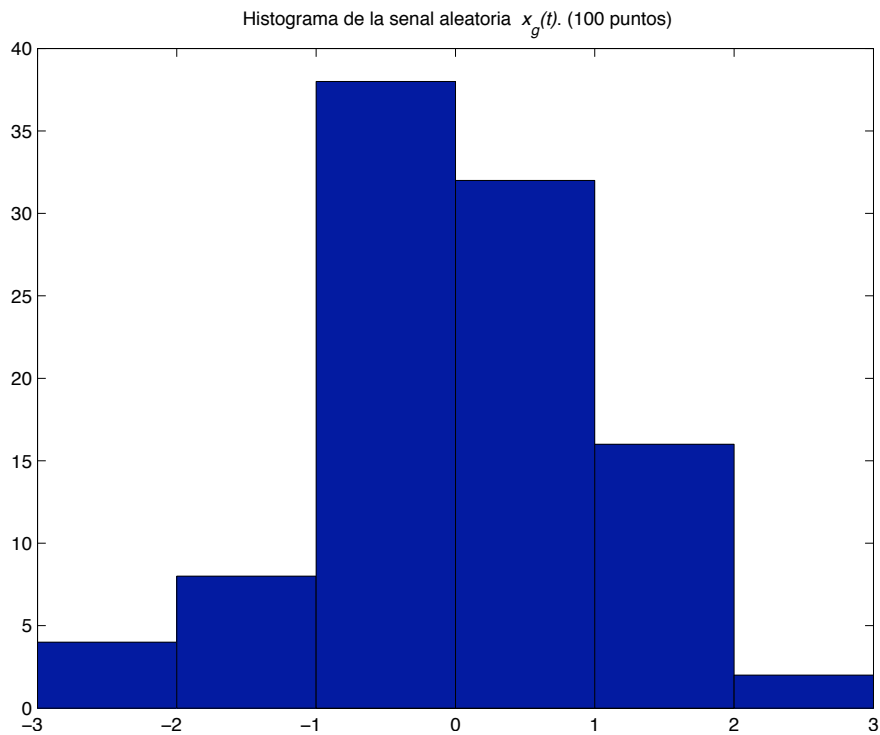
Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria uniforme



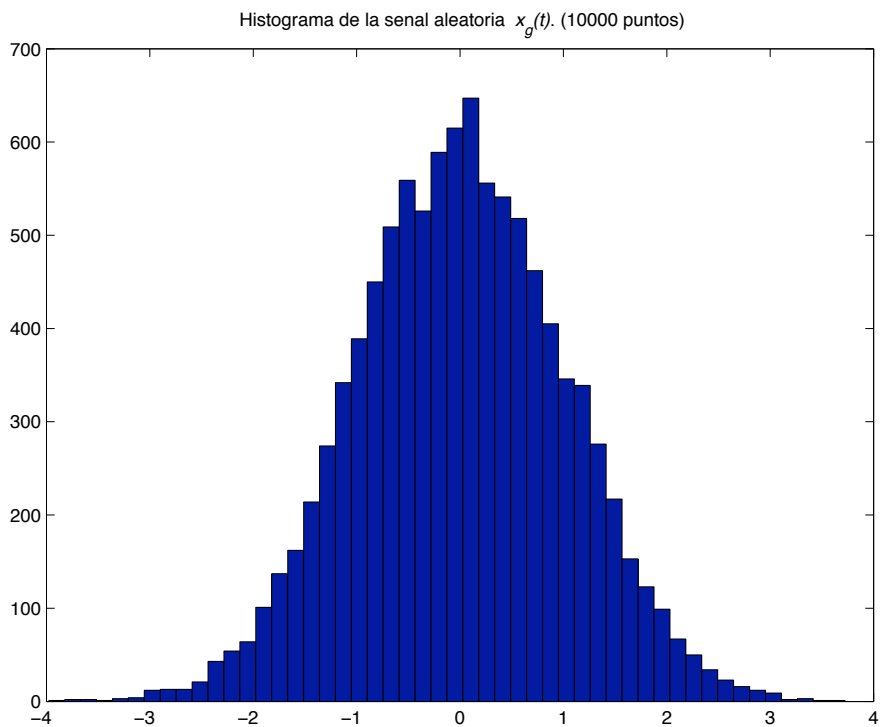
Realizaciones de una variable aleatoria gaussiana



Histograma con las 100 realizaciones de la variable aleatoria gaussiana



Histograma con 10000 realizaciones de una variable aleatoria gaussiana



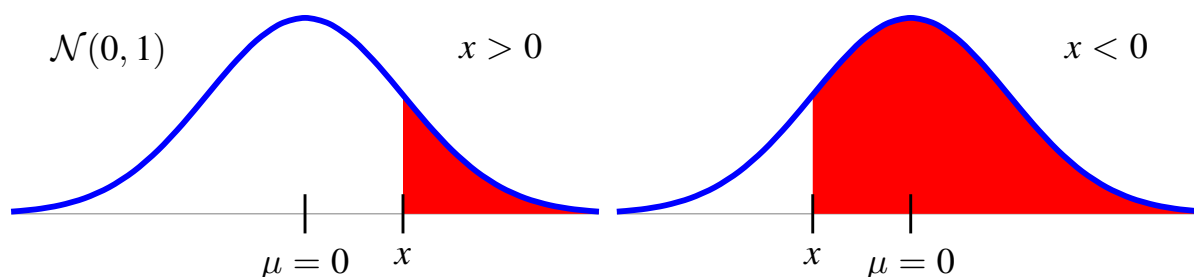
Función $Q(x)$

- Función tabulada calculada numéricamente relacionada con la integral de una distribución gaussiana
- Definición: probabilidad de que una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza unidad tome valores mayores que su argumento

$$\text{Si } X \sim \mathcal{N}(0, 1) \rightarrow f_X(x) = \mathcal{N}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow Q(x) = P(X > x)$$

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} f_X(z) dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

- Interpretación gráfica
 - ▶ Sólo se tabula para $x \geq 0$
 - ▶ Para $x < 0$, dada la simetría de $f_X(x)$: $Q(-x) = 1 - Q(x)$



Función $Q(x)$ - Propiedades

- Relación con la función de distribución de una v.a. gaussiana (con $\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

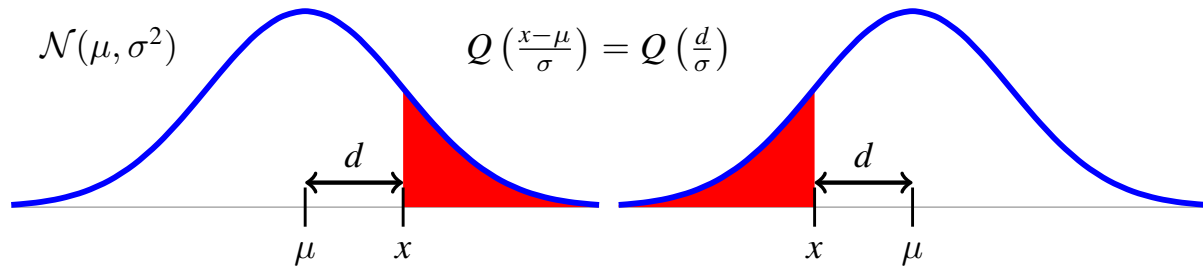
- Función $Q(x) = 1 - F_X(x) = P(X > x)$ para $\mu = 0, \sigma^2 = 1$
- Algunas propiedades de la función $Q(x)$
 - ▶ $Q(-x) = 1 - Q(x)$
 - ▶ $Q(0) = \frac{1}{2}$
 - ▶ $Q(\infty) = 0$

Integrales sobre distribuciones gaussianas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

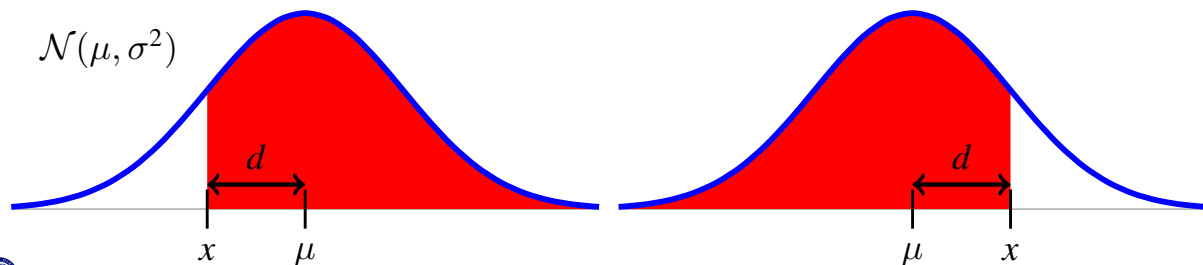
- Si la distribución gaussiana tiene media μ y varianza σ^2

$$P(X > x) = Q\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

- Interpretación gráfica (considerando definición y simetría)

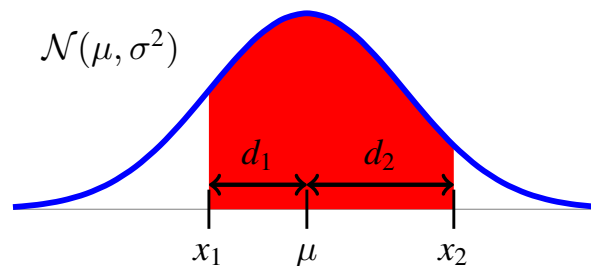


$$Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Q\left(-\frac{d}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{d}{\sigma}\right)$$

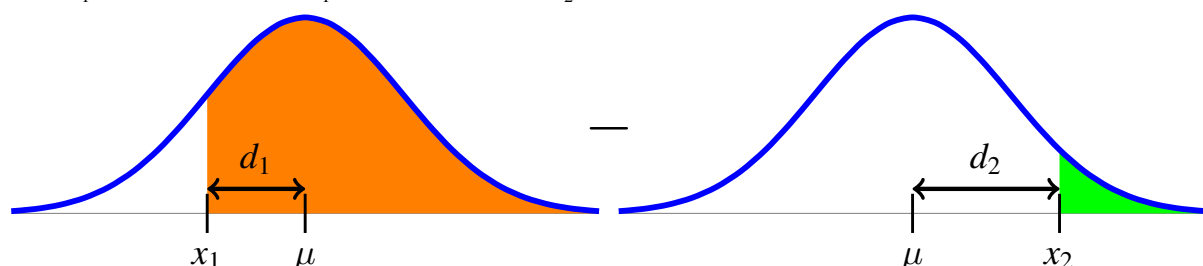


Integrales sobre $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ en intervalos

- En general se pueden escribir como sumas o diferencias de diferentes términos involucrando integrales desde un punto a $\pm\infty$, que ya hemos visto como se obtienen utilizando la función $Q(x)$
- Un ejemplo ilustrativo



$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \int_{x_1}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) - \int_{x_2}^{\infty} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = [1 - Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)] - [Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)]$$



Funciones de una variable aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ de una v. a. es una variable aleatoria.
- Función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$F_Y(y) = P(x \in B_X^g(y)), \quad B_X^g(y) = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \leq y\}$$

- Función densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

- ▶ $\{x_i\}$: raíces de la ecuación $y = g(x)$
- ▶ $g'(x)$: derivada de la función $g(x)$
- ▶ Condiciones: número finito de raíces, N_r y $g'(x_i) \neq 0 \forall x_i$

Momentos estadísticos

- Valor esperado (media, o esperanza matemática)

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

- Valor esperado de una función de X ($g(X)$)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

- Momento de orden n

$$m_X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_X(x) dx$$

- Varianza

$$\sigma_X^2 = E[(x - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f_X(x) dx$$

NOTA: $\sigma_X^2 = E[(x - m_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - (m_X)^2$

Propiedades de los momentos

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = m_X + m_Y$ (Operador lineal)
- $E[c] = c$ (para cualquier constante c)
- $E[c \cdot X] = c \cdot E[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$
- $\text{Var}(c) = 0$
- $\text{Var}(c \cdot X) = c^2 \cdot \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$

Variables aleatorias multidimensionales

- Se puede trabajar de forma conjunta con dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral Ω
- Modelado probabilístico conjunto
 - ▶ Función de distribución conjunta

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

- ▶ Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

Propiedades de $F_{X,Y}(x, y)$ y $f_{X,Y}(x, y)$

- $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty)$
- $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y)$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$
- $P((X, Y) \in A) = \int \int_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x, y) dx dy$
- $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$

Función densidad de probabilidad condicionada

- Conocimiento del valor de una variable modifica las probabilidades de la otra

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Definición de independencia estadística:

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$$

- ▶ Implicación: para variables aleatorias independientes

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Momentos estadísticos

- Valor esperado de una función $g(X, Y)$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

- Casos particulares

- ▶ Correlación: $g(X, Y) = X \cdot Y$
- ▶ Covarianza: $g(X, Y) = (X - m_X) \cdot (Y - m_Y)$

- Implicación de independencia: si $g(X, Y) = g_1(X) \cdot g_2(Y)$

$$E[g_1(X) \cdot g_2(Y)] = E[g_1(X)] \cdot E[g_2(Y)]$$

NOTA: Sólo bajo independencia !!!!

Incorrelación

- Coeficiente de correlación

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}, \quad 0 \leq |\rho_{X,Y}| \leq 1$$

- ▶ Si $\rho_{X,Y} = 0$: v.a.'s **incorreladas**
 - ★ Independencia implica incorrelación
 - ★ Incorrelación no implica independencia
- ▶ Si $\rho_{X,Y} = \pm 1$: $Y = aX + b$
 - $\rho_{X,Y} = +1 \rightarrow a > 0$; $\rho_{X,Y} = -1 \rightarrow a < 0$

- Incorrelación sólo implica independencia para variables aleatorias conjuntamente gaussianas

NOTA: Salvo este caso, en general, incorrelación no implica independencia !!!

Funciones de variables aleatorias

- Funciones de variables aleatorias: $Z = g(X, Y)$, $W = h(X, Y)$

$$\begin{cases} Z = g(X, Y) \\ W = h(X, Y) \end{cases}$$

- Función de distribución conjunta, $F_{Z,W}(z, w)$

$$F_{Z,W}(z, w) = P(Z \leq z, W \leq w) = P\left((x, y) \in B_{X,Y}^{g,h}(z, w)\right)$$

$$B_{X,Y}^{g,h}(z, w) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : g(x, y) \leq z, h(x, y) \leq w\}$$

- Función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{Z,W}(z, w) = \sum_i \frac{f_{X,Y}(x_i, y_i)}{|\det \mathbf{J}(x_i, y_i)|}, \quad \mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- ▶ $\{x_i, y_i\}$: raíces del sistema de ecuaciones $z = g(x, y)$, $w = h(x, y)$
- ▶ Número finito de raíces y determinante no nulo para todas ellas

Variables aleatorias conjuntamente gaussianas

- Dos variables, X, Y : caracterizadas por una f.d.p. conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} - \frac{\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)}$$

- Para n variables aleatorias $\mathbf{X} = X_1, X_2, \dots, X_n$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{C})}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T}$$

- ▶ Vector de medias: $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$
- ▶ Matriz de covarianzas: \mathbf{C} , dada por

$$C_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \rho_{i,j} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

Propiedades de v.a.'s conjuntamente gaussianas

- Completamente caracterizadas por μ y C (estadísticos de 2º orden)
- Si n variables aleatorias son conjuntamente gaussianas, cualquier subconjunto también está distribuido de forma conjuntamente gaussiana. En particular, todas las variables individuales son gaussianas
- Cualquier subconjunto de v.a. conjuntamente gaussianas, condicionadas a otro subconjunto de las mismas v.a. conjuntamente gaussianas originales, tiene una distribución conjuntamente gaussiana
- Cualquier conjunto de combinaciones lineales de (X_1, X_2, \dots, X_n) es conjuntamente gaussiano. En particular, individualmente cualquier combinación lineal Y_i es gaussiana
- Dos variables incorreladas son independientes
- Si las variables están incorreladas, $\rho_{i,j} = 0 \forall i \neq j$, C es una matriz diagonal

Suma de variables aleatorias

- **Ley de los grandes números (débil):** Si (X_1, X_2, \dots, X_n) están *incorreladas* y todas tienen la misma media m_X y varianza $\sigma_X^2 < \infty$, independientemente de su distribución, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\text{si } Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y - m_X| > \varepsilon) = 0$$

- **Teorema del límite central:** Si (X_1, X_2, \dots, X_n) son *independientes* con medias m_1, m_2, \dots, m_n , y varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, entonces la distribución de

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - m_i}{\sigma_i}$$

converge a una distribución gaussiana de media 0 y varianza 1

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \equiv \mathcal{N}(0, 1)$$

Suma de variables aleatorias (II)

- Caso particular: variables *independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)*, es decir, que todas tengan la misma distribución con la misma media m y la misma varianza σ^2 ; el promedio

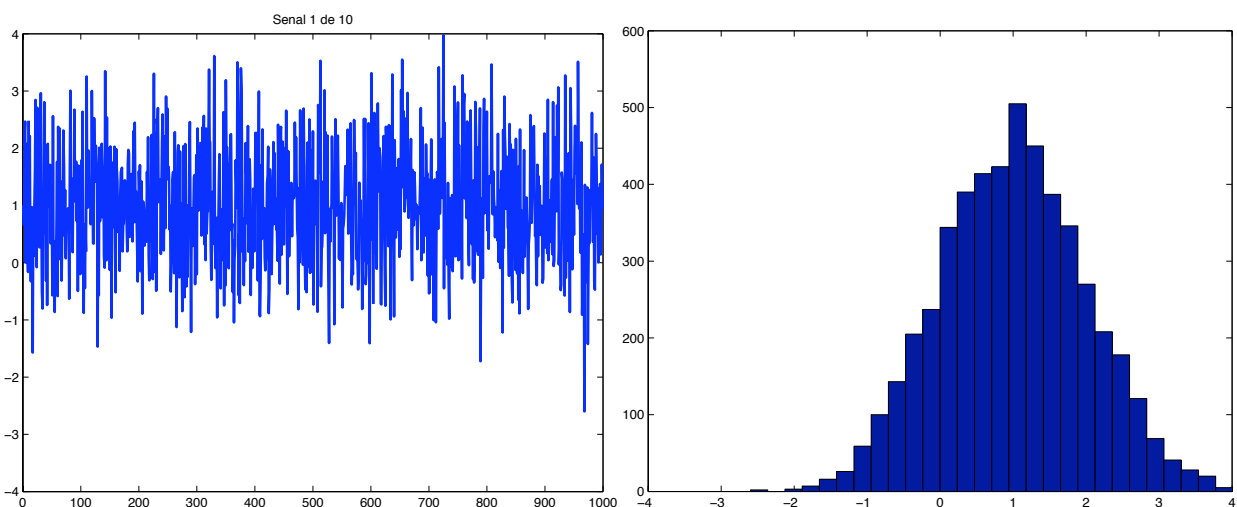
$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

converge a una distribución $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Esto es así aunque la distribución original no sea gaussiana.

- Recordatorio: condiciones a satisfacer
 - ▶ Ley de los grandes números (débil): incorrelación
 - ▶ Teorema del límite central: independencia

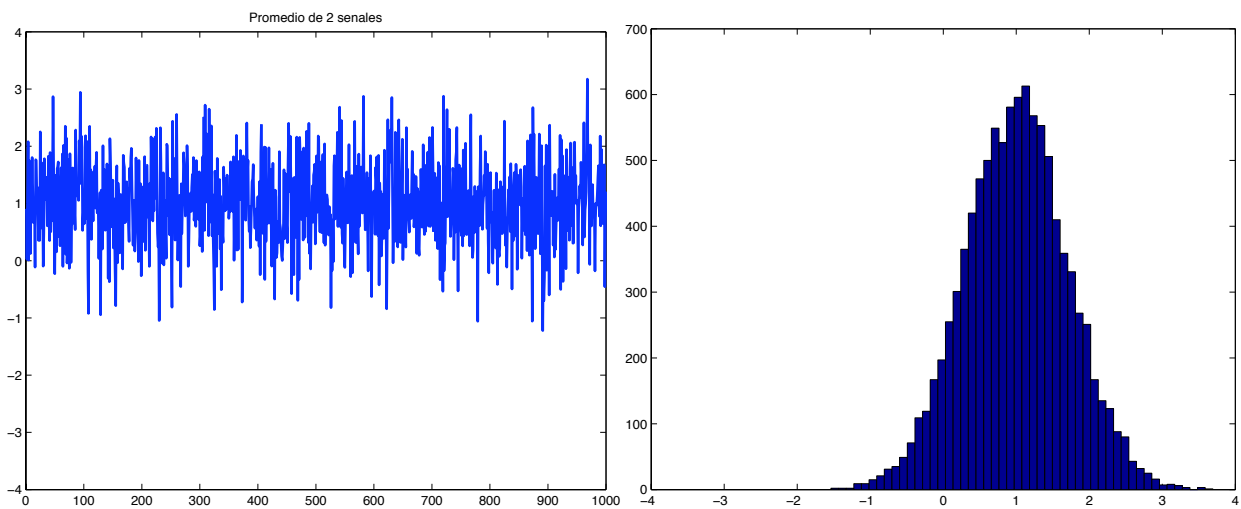
Realizaciones 1 variable aleatoria gaussiana

- Variable aleatoria gaussiana: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



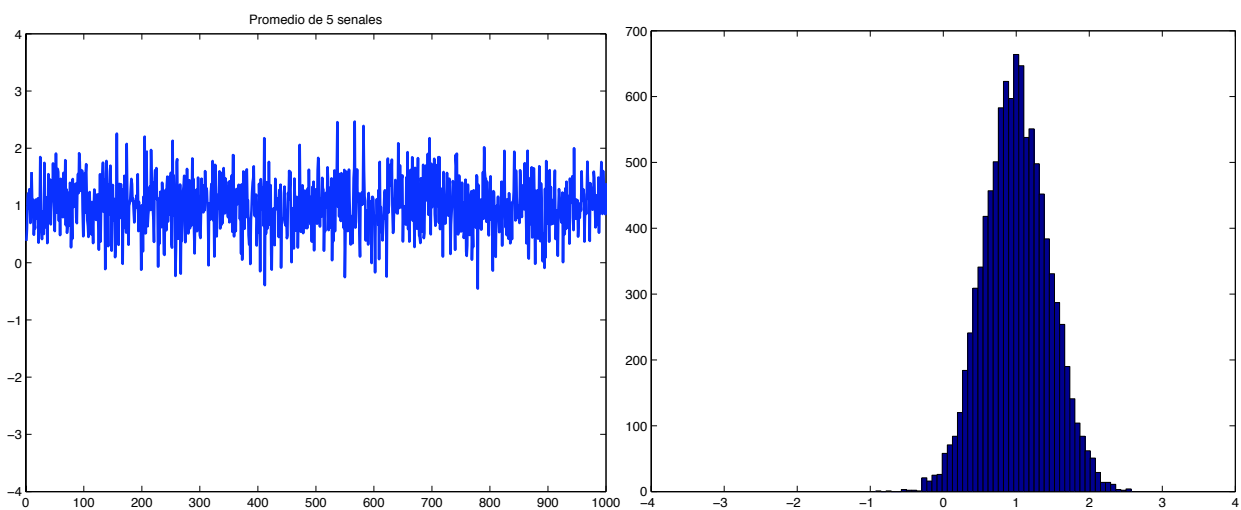
Promedio de 2 variables aleatorias gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



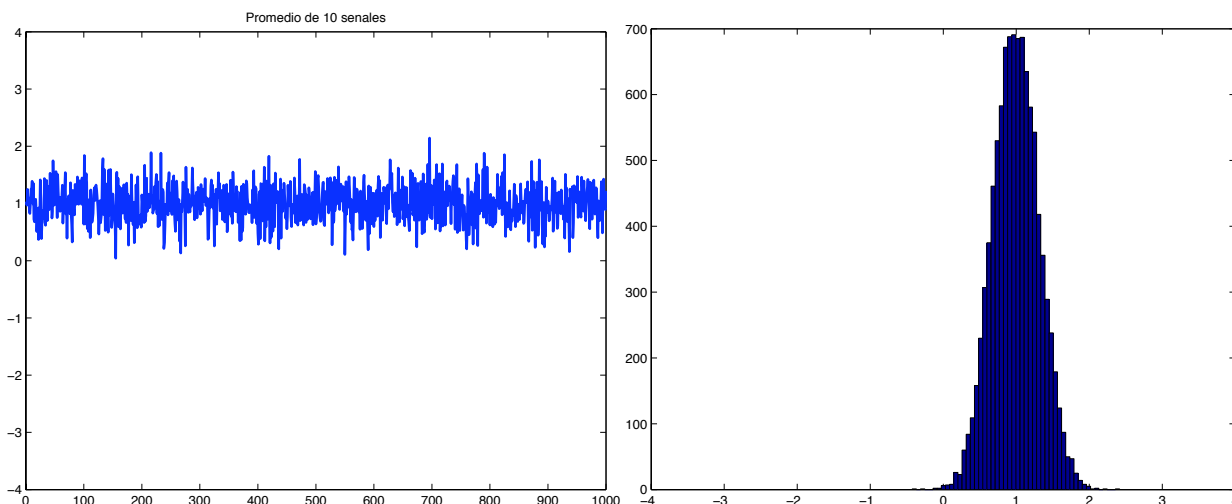
Promedio de 5 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



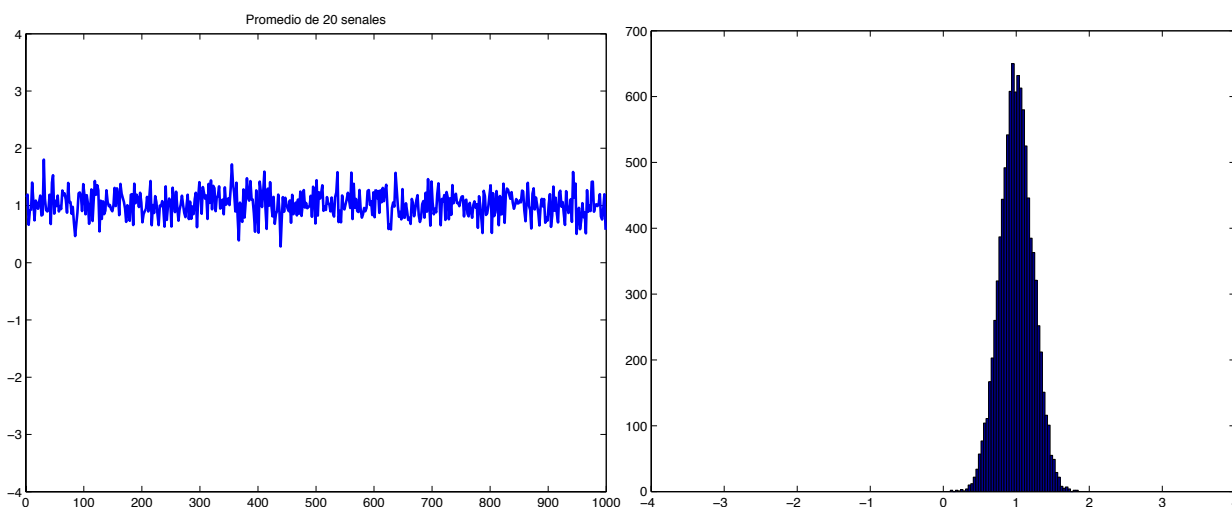
Promedio de 10 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



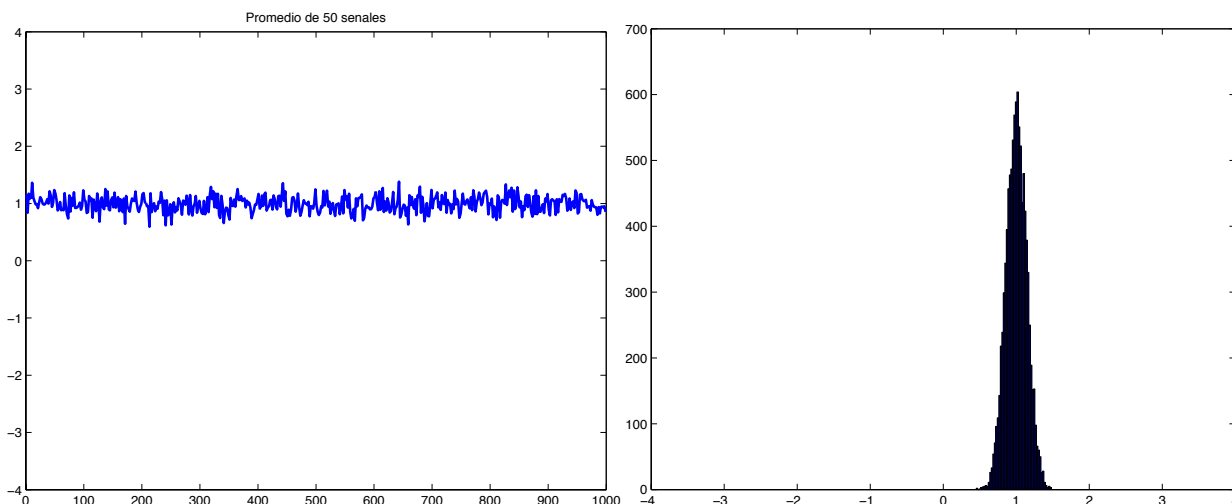
Promedio de 20 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



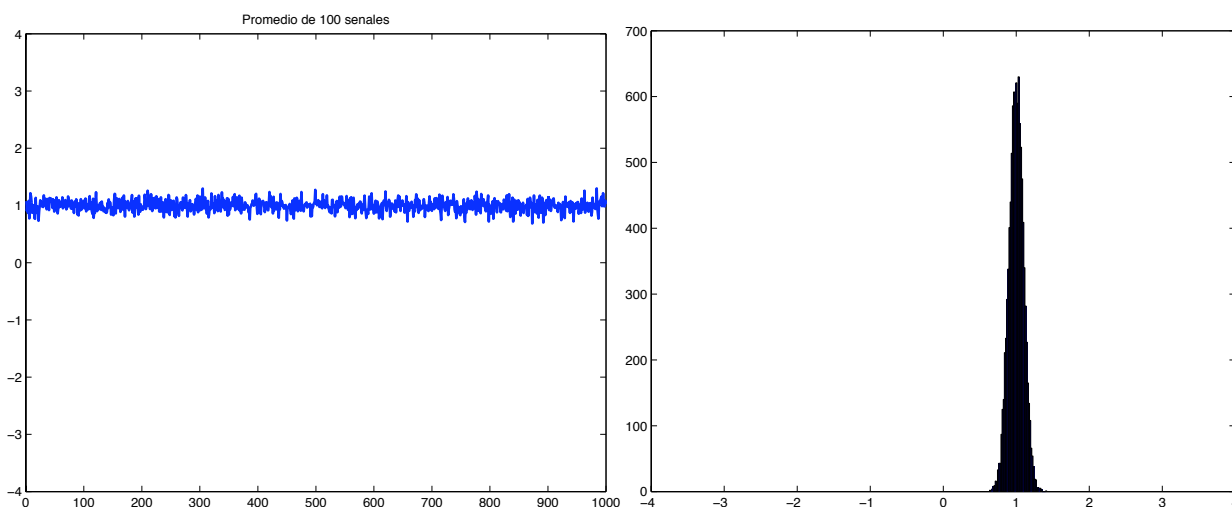
Promedio de 50 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



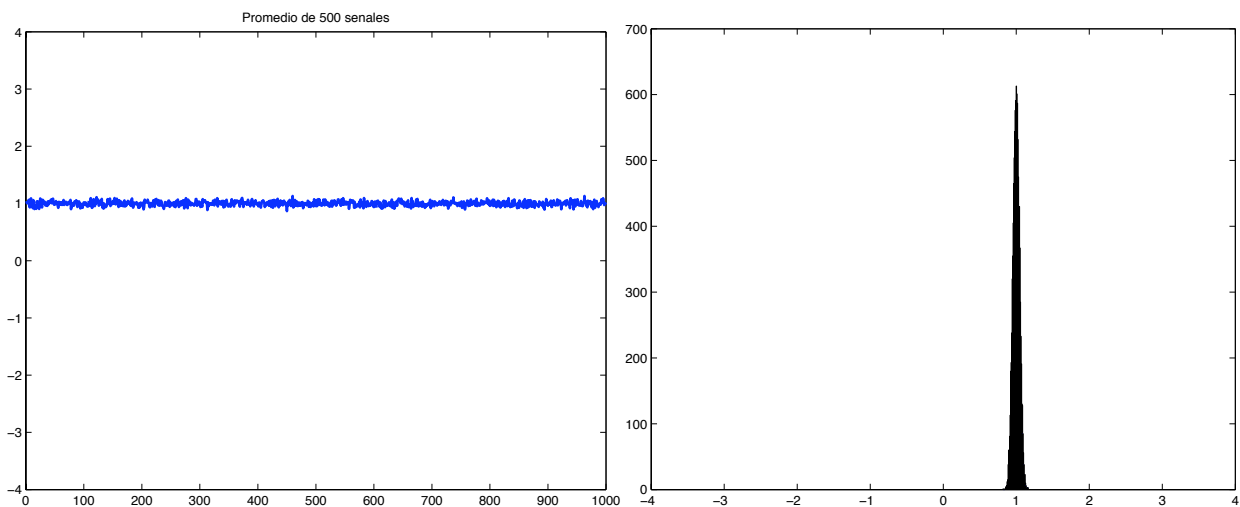
Promedio de 100 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



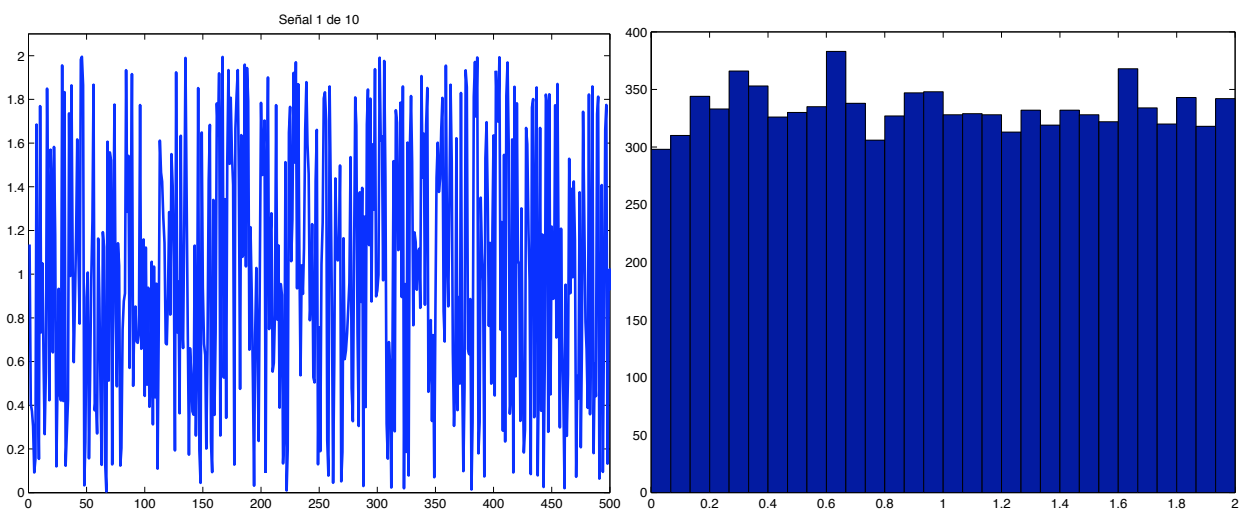
Promedio de 500 v. a. gaussianas (realizaciones)

- Variables aleatorias gaussianas: media $m_X = 1$, varianza $\sigma_X^2 = 1$



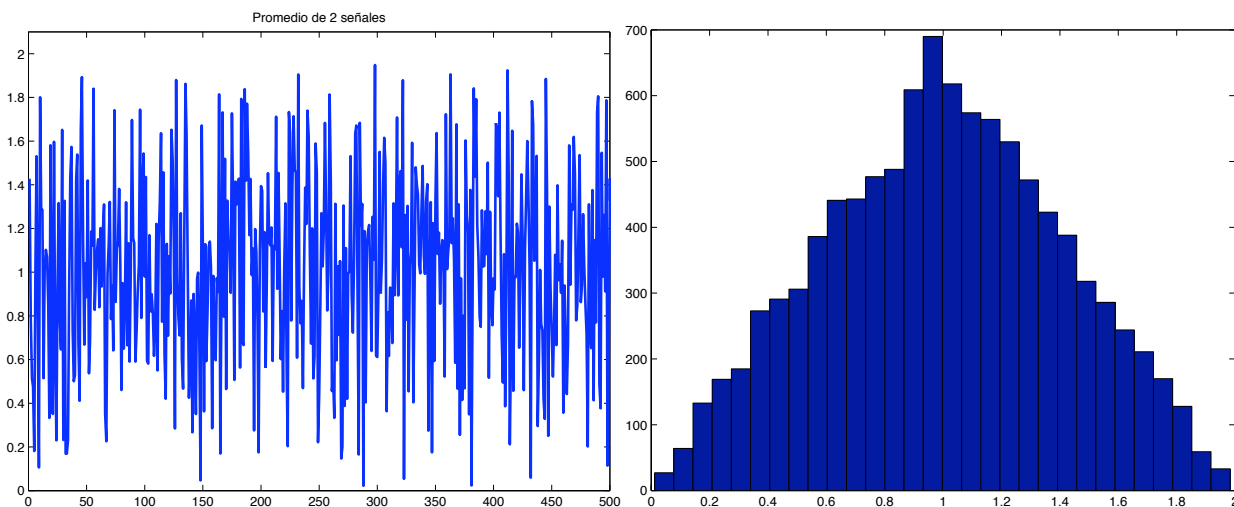
Realizaciones de 1 variable aleatoria uniforme

- Variable aleatoria uniforme entre 0 y 2



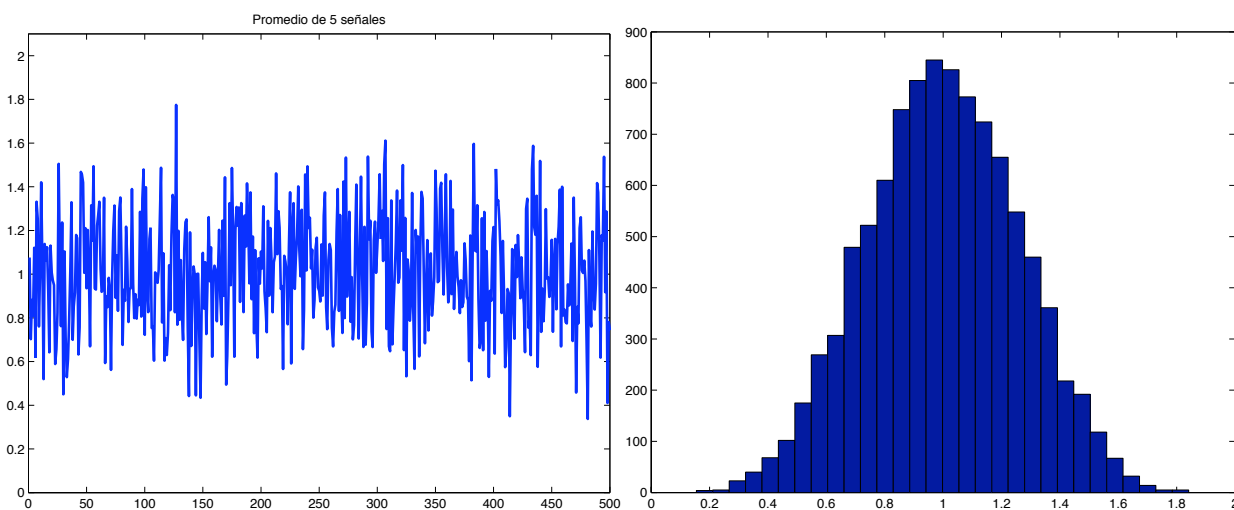
Promedio de 2 variables aleatorias uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



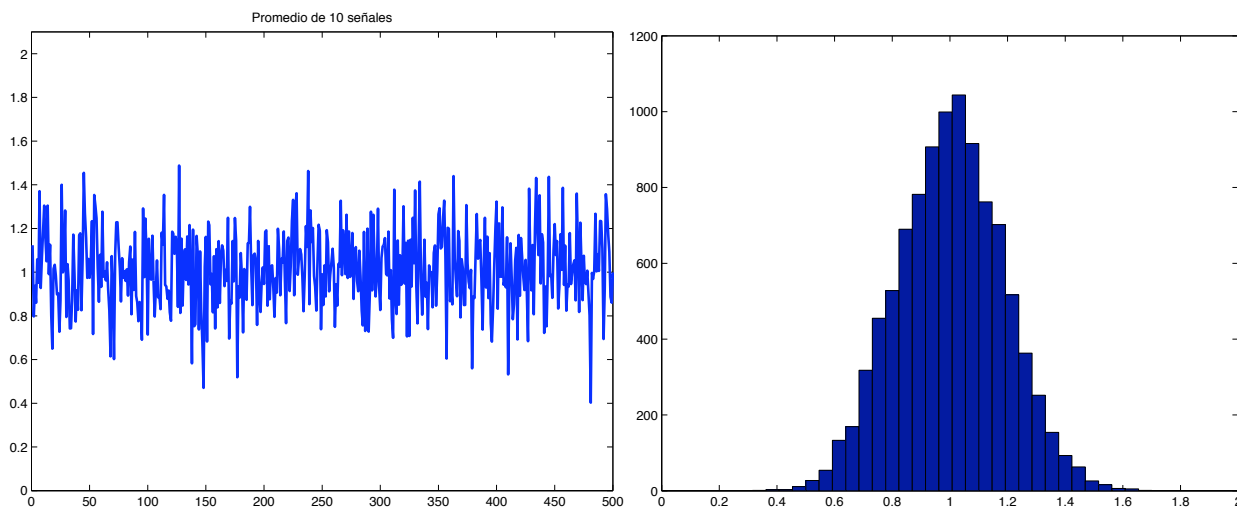
Promedio de 5 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



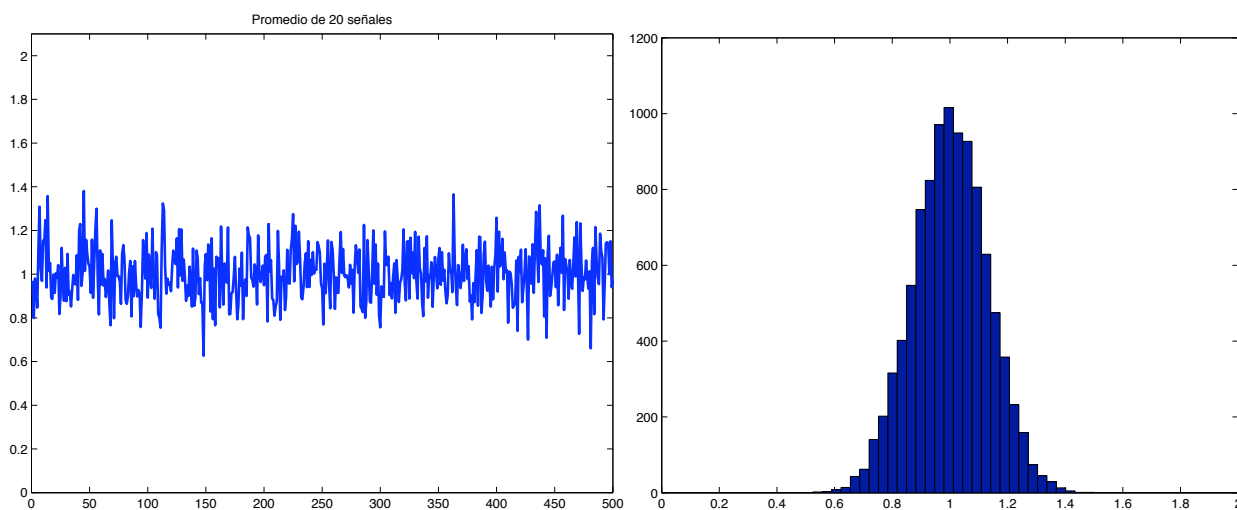
Promedio de 10 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



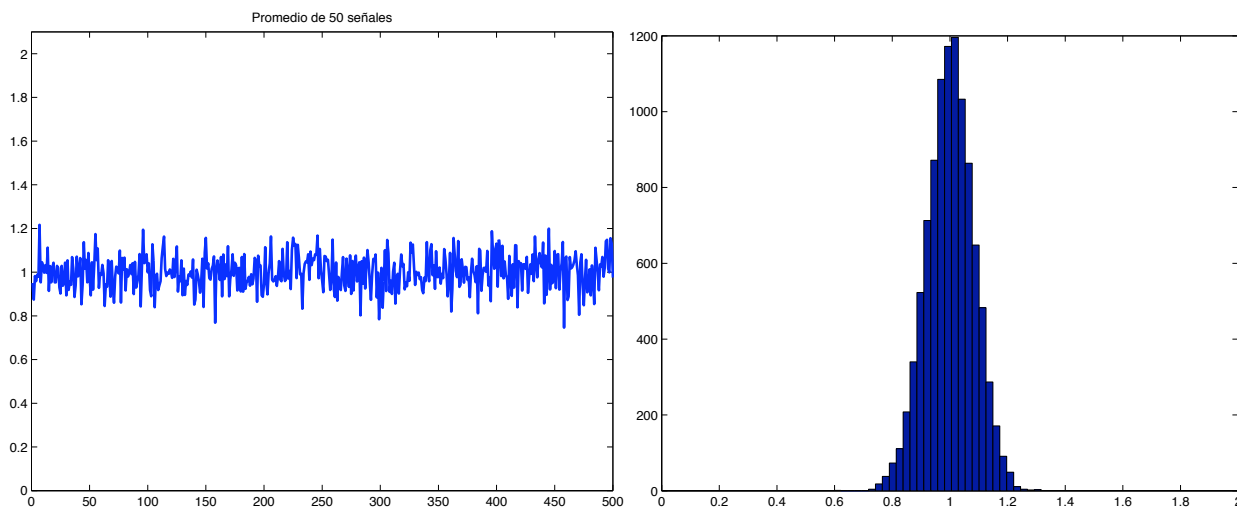
Promedio de 20 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



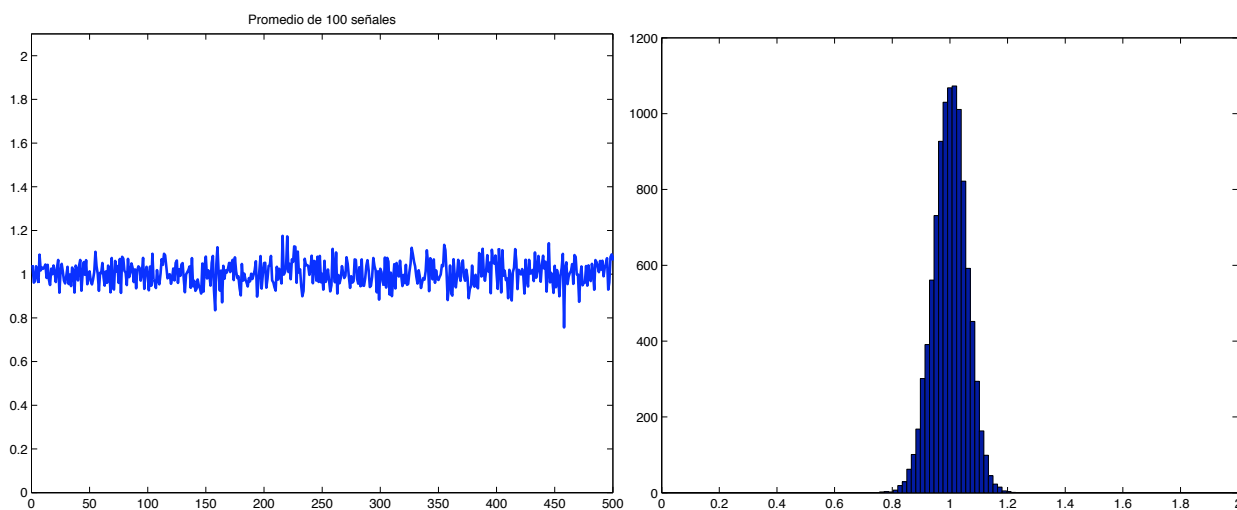
Promedio de 50 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Promedio de 100 v. a. uniformes (realizaciones)

- Variables aleatorias uniformes entre 0 y 2.



Procesos aleatorios

- Extensión de v.a. incluyendo dependencia temporal

- ▶ Variable aleatoria

$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(\lambda)$$

- ▶ Proceso aleatorio

$$\lambda \in \Omega \rightarrow X(t, \lambda)$$

- Particularizaciones

- ▶ $X(t_i, \lambda_j)$: realización individual
- ▶ $X(t, \lambda_i)$: señal temporal asociada a $\lambda_i, x_i(t)$
- ▶ $X(t_i, \lambda)$: variable aleatoria ($X(\lambda)$)

- Notación: $X(t)$ o $X[n]$

- Interpretación: Conjunto indexado de variables aleatorias

- ▶ Índice continuo ($t \in \mathbf{R}$): Proceso aleatorio continuo
- ▶ Índice discreto ($n \in \mathbf{Z}$): Proceso aleatorio discreto

Descripción de un proceso aleatorio

- Descripción analítica

$$X(t) = f(t, \boldsymbol{\theta})$$

$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$: vector de variables aleatorias

- ▶ Ecuación $f(t, \boldsymbol{\theta})$ y descripción estadística de $\boldsymbol{\theta}$

- Descripción estadística

- ▶ Completa: $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n, \forall n$

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ▶ De orden M : $\forall n \leq M, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n$

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Esperanzas de los procesos (promedios estadísticos)

- Media de un proceso

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X(t)}(x) dx$$

- Función de autocorrelación de un proceso

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)]$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

Estacionariedad y cicloestacionariedad

- Estacionariedad en sentido estricto: $\forall (t_1, t_2, \dots, t_n), \forall n, \forall \Delta$

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X(t_1+\Delta), X(t_2+\Delta), \dots, X(t_n+\Delta)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ▶ Estacionariedad de orden M : para $n \leq M$

- Estacionariedad en sentido amplio

- 1 $m_X(t) = m_X$ (no depende de t)
- 2 $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2) = R_X(\tau)$ (definiendo $\tau = t_1 - t_2$)
También se suele denotar $R_X(t + \tau, t) = R_X(\tau)$

- Cicloestacionariedad

- 1 $m_X(t + T_o) = m_X(t)$
- 2 $R_X(t + \tau + T_o, t + T_o) = R_X(t + \tau, t)$, para todo t y τ

Autocorrelación de procesos estacionarios

La función de autocorrelación de un proceso estacionario $X(t)$, $R_X(\tau)$, tiene las siguientes propiedades:

- Es una función par

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau)$$

- El máximo en módulo se obtiene en $\tau = 0$

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

- Si para algún T_o se cumple $R_X(T_o) = R_X(0)$, entonces para todo entero k

$$R_X(kT_o) = R_X(0)$$

- Es una función semidefinida positiva (se verá más tarde)

Ergodicidad

- Promedios para un proceso $X(t)$ y una función $g(x)$:

- 1 Promedio estadístico

$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X(t)}(x) \cdot dx$$

Este valor es, en general, dependiente de t .

- 2 Promedio temporal de $x(t, \omega_i)$

$$\langle g(x) \rangle_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt$$

Independiente de t , pero en general dependiente de ω_i

- $X(t)$ estacionario es ergódico, si $\forall g(x)$ y $\forall \omega_i \in \Omega$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t, \omega_i)) \cdot dt = E[g(X(t))]$$

Potencia y Energía

- Energía del proceso aleatorio $X(t)$, E_X

$$E_X = E[\mathcal{E}_X], \quad \mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt$$

- Potencia del proceso aleatorio $X(t)$, P_X

$$P_X = E[\mathcal{P}_X], \quad \mathcal{P}_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt$$

- ▶ Un proceso aleatorio es de energía si $E_X < \infty$
- ▶ Un proceso aleatorio es de potencia si $0 < P_X < \infty$

Potencia y energía (II)

$$E_X = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} X^2(t) \cdot dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X^2(t)] \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t, t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned} P_X &= E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) \cdot dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E[X^2(t)] \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t, t) \cdot dt \end{aligned}$$

Para *procesos aleatorios estacionarios* $R_X(t, t) = R_X(0)$

$$P_X = R_X(0), \quad E_X = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(0) \cdot dt$$

Procesos estacionarios de interés: de potencia

Procesos aleatorios multidimensionales (múltiples)

- Independencia: $X(t)$ e $Y(t)$ son *independientes* si $\forall t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ son independientes
- Incorrección: $X(t)$ e $Y(t)$ están *incorreladas* si $\forall t_1, t_2$, $X(t_1)$ y $Y(t_2)$ están incorreladas
- Función de correlación cruzada

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot Y(t_2)]$$

En general

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{Y,X}(t_2, t_1)$$

- Estacionariedad conjunta: $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente estacionarios* si
 - ▶ Ambos son individualmente estacionarios
 - ▶ $R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(\tau)$, con $\tau = t_1 - t_2$
 - ★ Notación alternativa: $R_{X,Y}(t + \tau, t) = R_{X,Y}(\tau)$

Procesos aleatorios en el dominio de la frecuencia

- Espectro de una de las señales del proceso aleatorio

$$x_i(t) = X(t, \lambda_i) \rightarrow X_i(j\omega) = \mathcal{TF}\{x_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

- ▶ No todas las señales tienen definida una transformada de Fourier

- Definición de señales truncadas de duración T

$$x_i^{[T]}(t) = \begin{cases} x_i(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Las señales truncadas sí tienen definida la transformada

$$\begin{aligned} X_i^{[T]}(j\omega) &= \mathcal{TF}\{x_i^{[T]}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^{[T]}(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_i(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \end{aligned}$$

Densidad espectral de potencia

- Proceso aleatorio truncado de duración T

$X^{[T]}(t)$: Proceso cuyas señales son $X^{[T]}(t, \lambda_i) = x_i^{[T]}(t)$ (truncadas)

- Proceso aleatorio truncado en el dominio de la frecuencia

$X^{[T]}(j\omega)$: Proceso cuyas señales son las TF de $x_i^{[T]}(t)$, i.e., $X_i^{[T]}(j\omega)$

- Densidad espectral de potencia de $X(t)$

$$S_X(j\omega) \stackrel{\text{def}}{=} E \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X^{[T]}(j\omega)|^2}{T} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|X^{[T]}(j\omega)|^2 \right]}{T}$$

Representación del comportamiento medio del módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de todas las señales que componen el proceso aleatorio (con el "truco" de truncar para asegurar la existencia de dicha transformada de Fourier para todas las señales, y llevando la longitud de truncado al límite)

Teorema de Wiener-Khinchin

Si para cualquier valor finito τ y cualquier intervalo \mathcal{A} , de longitud $|\tau|$, la autocorrelación del proceso aleatorio cumple

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_X(t + \tau, t) dt \right| < \infty$$

la densidad espectral de potencia de $X(t)$ es la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF} \{ \langle R_X(t + \tau, t) \rangle \}$$

siendo el promedio temporal de la función de autocorrelación

$$\langle R_X(t + \tau, t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(t + \tau, t) dt$$

Teorema de Wiener-Khinchin - Corolarios

- Corolario 1: Si $X(t)$ es un proceso estacionario y $\tau \cdot R_X(\tau) < \infty$ para todo $\tau < \infty$, entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}[R_X(\tau)]$$

- Corolario 2: Si $X(t)$ es cicloestacionario y se cumple que

$$\left| \int_0^{T_o} R_X(t + \tau, t) \cdot dt \right| < \infty$$

entonces

$$S_X(j\omega) = \mathcal{TF}[\tilde{R}_X(\tau)]$$

donde

$$\tilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_o} \int_{T_o} R_X(t + \tau, t) \cdot dt$$

y T_o es el período del proceso cicloestacionario

Potencia de un proceso aleatorio

- En el dominio de la frecuencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega$$

- En el dominio del tiempo

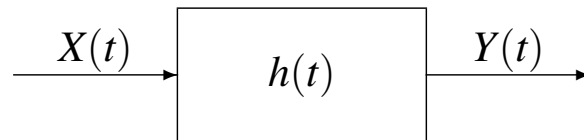
- ▶ Proceso estacionario

$$P_X = R_X(0)$$

- ▶ Proceso cicloestacionario

$$P_X = \tilde{R}_X(0)$$

Procesos aleatorios estacionarios y sistemas lineales



Teorema: $X(t)$ es estacionario, de media m_X y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. El proceso pasa a través de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)$. En este caso, *los procesos de entrada y salida, $X(t)$ e $Y(t)$, son conjuntamente estacionarios, siendo*

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot dt$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

Además, se puede comprobar que

$$R_Y(\tau) = R_{X,Y}(\tau) * h(\tau)$$

Media del proceso de salida

Se parte de que

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t-s) \cdot ds \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s)] \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} m_X \cdot h(t-s) \cdot ds \\ &\stackrel{u=t-s}{=} m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot du \end{aligned}$$

Correlación cruzada $R_{X,Y}(\tau)$

$$\begin{aligned}R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1) \cdot Y(t_2)] \\&= E \left[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t_2 - s) \cdot ds \right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1) \cdot X(s)] \cdot h(t_2 - s) \cdot ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - s) \cdot h(t_2 - s) \cdot ds \\&\stackrel{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - t_2 - u) \cdot h(-u) \cdot du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau - u) \cdot h(-u) \cdot du \\&= R_X(\tau) * h(-\tau)\end{aligned}$$

Correlación de salida $R_Y(\tau)$

$$\begin{aligned}R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1) \cdot Y(t_2)] \\&= E \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(s) \cdot h(t_1 - s) \cdot ds \right) \cdot Y(t_2) \right] \\&= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(s) \cdot Y(t_2)] \cdot h(t_1 - s) \cdot ds \\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(s - t_2) \cdot h(t_1 - s) \cdot ds \\&\stackrel{u=s-t_2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u) \cdot h(t_1 - t_2 - u) \cdot du \\&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(u) \cdot h(\tau - u) \cdot du \\&= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) \\&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)\end{aligned}$$

Relaciones en el dominio frecuencial

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot H(0)$$

- Densidad espectral del proceso de salida

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2$$

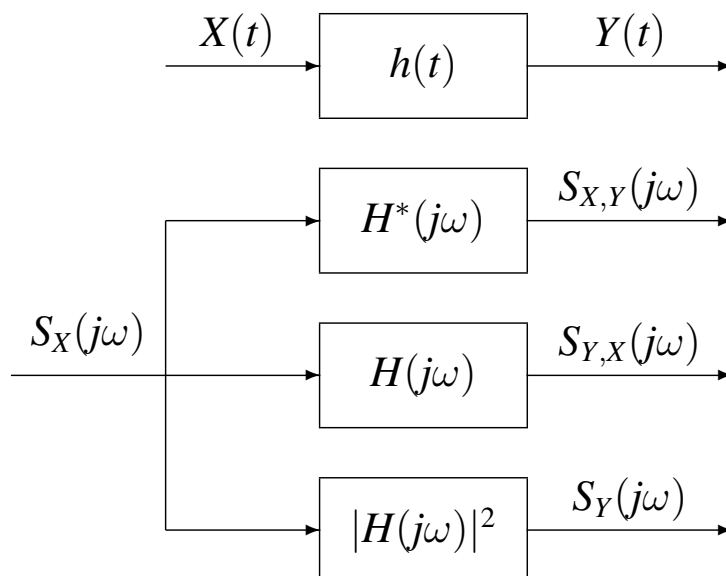
- Densidades espectrales cruzadas

$$S_{X,Y}(j\omega) \stackrel{def}{=} \mathcal{TF}[R_{X,Y}(\tau)]$$

$$S_{X,Y}(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot H^*(j\omega)$$

$$S_{Y,X}(j\omega) = S_{X,Y}^*(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

Relaciones entre densidades espectrales de potencia



Procesos aleatorios discretos

- Notación: $X[n]$
- Promedios estadísticos
 - ▶ Media: $m_X[n] = E[X[n]]$
 - ▶ Autocorrelación: $R_X[n+k, n] = E[X[n+k] \cdot X[n]]$
- Estacionariedad:
 - ▶ Estadísticos independientes del índice temporal n
 - ▶ Media: $m_X[n] = m_X$
 - ▶ Autocorrelación: $R_X[n+k, n] = R_X[k]$
- Cicloestacionariedad:
 - ▶ Estadísticos periódicos de período N
 - ▶ Media: $m_X[n+N] = m_X[n]$
 - ▶ Autocorrelación: $R_X[n+k+N, n+N] = R_X[n+k, n]$

Procesos aleatorios discretos - Espectro y potencia

- Densidad espectral de potencia
 - ▶ Procesos estacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF} \{R_X[k]\}$$

- ▶ Procesos cicloestacionarios

$$S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{TF} \{\tilde{R}_X[k]\}, \quad \tilde{R}_X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} R_X[n+k, n]$$

- ▶ Potencia

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{j\omega}) d\omega = \begin{cases} R_X[0], & X[n] \text{ estacionario} \\ \tilde{R}_X[0], & X[n] \text{ cicloestacionario} \end{cases}$$

Procesos aleatorios discretos - Sistemas lineales

- Media del proceso de salida

$$m_Y = m_X \cdot \sum_n h[n] = m_X \cdot H(0)$$

- Autocorrelación del proceso de salida

$$R_Y[k] = R_X[k] * h[k] * h[-k]$$

- Densidad espectral de potencia del proceso de salida

$$S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$$

- Estadísticos cruzados

$$R_{X,Y}[k] = R_X[k] * h[-k]$$

$$S_{X,Y}(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega})$$

Suma de procesos aleatorios

- $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios
- Proceso suma: $Z(t) = X(t) + Y(t)$
 - ▶ Media del proceso

$$m_Z(t) = E[Z(t)] = E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = m_X + m_Y = m_Z$$

- ▶ Función de autocorrelación

$$\begin{aligned} R_Z(t + \tau, t) &= E[Z(t + \tau) \cdot Z(t)] \\ &= E[(X(t + \tau) + Y(t + \tau)) \cdot (X(t) + Y(t))] \\ &= E[X(t + \tau) \cdot X(t)] + E[X(t + \tau) \cdot Y(t)] \\ &\quad + E[Y(t + \tau) \cdot X(t)] + E[Y(t + \tau) \cdot Y(t)] \\ &= R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) + R_Y(\tau) \\ &= R_X(\tau) + R_Y(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) = R_Z(\tau) \end{aligned}$$

- ★ Proceso aleatorio $Z(t)$ es estacionario
 - ▶ Densidad espectral de potencia

$$\begin{aligned} S_Z(j\omega) &= S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + S_{X,Y}(j\omega) + S_{Y,X}(j\omega) \\ &= S_X(j\omega) + S_Y(j\omega) + 2 \cdot \text{Re}[S_{X,Y}(j\omega)] \end{aligned}$$

Suma de procesos aleatorios - Incorrelados

- Relación (covarianza / correlación) para procesos conjuntamente estacionarios

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(t + \tau), Y(t)) &= E[(X(t + \tau) - m_X) \cdot (Y(t) - m_Y)] \\ &= \underbrace{E[X(t + \tau) \cdot Y(t)]}_{R_{X,Y}(\tau)} - m_Y \cdot \underbrace{E[X(t + \tau)]}_{m_X} \\ &\quad - m_X \cdot \underbrace{E[Y(t)]}_{m_Y} + m_X \cdot m_Y \\ &= R_{X,Y}(\tau) - m_X \cdot m_Y \end{aligned}$$

- Procesos incorrelados:

Por definición : $\text{Cov}(X(t + \tau), Y(t)) = 0, \forall \tau$

Consecuencia : $R_{X,Y}(\tau) = m_X \cdot m_Y$

- ▶ Si al menos uno de los procesos (incorrelados) tiene media nula

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau)$$

$$S_Z(j\omega) = S_X(j\omega) + S_Y(j\omega)$$

Proceso gaussiano

- Definición: $X(t)$ es un *proceso gaussiano* si para todo n y todo $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, las variables aleatorias $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ tienen una distribución conjuntamente gaussiana
- Propiedades de los procesos gaussianos
 - ▶ $m_X(t)$ y $R_X(t_1, t_2)$, proporcionan una descripción estadística completa del proceso
 - ★ Permiten calcular vector de medias y matriz de covarianzas
 - Para $X(t_i), \Rightarrow \mu_i = m_X(t_i)$
 - $X(t_i), X(t_j), \Rightarrow C_{i,j} = \text{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i) \cdot m_X(t_j)$
 - ▶ Para procesos gaussianos, estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio son equivalentes
 - ▶ Si $X(t)$ pasa por un sistema lineal e invariante, el proceso de salida, $Y(t)$ es gaussiano
 - ▶ Para $X(t)$ gaussiano, estacionario y de media nula, una condición suficiente para la ergodicidad de $X(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$$

Procesos aleatorios conjuntamente gaussianos

- Definición: Los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son *conjuntamente gaussianos*, si para todo n, m , y todo $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ y $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$, las variables aleatorias

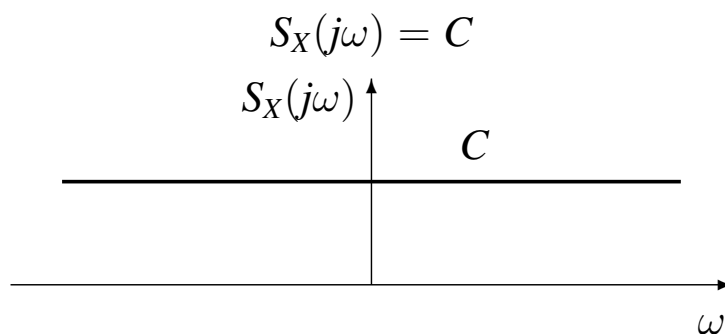
$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n), Y(\tau_1), Y(\tau_2), \dots, Y(\tau_m),$$

tienen una distribución conjuntamente gaussiana (de dimensión $n + m$)

- Propiedad: Para procesos conjuntamente gaussianos, incorrelación e independencia son equivalentes

Proceso blanco

- Un proceso es blanco si su densidad espectral de potencia es constante para todas las frecuencias



► Consecuencias

- ★ Función de autocorrelación de un proceso blanco estacionario

$$R_X(\tau) = \mathcal{TF}^{-1} \{C\} = C \cdot \delta(\tau)$$

- ★ La potencia de un proceso blanco es infinita

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C d\omega = \infty$$

Filtrado de un proceso blanco

- Proceso $X(t)$ blanco con $S_X(j\omega) = C$ se filtra ($h(t) / H(j\omega)$)
- Densidad espectral de potencia a la salida del filtro ($Y(t)$)

$$S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2 = C \cdot |H(j\omega)|^2$$

- ▶ En general el proceso $Y(t)$ no es blanco
- Función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_X(\tau) * r_h(\tau) = C \cdot r_h(\tau)$$

- Potencia del proceso

$$P_Y = R_Y(0) = C \cdot r_h(0)$$

- ▶ Como por definición $r_h(0) = \mathcal{E}\{h(t)\}$

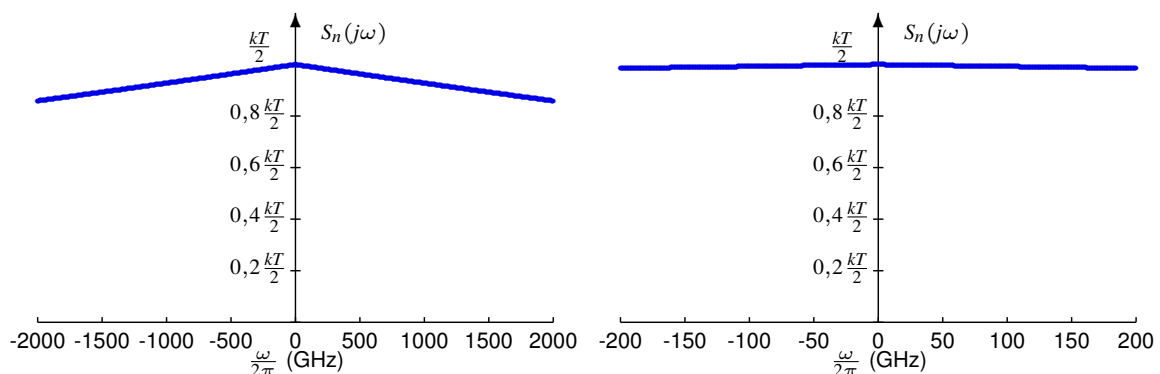
$$P_Y = C \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}$$

Ruido térmico

- Densidad espectral de potencia del ruido térmico (mecánica cuántica)

$$S_n(j\omega) = \frac{h\omega}{4\pi(e^{\frac{h\omega}{2\pi kT}} - 1)}$$

donde $\left\{ \begin{array}{l} h: \text{Constante de Planck } (6.6 \times 10^{-34} \text{ Julios} \times \text{segundo}) \\ k: \text{Constante de Boltzmann } (1.38 \times 10^{-23} \text{ Julios/}^\circ\text{Kelvin}) \\ T: \text{Temperatura en grados Kelvin} \\ \omega: \text{Pulsación } (2\pi \text{ veces la frecuencia) en rad/s} \end{array} \right.$



- Estadística gaussiana

Modelo de ruido térmico

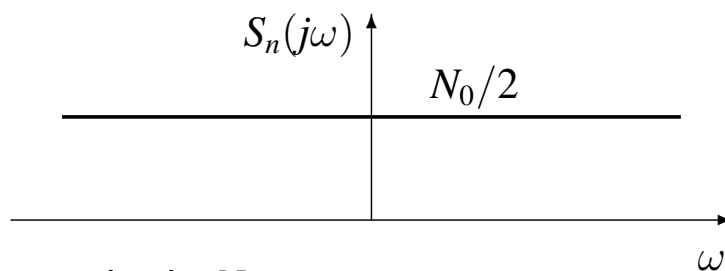
- Proceso aleatorio $n(t)$ blanco, gaussiano, estacionario, ergódico

- ▶ Media nula ($m_n = 0$)
- ▶ Función de autocorrelación

$$R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$$

- ▶ Densidad espectral de potencia

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$$

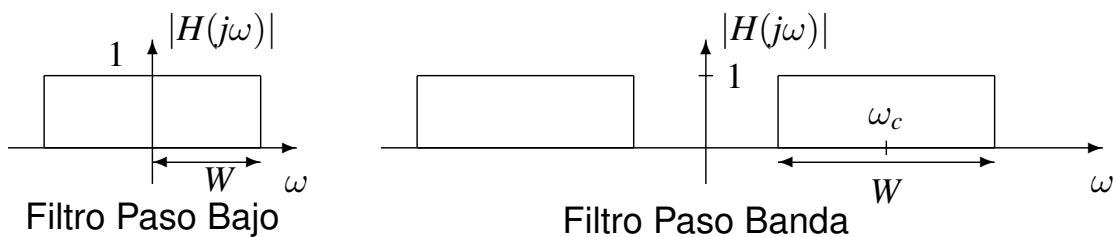


- Valor de la constante N_0

$$N_0 = k \cdot T^a \text{ Watt/Hz}$$

Potencia de ruido térmico a la salida de filtros ideales

- Filtros ideales de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s): filtro paso bajo o filtro paso banda con frecuencia central f_c Hz (o $\omega_c = 2\pi f_c$ rad/s)



- Proceso de salida de los filtros

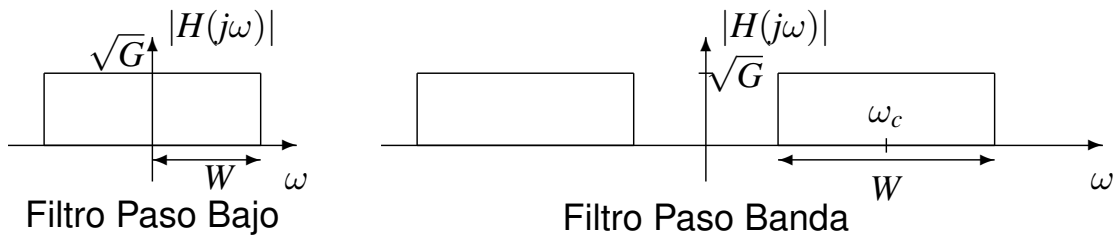
$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2B} = N_0 \cdot B$$

Potencia de ruido térmico en filtros ideales con ganancia

- Filtros ideales (paso bajo/paso banda) de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s) y con ganancia en potencia G (ganancia en voltaje \sqrt{G})



- Proceso de salida de los filtros

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de la salida de los filtros

$$P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(j\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}=2BG} = N_0 \cdot B \cdot G$$

Ancho de banda equivalente de ruido

- Salida de un sistema lineal (respuesta $h(t)$, $H(j\omega)$)

$$\text{Proceso } Z(t) \text{ con } S_Z(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot |H(j\omega)|^2$$

- Potencia de ruido a la salida de un sistema lineal

$$P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega}_{\mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Potencia de ruido en función del ancho de banda equivalente de ruido

$$P_Z = N_0 \cdot B_{eq} \cdot G_{eq}$$

- ▶ B_{eq} : Ancho de banda equivalente de ruido
- ▶ G_{eq} : Ganancia en potencia equivalente

$$G_{eq} = H_{max}^2, \text{ con } H_{max} = \max_{\omega} |H(j\omega)|$$

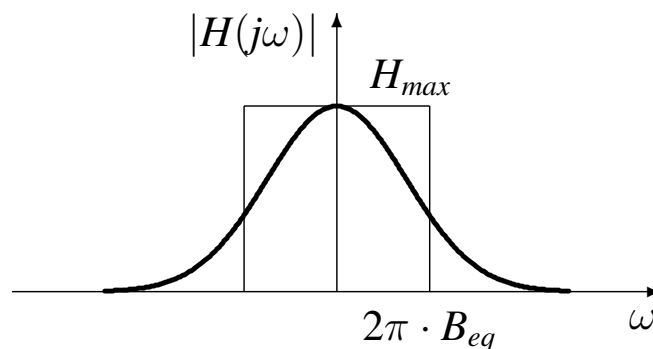
Ancho de banda equivalente de ruido - Identificación

- Identificación del valor de B_{eq}

$$B_{eq} = \frac{\mathcal{E}\{h(t)\}}{2 \cdot G_{eq}}$$

$$\mathcal{E}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$$

- Interpretación: Un sistema lineal ideal, de ancho de banda B_{eq} y amplitud H_{max} ($\sqrt{G_{eq}}$) tiene la misma potencia de ruido a la salida que el filtro $h(t)$



Relación señal a ruido (a la salida de un filtro)

- Señal a la entrada del filtro: Proceso $X(t)$, potencia P_X
- Ruido a la entrada del filtro: modelo de ruido térmico $n(t)$
- Filtro (normalmente en el receptor): respuestas $h(t)$ y $H(j\omega)$
- Señal a la salida del filtro receptor: Proceso $Y(t)$
- Ruido a la salida del filtro receptor: Proceso $Z(t)$
- Relación señal a ruido

$$\frac{S}{N} = \frac{P_Y}{P_Z}, \quad \frac{S}{N}(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{P_Y}{P_Z}$$

- ▶ Pot. señal: $P_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) \cdot |H(j\omega)|^2 d\omega$
- ▶ Potencia ruido: $P_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Z(j\omega) d\omega = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega$
 - ★ Filtros ideales (sin ganancia | con ganancia)

$$P_Z = N_0 \cdot B \quad | \quad P_Z = N_0 \cdot B \cdot G$$

- ★ Filtro con ancho de banda equivalente B_{eq} y ganancia G_{eq}

$$P_Z = N_0 \cdot B_{eq} \cdot G_{eq}$$



Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 3

MODULACIONES ANALÓGICAS

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



107 / 418

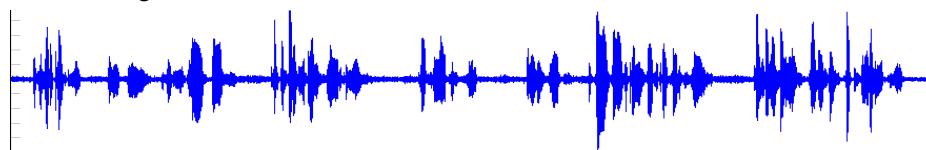
Índice de contenidos

- Introducción al concepto de modulación
- Modulaciones de amplitud (AM)
 - ▶ Modulación AM convencional
 - ▶ Modulación de doble banda lateral (DBL)
 - ▶ Modulación de banda lateral única (BLU)
 - ▶ Modulación de banda lateral vestigial (BLV)
- Modulaciones angulares
 - ▶ Modulación de fase (PM)
 - ▶ Modulación de frecuencia (FM)
- Efecto del ruido en modulaciones analógicas

Sistemas de comunicaciones analógicos

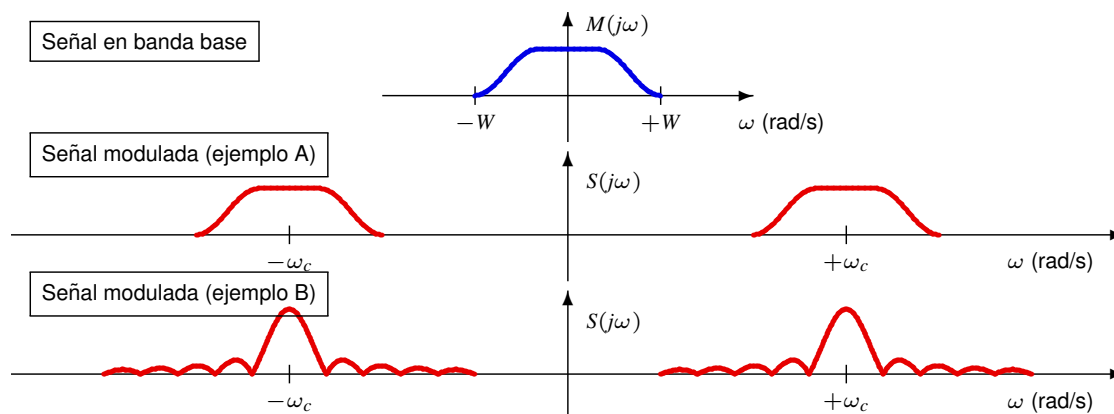
- Señal de información (moduladora): $m(t)$

- ▶ Señal analógica: la información está en la forma de onda



- Modos de transmisión en sistemas analógicos

- ▶ Transmisión en banda base (sin modular)
- ▶ Transmisión de la señal modulada
 - Se traslada el espectro de la señal (frecuencia central o de portadora ω_c)
 - Se puede modificar o no la forma o ancho de banda del espectro de la señal



Introducción al concepto de modulación

- Modulación analógica: se imprime la señal analógica en la amplitud, frecuencia o fase de una portadora sinusoidal

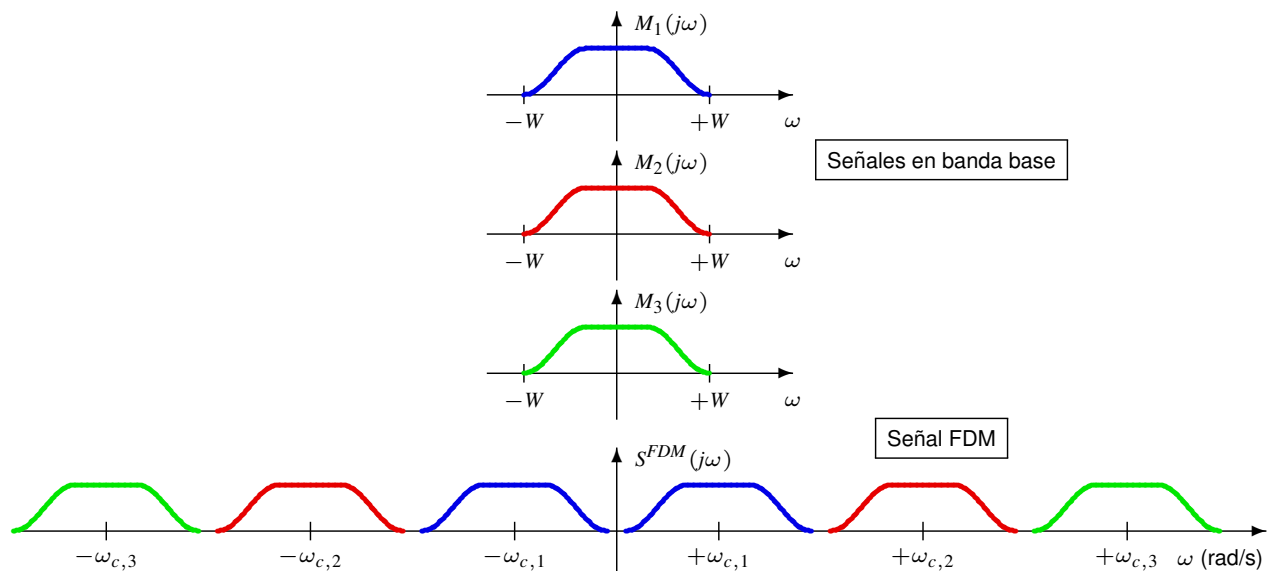
$$c(t) = A_c \cdot \cos(\underbrace{2\pi f_c t}_{\omega_c} + \phi_c)$$

- Propósito de la modulación de una señal analógica

- ▶ Adecuar la señal a las características del canal cambiando el rango de frecuencias
- ▶ Multiplexar: acomodar la transmisión simultánea de distintas señales en un mismo medio
 - ★ Multiplexación por división en frecuencia (FDM)
- ▶ Expandir el ancho de banda para aumentar la inmunidad al ruido

Multiplexación por división en frecuencia (FDM)

- Se envía el espectro de distintas señales a distintas bandas de frecuencia de forma que no se solapen (en frecuencia)
- En el receptor, se filtra el espectro de cada señal y se devuelve a banda base, lo que permite recuperar cada señal



Tipos de modulaciones analógicas

- Modulación de amplitud (AM)
AM: *Amplitude Modulation*

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Modulaciones angulares
 - ▶ Modulación de frecuencia (FM)
FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- ▶ Modulación de fase (PM)
PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

Señal analógica a transmitir: señal moduladora $m(t)$

- Caso determinista: características de la señal
 - ▶ Señal paso bajo de ancho de banda B Hz (o $W = 2\pi B$ rad/s)
 - ★ Transformada de Fourier $M(j\omega)$ con $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Es una señal de potencia. Su potencia es

$$P_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |m(t)|^2 dt$$

- Caso aleatorio: análisis estadístico (señal “promedio”)
 - ▶ Modelo para la señal: proceso aleatorio $M(t)$
 - ▶ Proceso aleatorio estacionario en sentido amplio (WSS)
 - ▶ Media nula
 - ▶ Función de autocorrelación $R_M(\tau)$
 - ▶ Densidad espectral de potencia $S_M(j\omega)$
 - ▶ Proceso limitado en banda: $S_M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$
 - ▶ Potencia: P_M

$$P_M = R_M(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_M(j\omega) d\omega$$

Modulaciones de amplitud (AM)

- La señal moduladora (o mensaje) $m(t)$ se imprime en la amplitud de la señal portadora $c(t)$, es decir, en A_c

$$c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$A_c \rightarrow A_c(t) = f(m(t))$$

- Existen distintas variantes de modulación AM
 - ▶ AM: Modulación AM convencional (con portadora)
 - ▶ DBL: Doble Banda Lateral (sin portadora)
 - ▶ BLU: Banda Lateral Única
 - ▶ BLV: Banda Lateral Vestigial

Modulación AM convencional

- Portadora + AM doble banda lateral (DBL)

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Portadora } c(t)} + \underbrace{m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)}_{\text{Doble banda lateral (DBL): } m(t) \times c(t)}$$

$$s(t) = A_c \cdot [1 + m(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- ▶ La señal mensaje define la envolvente de la portadora

$$\text{Envolvente: } A_c \cdot [1 + m(t)]$$

- Sobremodulación: se produce cuando la expresión de la envolvente toma valores negativos para algún valor de t
 - ▶ Sucede cuando $m(t) < -1$
 - ▶ Solución utilizada para evitarlo: asegurar que $|m(t)| \leq 1$
 - ★ Normalización del mensaje ($m_n(t)$)
 - ★ Índice de modulación (a)

Modulación AM convencional - Índice de modulación

- Señal moduladora (mensaje) normalizada $m_n(t)$

$$m_n(t) = \frac{m(t)}{\max |m(t)|} = \frac{m(t)}{C_M}$$

- ▶ Rango de la señal moduladora: $-C_M \leq m(t) \leq +C_M$

- Índice de modulación (a)

- ▶ Se reemplaza $m(t)$ por señal moduladora con índice de modulación a

$$m_a(t) = a \times m_n(t)$$

Rango de $m_a(t)$: $-a \leq m_a(t) \leq +a$

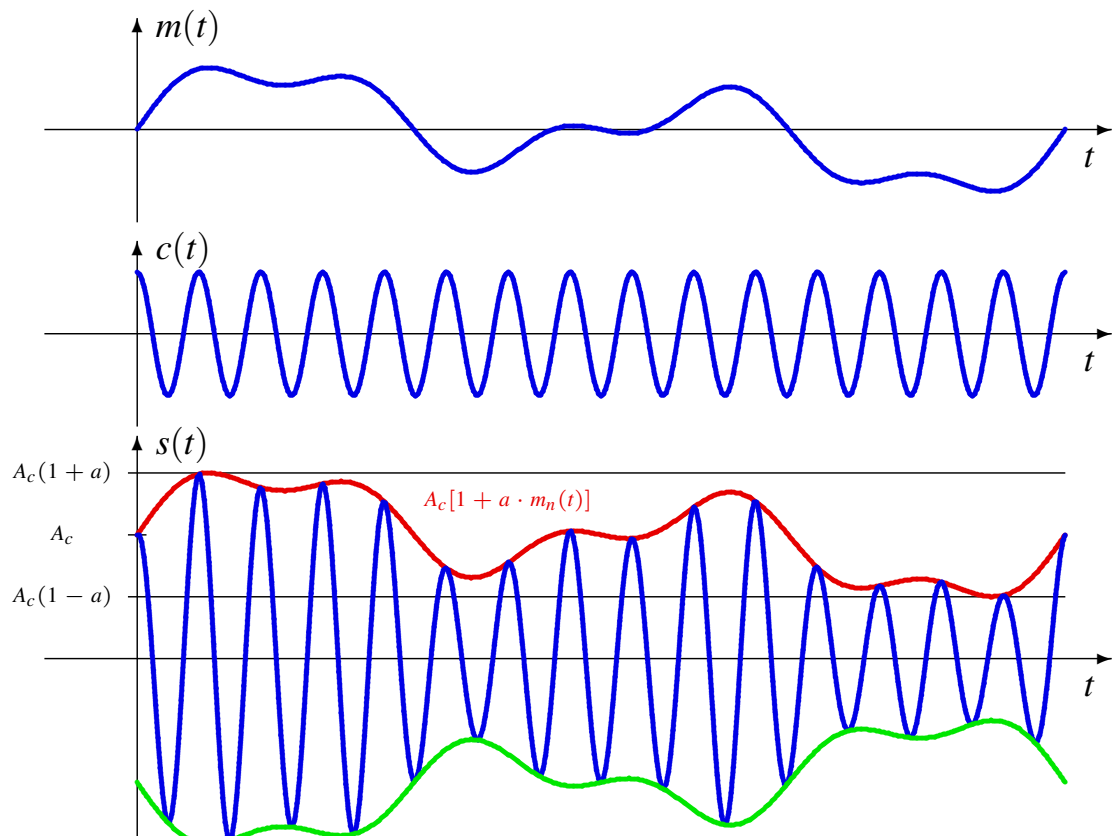
- ★ Para evitar la sobremodulación: $0 < a \leq 1$

- Señal modulada con índice de modulación a

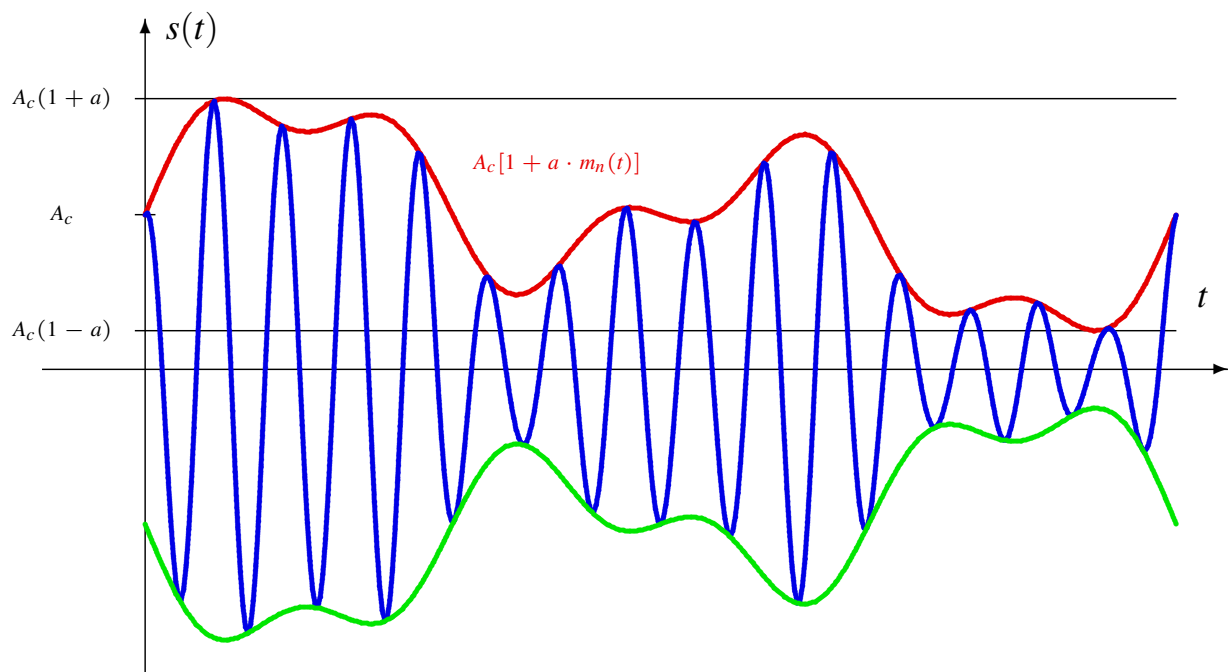
$$s(t) = A_c \cdot [1 + \underbrace{a \cdot m_n(t)}_{m_a(t)}] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

$$= A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

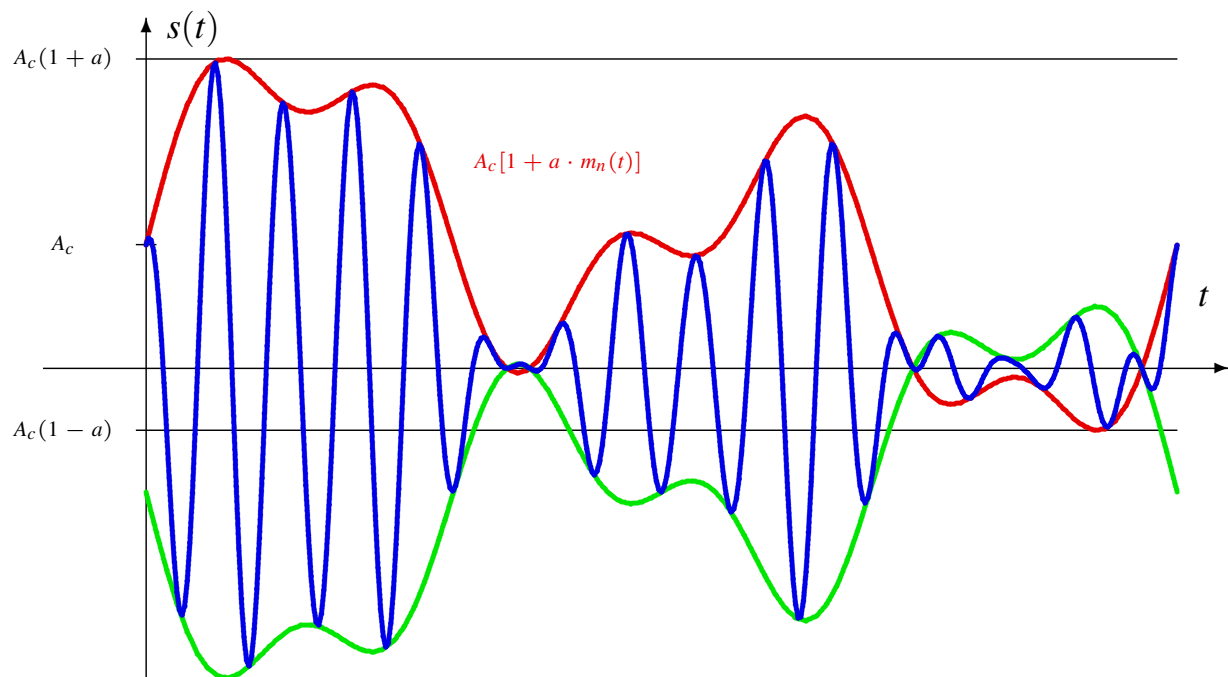
Forma de onda de una modulación AM convencional



Forma de onda de una modulación AM ($a = 0,75$)



Sobremodulación ($a = 1,5$)



Espectro de la señal AM Convencional

- Señal AM convencional

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c) + m_a(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal $m(t)$ determinista con TF $M(j\omega)$, $M(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 2\pi B$

► Espectro de $m_a(t) = a \cdot m_n(t)$: $M_a(j\omega) = a \cdot M_n(j\omega) = \frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega)$

- Espectro de señal AM convencional

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} + \mathcal{TF}\{m_a(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= A_c \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + \delta(\omega + \omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \\ &\quad + \frac{A_c}{2} \cdot \left[\underbrace{M_a(j\omega - j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega - j\omega_c)} \cdot e^{j\phi_c} + \underbrace{M_a(j\omega + j\omega_c)}_{\frac{a}{C_M} \cdot M(j\omega + j\omega_c)} \cdot e^{-j\phi_c} \right] \end{aligned}$$

Espectro de la señal AM Convencional - Análisis

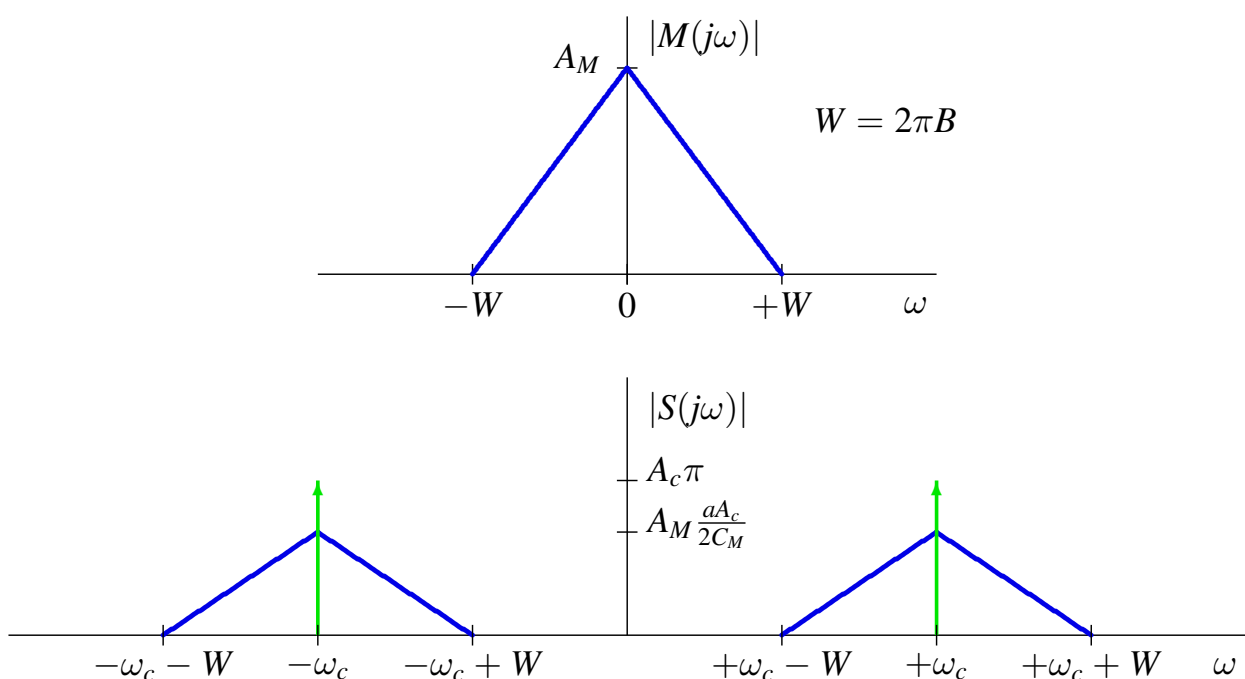
- Módulo de la transformada de Fourier $S(j\omega)$
 - ▶ Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - ★ Amplitud $A_c\pi$
 - ▶ Réplicas de la forma de $M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - ★ Factor de escala $\frac{aA_c}{2C_M}$
- Fase de la transformada de Fourier
 - ▶ La fase de la portadora introduce el término $e^{-j\phi_c}$
 - ★ Término de fase lineal
- Ancho de banda de la señal modulada

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

El doble que el ancho de banda de la señal moduladora transmitida $m(t)$

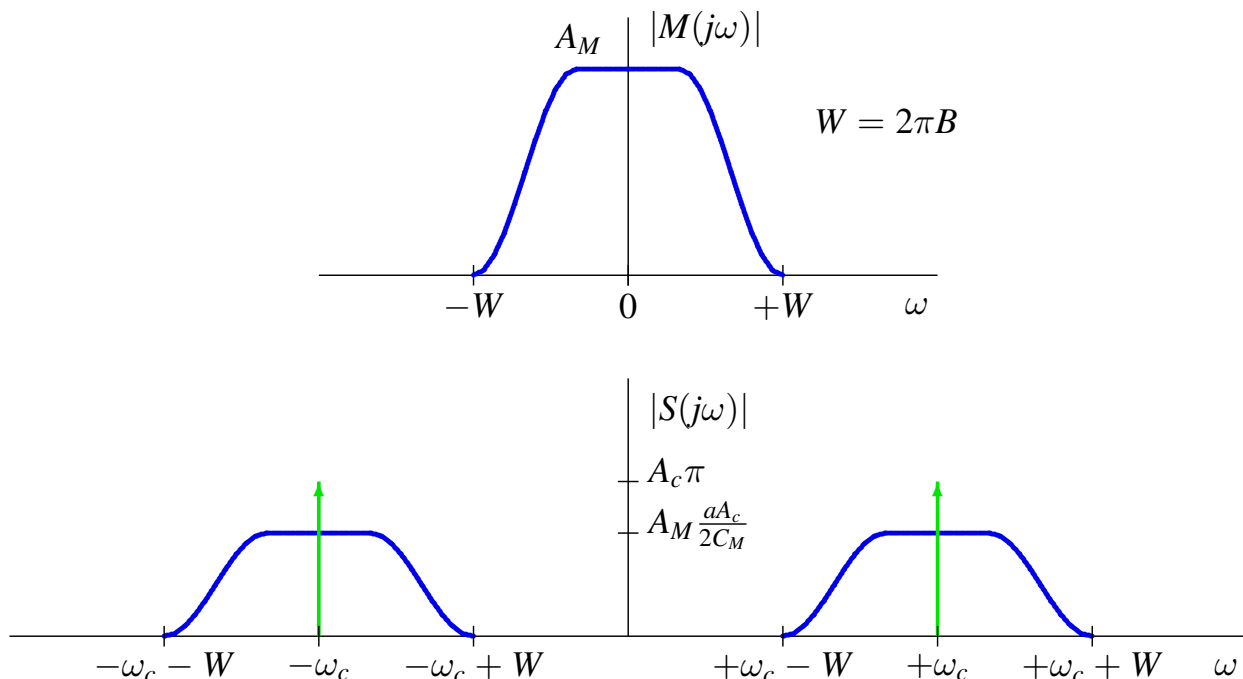
Espectro de la señal AM convencional - Representación

Un ejemplo para una cierta forma de $M(j\omega)$



Espectro de la señal AM convencional - Representación

Otro ejemplo para otra forma de $M(j\omega)$



Análisis estadístico de AM convencional

- Modelo señal modulada: proceso aleatorio

$M(t)$, estacionario, con $m_M = 0$, $R_M(\tau)$, $S_M(j\omega)$, P_M

Definición de procesos normalizado y con índice de modulación: $M_n(t) = \frac{1}{C_M} M(t)$, $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$S(t) = A_c [1 + M_a(t)] \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media de la señal AM convencional

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c [1 + E[M_a(t)]] \cos(\omega_c t + \phi_c) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

NOTA: Si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, $E[M_a(t)] = \frac{a}{C_M} \cdot E[M(t)] = 0$

- Función de autocorrelación de la señal AM convencional

$$R_S(t, t + \tau) = E[S(t) \cdot S(t + \tau)]$$

$$\begin{aligned} &= A_c^2 \cdot E \left[\underbrace{(1 + M_a(t))(1 + M_a(t + \tau))}_{1 + M_a(t) + M_a(t + \tau) + M_a(t) \cdot M_a(t + \tau)} \right] \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + R_{M_a}(\tau)] [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

- Proceso **cicloestacionario** de período $T = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$

Análisis estadístico de AM convencional (II)

- Promedio de la función de autocorrelación

$$\begin{aligned}\tilde{R}_S(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(\tau)] \cdot \cos(\omega_c \tau) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} R_M(\tau) \right] \cdot \cos(\omega_c \tau)\end{aligned}$$

- Densidad espectral de potencia

$$\begin{aligned}S_S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_{M_a}(j\omega - j\omega_c) + S_{M_a}(j\omega + j\omega_c)] \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \\ &\quad + \frac{A_c^2}{4} \cdot \left[\frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega + j\omega_c) \right]\end{aligned}$$

NOTA: Si $M_a(t) = a \cdot M_n(t) = \frac{a}{C_M} \cdot M(t)$, entonces $R_{M_a}(\tau) = a^2 \cdot R_{M_n}(\tau) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot R_M(\tau)$;
por tanto $S_{M_a}(j\omega) = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot S_M(j\omega)$ y $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M$

Análisis estadístico de AM convencional (III)

- Ancho de banda de la señal AM convencional

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Densidad espectral de potencia consta de

- Dos deltas, en $-\omega_c$ y en $+\omega_c$
 - Amplitud $\frac{A_c^2}{2} \pi$
- Réplicas de la forma de $S_M(j\omega)$ desplazadas a $-\omega_c$ y $+\omega_c$
 - Factor de escala $\left(\frac{aA_c}{2C_M}\right)^2$

- Potencia AM convencional

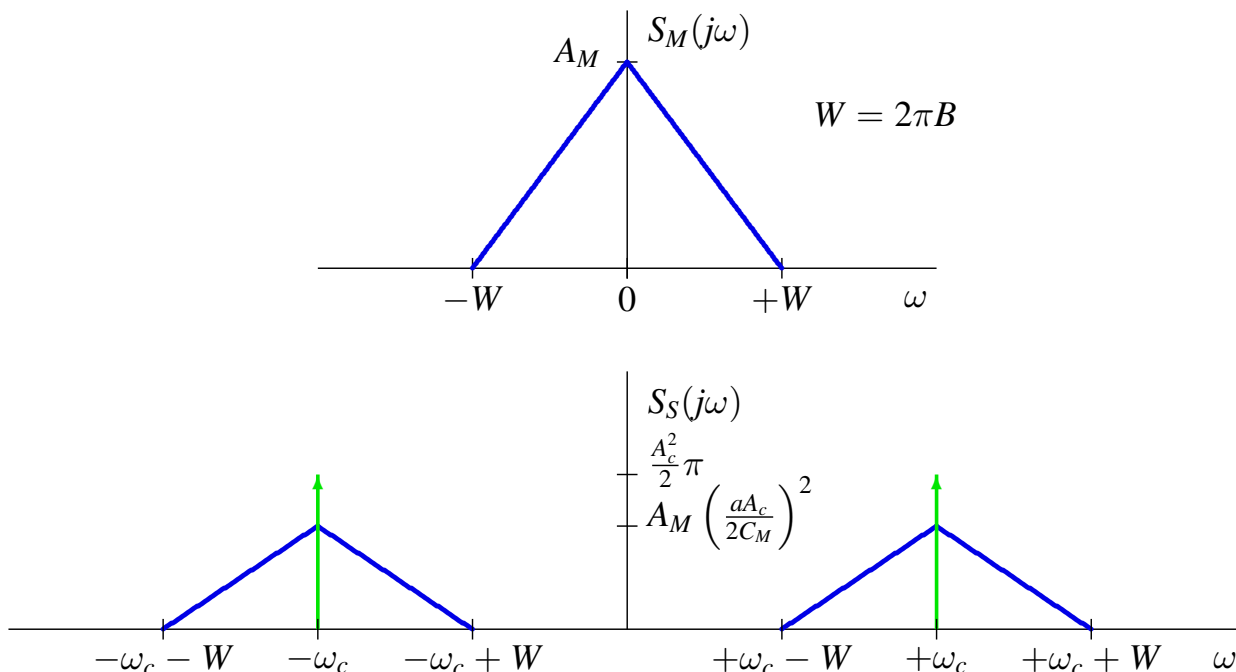
$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + R_{M_a}(0)] = \frac{A_c^2}{2} \cdot [1 + P_{M_a}] = \frac{A_c^2}{2} \cdot \left[1 + \frac{a^2}{C_M^2} \cdot P_M \right]$$

- Potencia de la portadora: $\frac{A_c^2}{2}$
- Potencia de la DBL: $\left(\frac{A_c^2}{2} \frac{a^2}{C_M^2}\right) \times P_M$

NOTA: la potencia también se puede calcular como $P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega$

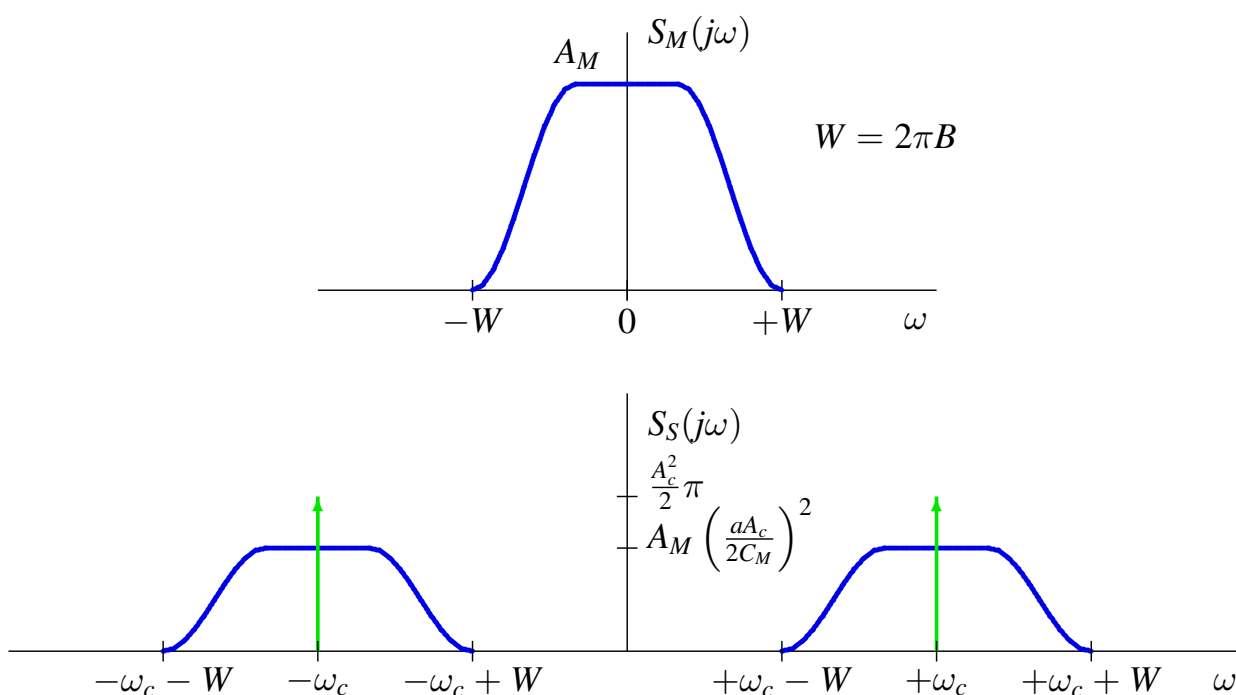
DEP de la señal AM convencional - Representación

Un ejemplo dada una cierta forma para $S_M(j\omega)$



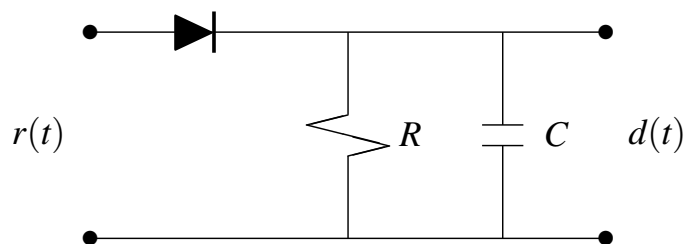
DEP de la señal AM convencional - Representación

Otro ejemplo dada otra forma para $S_M(j\omega)$



Resumen de características de AM Convencional

- Inconvenientes de la modulación AM convencional:
 - ▶ Escasa eficiencia en potencia
 - ★ Se gasta potencia en la transmisión de la portadora (que no contiene información)
 - ▶ Escasa eficiencia espectral
 - ★ El ancho de banda de la señal modulada es el doble del de la moduladora
- Ventaja fundamental de la modulación AM convencional
 - ▶ Si $a \leq 1$, no hay sobremodulación y la envolvente de la señal es proporcional a $1 + m_a(t) \geq 0$, de donde se puede extraer $m(t)$
 - ★ Eliminación de la media y escalado
 - ▶ Receptor simple: detector de envolvente



- ★ No se necesita un demodulador síncrono

Modulación de doble banda lateral sin portadora (DBL)

- Elimina el inconveniente de eficiencia en potencia de la modulación AM convencional
 - ▶ Se suprime la portadora de la AM convencional

$$s(t) = m(t) \times c(t) = m(t) \times A_c \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Respuesta en frecuencia

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \mathcal{TF}\{m(t)\} * \mathcal{TF}\{A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)\} \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j\omega_c) \cdot e^{j\phi_c} + M(j\omega + j\omega_c) \cdot e^{-j\phi_c}] \end{aligned}$$

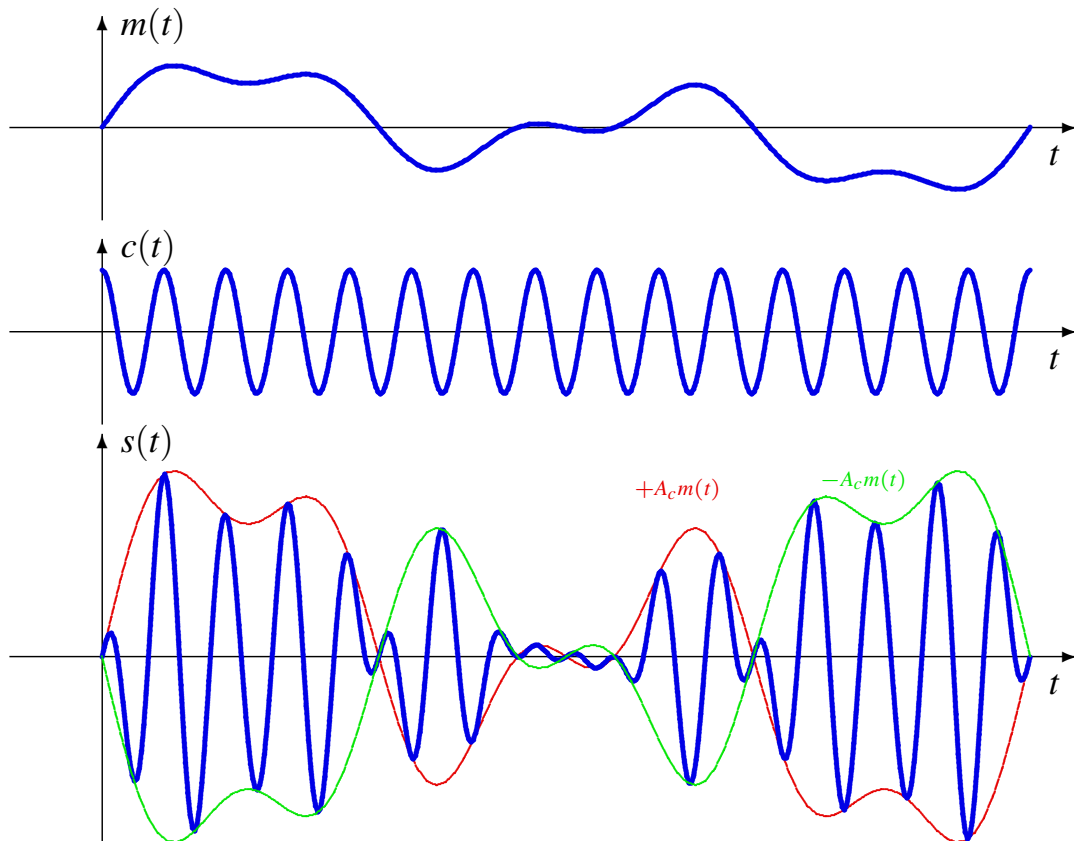
- ▶ Desaparecen las deltas de la modulación AM convencional
- ▶ Réplicas de $M(j\omega)$ en $\pm\omega_c$
 - ★ Cambia el escalado de las réplicas (al no haber normalización)
 - ★ Nombre: dos bandas laterales, inferior ($|\omega| < \omega_c$) y superior ($|\omega| > \omega_c$)

- Ancho de banda

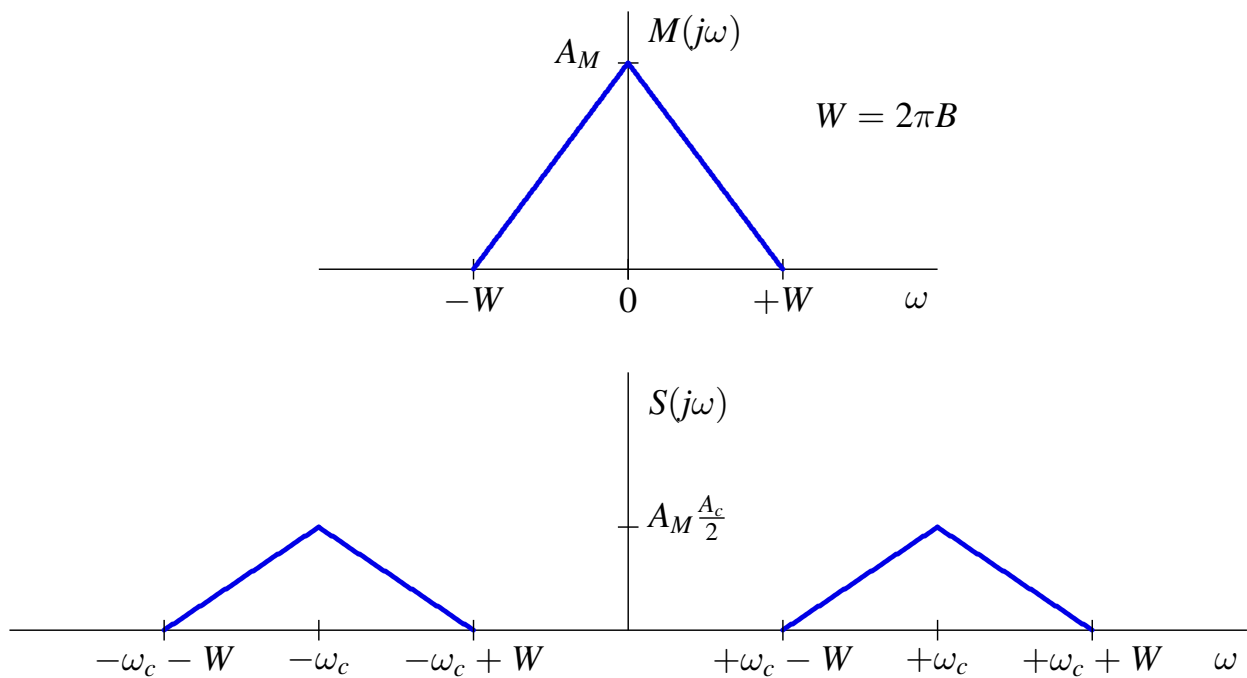
$$BW_{DBL} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora que se transmite

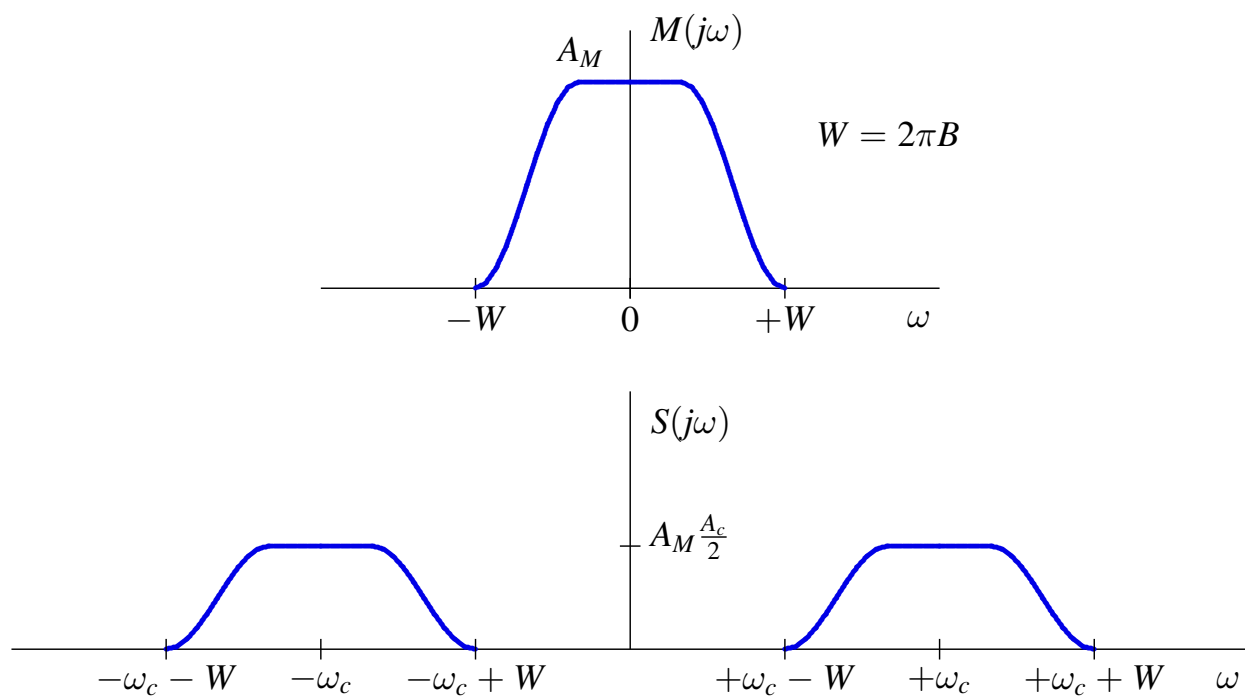
Forma de onda de una modulación AM DBL



Espectro de la señal AM DBL



Espectro de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Análisis estadístico de la modulación DBL

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$M(t), \text{ estacionario, con } m_M = 0, R_M(\tau), S_M(j\omega)$$

- Modelo de la señal moduladora: proceso aleatorio

$$S(t) = M(t) \times c(t) = A_c M(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Media señal modulada con DBL

$$m_S(t) = E[S(t)] = A_c \cdot E[M(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) = 0$$

- Función de autocorrelación de la señal DBL

$$\begin{aligned} R_S(t, t + \tau) &= A_c^2 \cdot E[M(t) \cdot M(t + \tau)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \cdot \cos(\omega_c(t + \tau) + \phi_c) \\ &= \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot [\cos(\omega_c \tau) + \cos(\omega_c(2t + \tau) + 2\phi_c)] \end{aligned}$$

- Proceso cicloestacionario de período $T = \frac{2\pi}{2\omega_c} = \frac{1}{2f_c}$

Análisis estadístico de la modulación DBL (II)

- Promedio temporal de la función de autocorrelación

$$\tilde{R}_S(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_S(t, t + \tau) dt = \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(\tau) \cdot \cos(\omega_c \tau)$$

- Densidad espectral de potencia

$$S_S(j\omega) = \mathcal{TF}\{\tilde{R}_S(\tau)\} = \frac{A_c^2}{4} \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Ancho de banda de la modulación DBL

$$BW_{AM} = 2 \cdot B \text{ Hz}$$

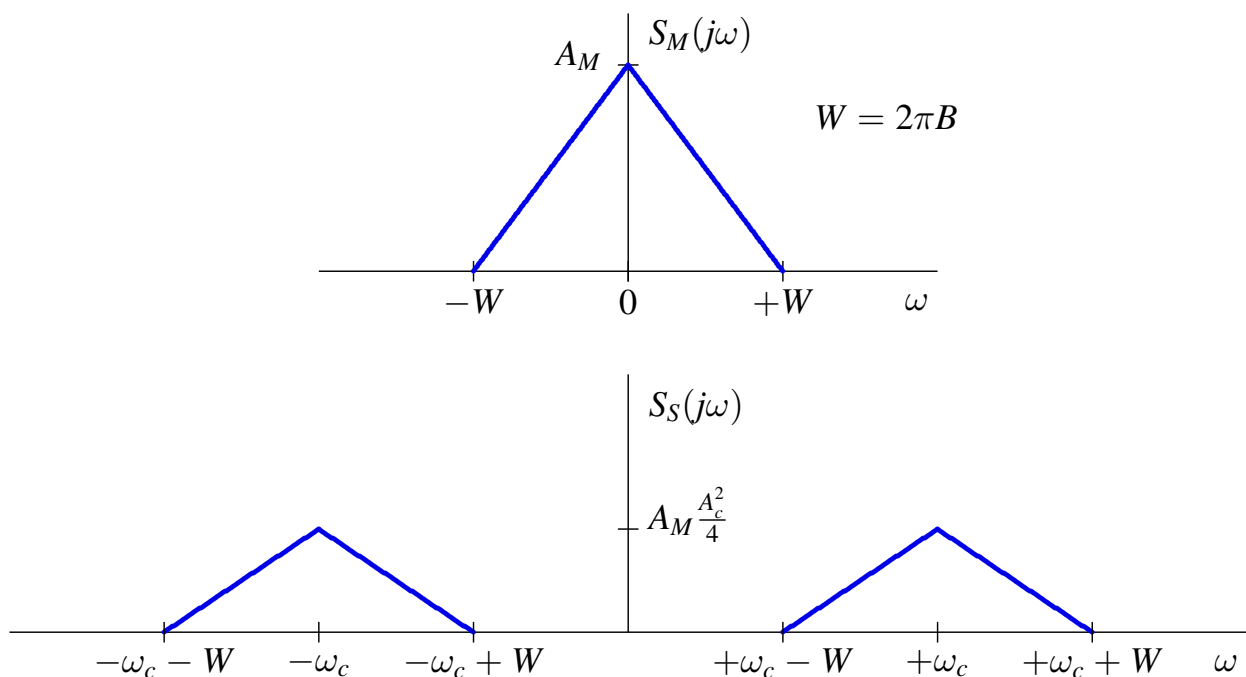
Sigue siendo el doble que el de la señal moduladora que se transmite

- Potencia de la señal DBL

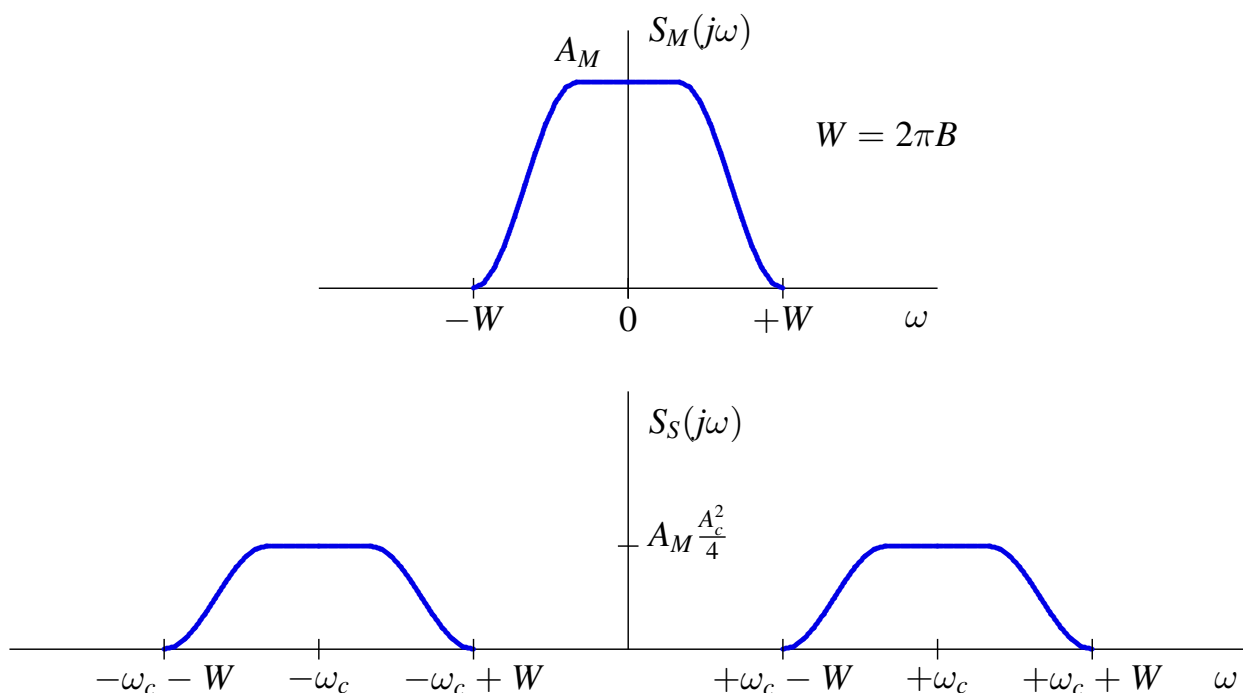
$$P_S = \tilde{R}_S(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot R_M(0) = \frac{A_c^2}{2} \cdot P_M$$

Es eficiente en potencia (no se “malgasta” potencia en términos que no contienen información)

DEP de la señal AM DBL

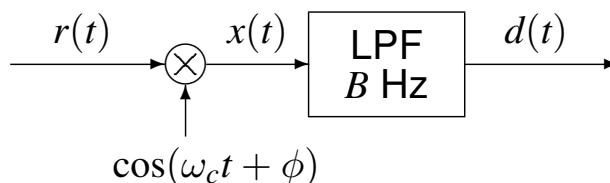


DEP de la señal AM DBL (otro ejemplo)



Demodulación señales DBL

- Receptor para señales moduladas con DBL



LPF: filtro paso bajo (ancho de banda de B Hz)

- ▶ Demodulador (multiplicar por la portadora $\cos(\omega_c t + \phi)$)
 - ▶ Filtro paso bajo (ancho de banda dado por la señal, B Hz)
- Rendimiento óptimo con un receptor síncrono o coherente
 - ▶ Receptor con la misma fase en la portadora del receptor que en la del transmisor $\phi = \phi_c$
- Efecto de un receptor no síncrono ($\phi \neq \phi_c$)
 - ▶ Atenuación del término relacionado con la señal $m(t)$
 - ▶ Pérdida de relación señal a ruido (prestaciones)
 - ★ El valor de la fase ϕ no varía la potencia debida al término de ruido

Efecto de un receptor no coherente

- Análisis del término de señal

$$\text{Se asume } r(t) = s(t) = A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal demodulada sin filtrar

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c m(t) \cos(\omega_c t + \phi_c) \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot [\cos(\phi - \phi_c) + \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi)] \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

- ▶ Se eliminan los términos con espectro en $\pm 2\omega_c$

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c)$$

- ▶ Valor ideal, con receptor coherente ($\phi = \phi_c$)

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot m(t)$$

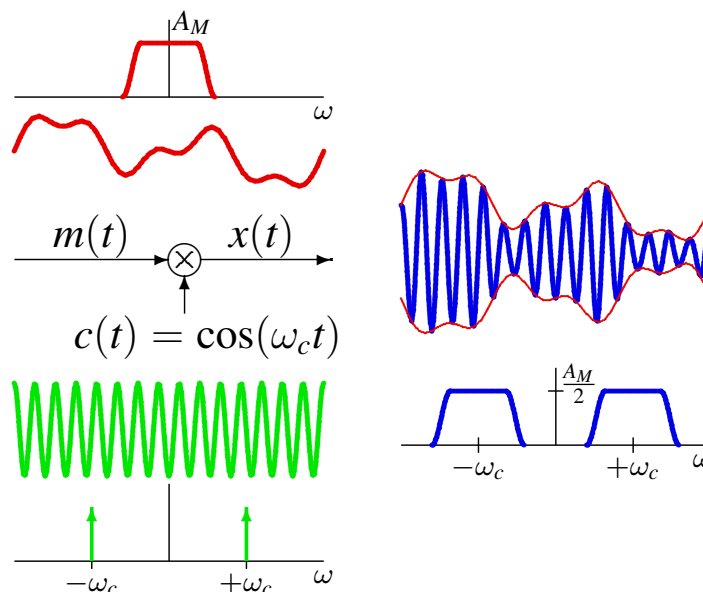
- ▶ Efecto de utilizar un receptor no coherente ($\phi \neq \phi_c$)

- ★ Término de atenuación $\cos(\phi - \phi_c)$

Revisión - Efecto de multiplicar por una senoide

- Multiplicar por una senoide de frecuencia ω_c genera, espectralmente, dos réplicas de la forma del espectro de la señal modulada, desplazadas $\pm\omega_c$

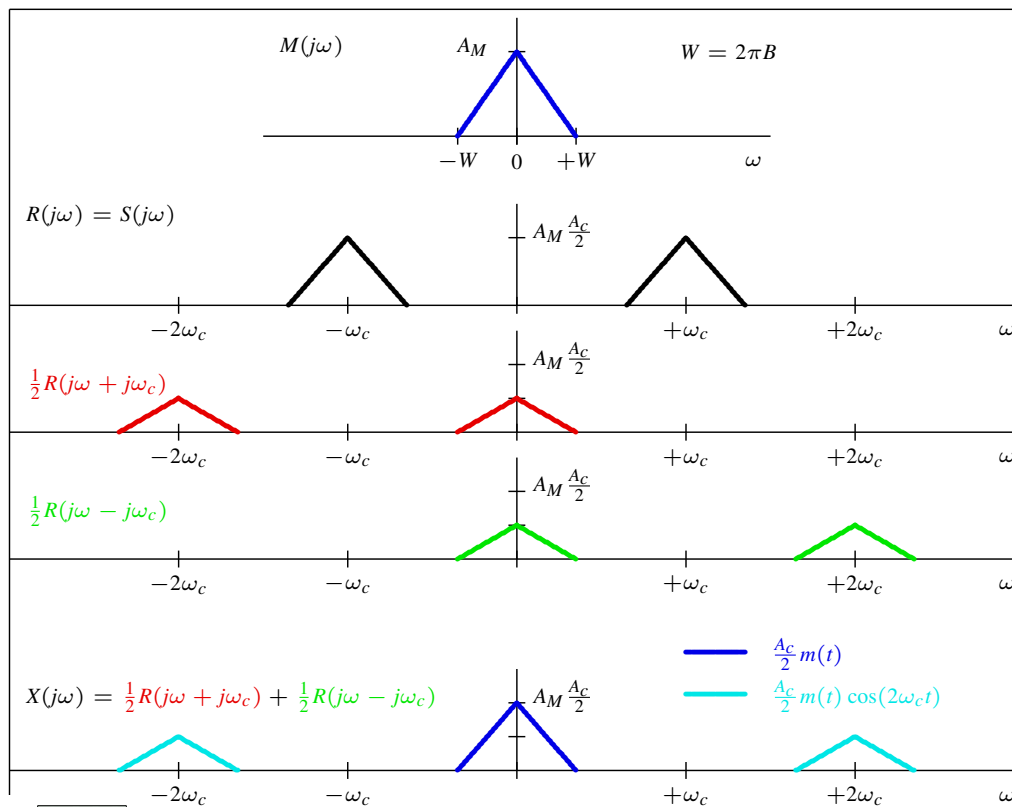
$$x(t) = m(t) \times \cos(\omega_c t) \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2}M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}M(j\omega + j\omega_c)$$



$$\text{Densidad espectral de potencia: } S_X(j\omega) = \frac{1}{4}S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4}S_M(j\omega + j\omega_c)$$

Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

- Por simplicidad, se asume que $\phi = \phi_c = 0$

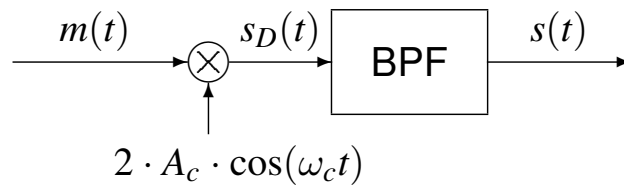


Receptor coherente - Posibles opciones

- El receptor debe identificar la fase de la portadora con que se moduló la señal $\phi = \phi_c$
- Opciones más frecuentes
 - ▶ Transmisión de un piloto (portadora de amplitud reducida)
 - ★ Ineficiencia en potencia
 - ▶ Utilización de un lazo enganchado en fase (PLL: *Phase Locked Loop*)
 - ★ Incrementa el coste del receptor

Modulación de banda lateral única (BLU)

- Eficiencia espectral: Se elimina una banda lateral $BW_{BLU} = B$ Hz.



- ▶ Por simplicidad en la notación se ha asumido $\phi_c = 0$

- Generación de la señal

- ▶ Se genera una señal de doble banda lateral (con amplitud doble)
- ▶ Se elimina una de las dos bandas laterales mediante filtrado
 - ★ BLU de banda lateral superior: se eliminan las frecuencias $|\omega| < \omega_c$
 - ★ BLU de banda lateral inferior: se eliminan las frecuencias $|\omega| > \omega_c$

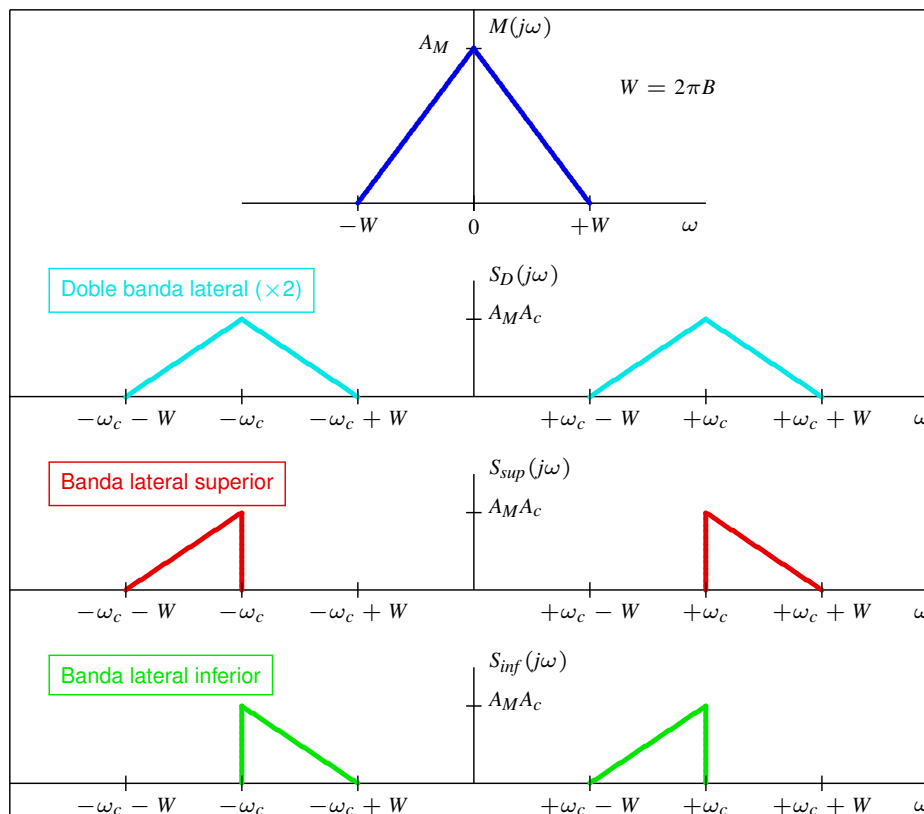
- Expresión analítica de la señal BLU resultante

$$s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

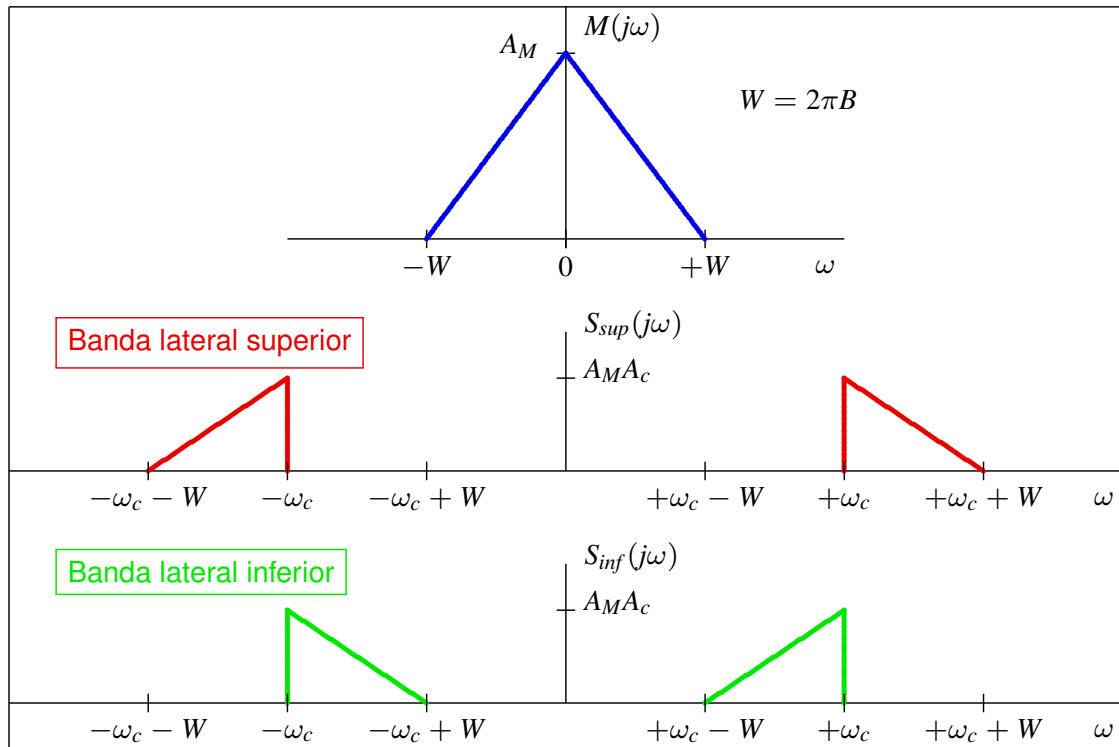
$\hat{m}(t)$: transformada de Hilbert de la señal moduladora $m(t)$

- ▶ Banda lateral superior (BLS): signo $-$
- ▶ Banda lateral inferior (BLI): signo $+$

Espectro de la señal AM de BLU



Espectro de la señal AM de BLU



Transformada de Hilbert

- Señal generada filtrando con un transformador de Hilbert

$$\hat{m}(t) = m(t) * h_{Hilbert}(t)$$

- Transformador de Hilbert:
 - ▶ Respuesta al impulso

$$h_{Hilbert}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

- ▶ Respuesta en frecuencia

$$H_{Hilbert}(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ +j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral superior

- Respuesta en frecuencia del filtro de banda lateral superior:

$$H_{BLS}(j\omega) = u(\omega - \omega_c) + u(-(\omega + \omega_c)) \text{ con } u(x) \text{ función escalón}$$

- Espectro de la señal DBL con amplitud doble, $s_D(t)$

$$S_D(j\omega) = A_c [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + j\omega_c)]$$

- Espectro de la señal BLU con banda lateral superior

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S_D(j\omega) \cdot H_{BLS}(j\omega) \\ &= A_c M(j\omega) \cdot u(\omega) |_{\omega=\omega-\omega_c} + A_c M(j\omega) \cdot u(-\omega) |_{\omega=\omega+\omega_c} \end{aligned}$$

- Señal BLU de banda lateral superior

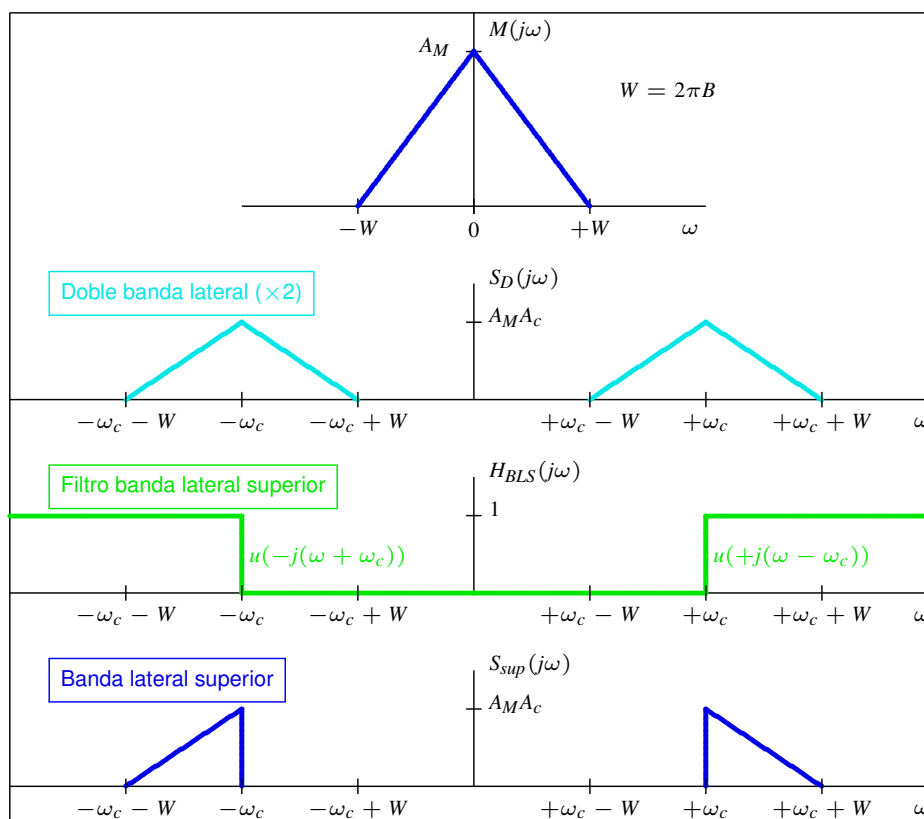
$$\begin{aligned} s(t) &= A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{j\omega_c t} + A_c \cdot m(t) * \left[\frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) + j\hat{m}(t)] \cdot e^{j\omega_c t} + \frac{A_c}{2} \cdot [m(t) - j\hat{m}(t)] \cdot e^{-j\omega_c t} \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \end{aligned}$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de la transformada de Fourier y las fórmulas de Euler para sinusoides

$$\mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(\omega), \quad \mathcal{TF} \left\{ \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{j}{2\pi t} \right\} = u(-\omega), \quad \mathcal{TF} \{x(t) \cdot e^{j\omega_c t}\} = X(j\omega - j\omega_c)$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}, \quad \text{sen}(\omega_c t) = \frac{e^{+j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} = j \frac{e^{-j\omega_c t} - e^{+j\omega_c t}}{2}$$

Generación de BLU de banda lateral superior



Expresión analítica de $s(t)$ - Banda lateral inferior

- Señal BLU de banda lateral superior

$$s_{sup}(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$

- Relaciones de las dos señales BLU y señal $s_D(t)$

$$s_D(t) = 2 \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) = s_{sup}(t) + s_{inf}(t)$$

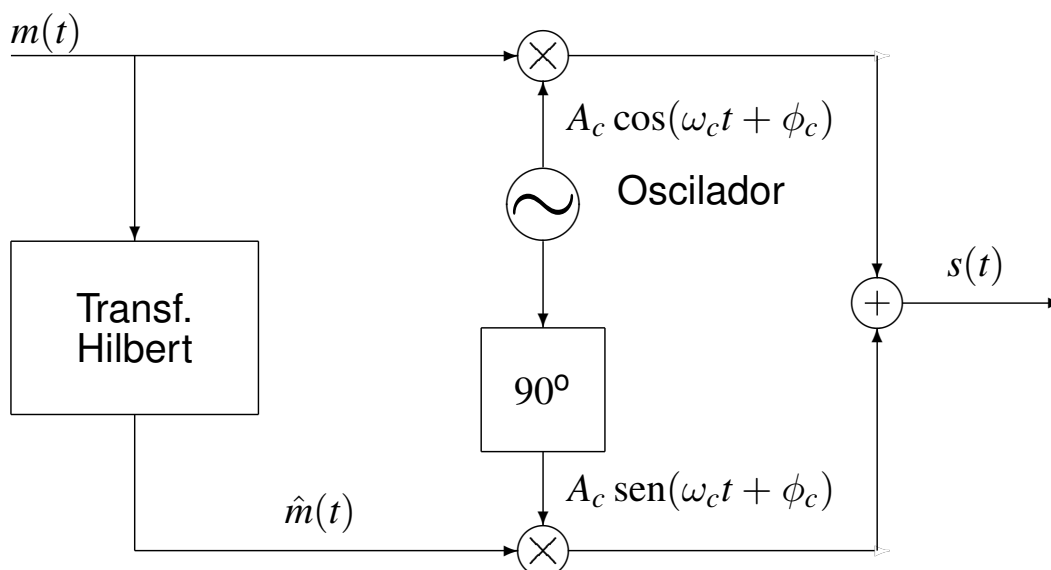
- Señal BLU de banda lateral inferior

$$\begin{aligned} s_{inf}(t) &= s_D(t) - s_{sup}(t) \\ &= A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t) \end{aligned}$$

Generación alternativa de BLU - Modulador de Hartley

- Implementación basada en la expresión analítica a partir de la transformada de Hilbert

$$s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$



Ancho de banda y potencia de una BLU

- Densidad espectral de potencia

- ▶ Banda lateral superior

$$S_{S_{sup}}(j\omega) = \begin{cases} A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| > \omega_c \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- ▶ Banda lateral inferior

$$S_{S_{inf}}(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > \omega_c \\ A_c^2 \cdot [S_M(j\omega - j\omega_c) + S_M(j\omega + j\omega_c)], & |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

- Ancho de banda

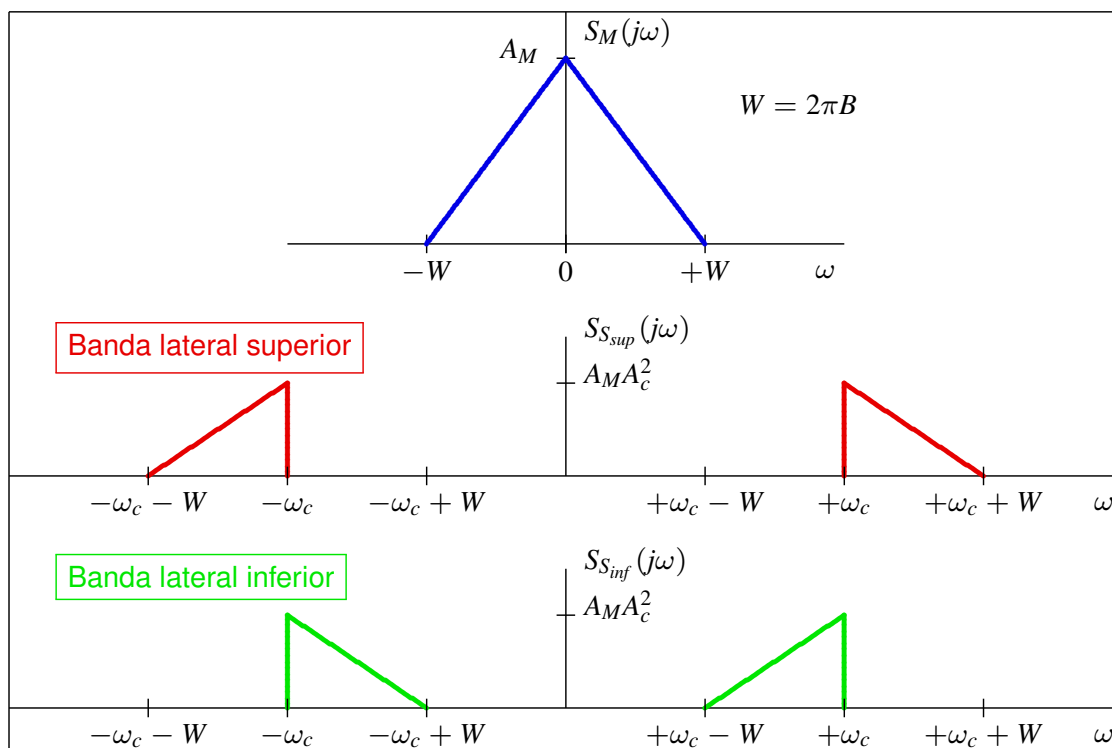
$$BW_{BLU} = B \text{ Hz}$$

Mismo ancho de banda que el de la señal moduladora transmitida

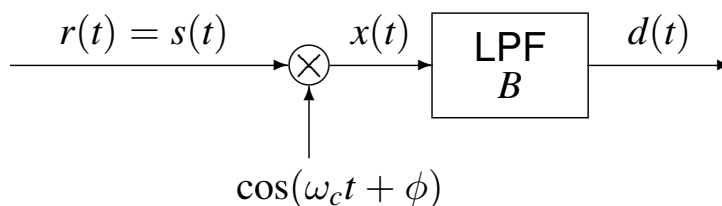
- Potencia de la señal

$$P_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_S(j\omega) d\omega = A_c^2 \cdot P_M$$

Densidad espectral de potencia de la señal AM de BLU



Demodulación de señales BLU



- Señal recibida

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)$$

Recuerde: por simplicidad en la notación se supuso $\phi_c = 0$

Ahora la diferencia entre las fases de las portadoras es ϕ (ya que $\phi_c = 0$)

- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= [A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\omega_c t) \mp A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\omega_c t)] \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi) + \text{términos } 2\omega_c \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi)$$

Demodulación de señales BLU (II)

- Señal demodulada filtrada (con fase ϕ_c arbitraria no nula)

$$d(t) = \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c) \pm \frac{1}{2} \cdot A_c \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_c)$$

- Efectos negativos presentes con demoduladores no coherentes

- ▶ Atenuación del término de señal recibida debido a $m(t)$

$$\frac{A_c}{2} \cdot m(t) \cdot \cos(\phi - \phi_c), \text{ término de atenuación } \boxed{\cos(\phi - \phi_c)}$$

★ Igual que para modulación de doble banda lateral

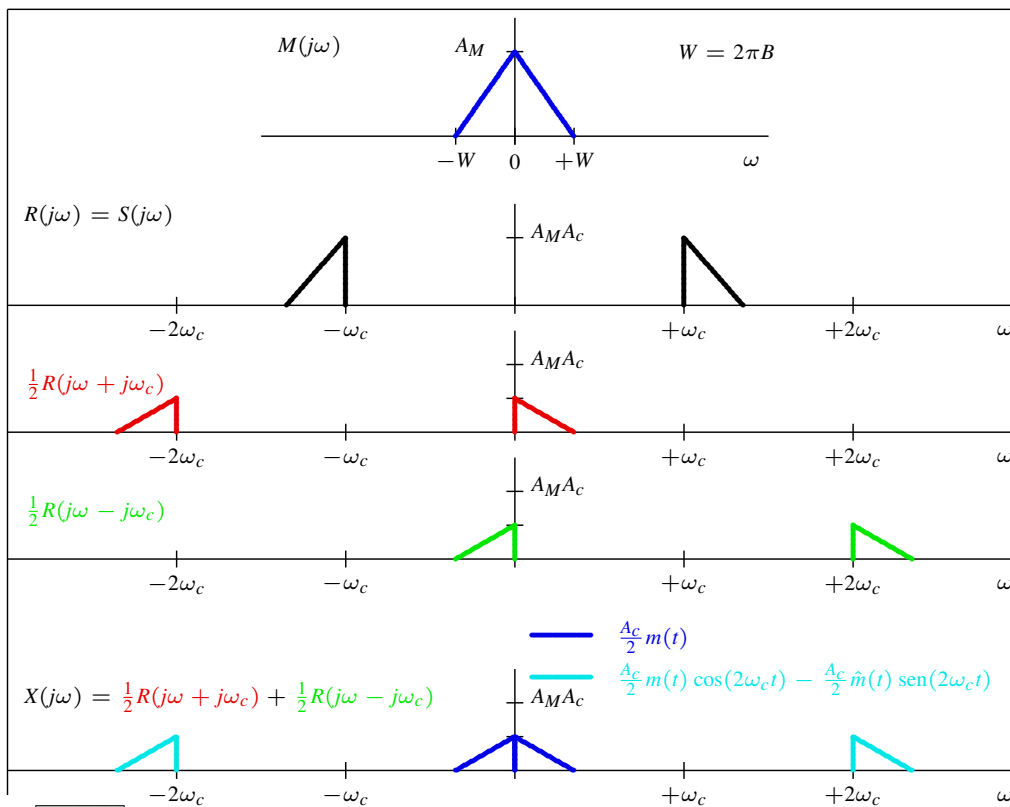
- ▶ Término adicional de distorsión

$$\pm \frac{A_c}{2} \cdot \hat{m}(t) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_c), \text{ término de ganancia } \boxed{\text{sen}(\phi - \phi_c)}$$

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente

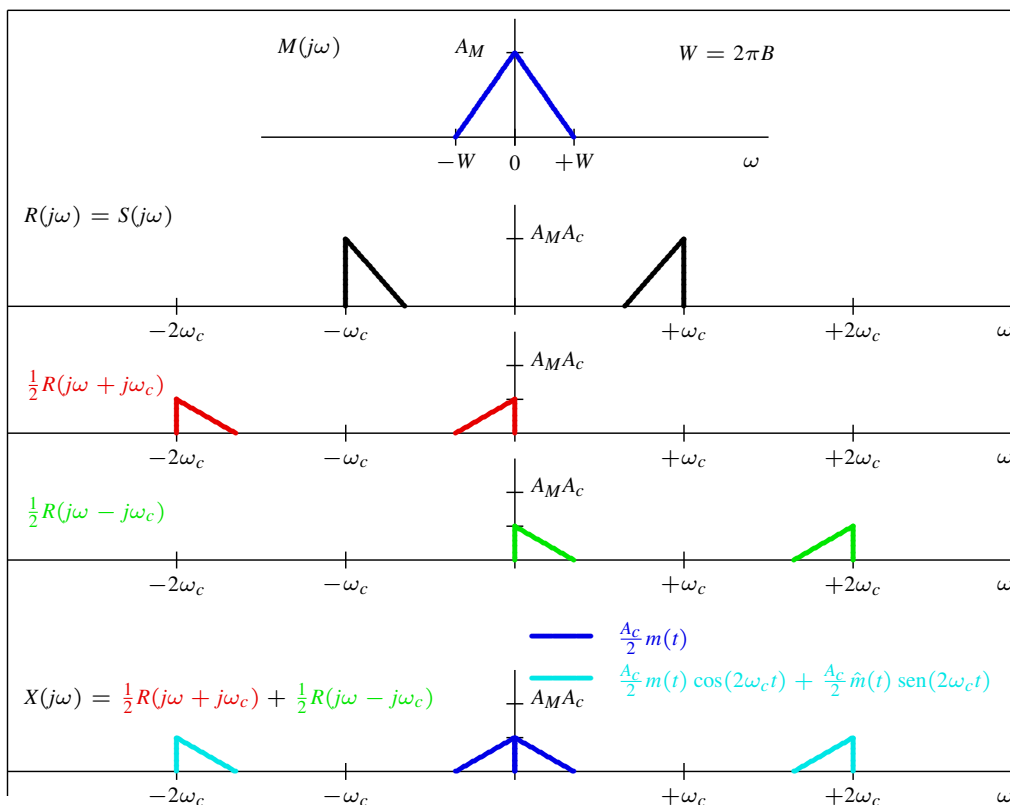
Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

● Ejemplo banda lateral superior



Demodulación síncrona - Interpretación frecuencial

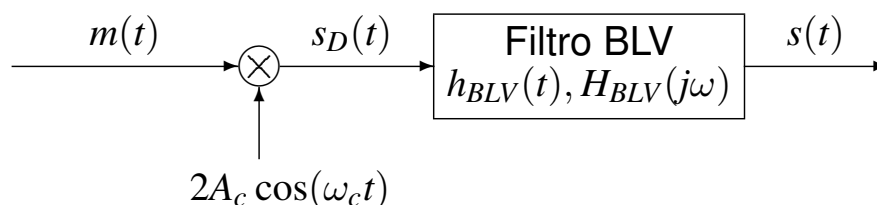
● Ejemplo banda lateral inferior



Características de la modulación de banda lateral única

- La modulación BLU supera los dos principales inconvenientes de la modulación AM convencional
 - ▶ Eficiencia espectral
 - ★ Mismo ancho de banda que el de la señal de información (moduladora) que se transmite
 - ▶ Eficiencia en potencia
 - ★ Toda la potencia de la señal está asociada a la componente que contiene la información (no se utiliza energía para transmitir una portadora)
- Inconveniente de la modulación BLU
 - ▶ Implementación mediante filtrado directo requiere filtros ideales para eliminar una de las bandas laterales
 - ★ La implementación con filtros reales puede generar distorsión en la señal transmitida
 - ▶ Implementación con modulador de Hartley requiere un transformador de Hilbert
 - ★ Respuesta ideal del transformador no realizable

Modulación de banda lateral vestigial (BLV)



- Mismo esquema de modulación que BLU
 - ▶ Se reemplaza el filtro “ideal” de BLU por un filtro realizable de banda lateral vestigial (que deberá cumplir ciertas condiciones)
- Señal modulada BLV
 - ▶ Se filtra una señal de doble banda lateral de amplitud doble $s_D(t)$ con un filtro de banda lateral vestigial

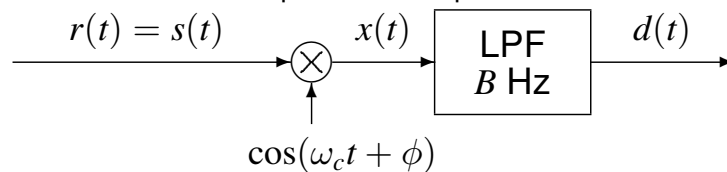
$$s(t) = \left[\underbrace{m(t) \times 2A_c \cos(\omega_c t)}_{s_D(t)} \right] * h_{BLV}(t)$$

- Señal BLV en el dominio de la frecuencia

$$S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega)$$

Características que debe tener el filtro BLV

- Se analizará la señal recibida y su dependencia con el filtro
 - ▶ Obtención de las condiciones que debe cumplir



- Señal recibida (igual a la transmitida) en el dominio frecuencial

$$R(j\omega) = S(j\omega) = A_c \cdot [M(j\omega - j\omega_c) + M(j\omega + \omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega)$$

- Señal demodulada (sin filtrar) en el dominio frecuencial

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_c t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot [R(j\omega - j\omega_c) + R(j\omega + j\omega_c)]$$

$$X(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega - j2\omega_c) + M(j\omega)] \cdot H_{BLV}(\omega - \omega_c) + \frac{A_c}{2} \cdot [M(j\omega) + M(j\omega + j2\omega_c)] \cdot H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(j\omega) \cdot [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

Características que debe tener el filtro BLV (II)

- Señal demodulada filtrada en el dominio frecuencial

$$D(j\omega) = \frac{A_c}{2} \cdot M(j\omega) \cdot [H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)]$$

- ▶ Interpretación: la señal moduladora se filtra con el filtro equivalente

$$H_{EQ}(j\omega) = H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)$$

- Para que no se produzca distorsión, el filtro ha de tener una respuesta que en la banda de paso de la señal ($|\omega| \leq 2\pi B$) cumpla

- ▶ Módulo constante
- ▶ Fase lineal

- Por tanto, las condiciones que debe cumplir el filtro BLV son

$$|H_{BLV}(j\omega - j\omega_c) + H_{BLV}(j\omega + j\omega_c)| = \text{cte, en } |\omega| \leq 2\pi B$$

Simetría impar respecto a ω_c en $\omega_c - \Delta_W < \omega < \omega_c + \Delta_W$

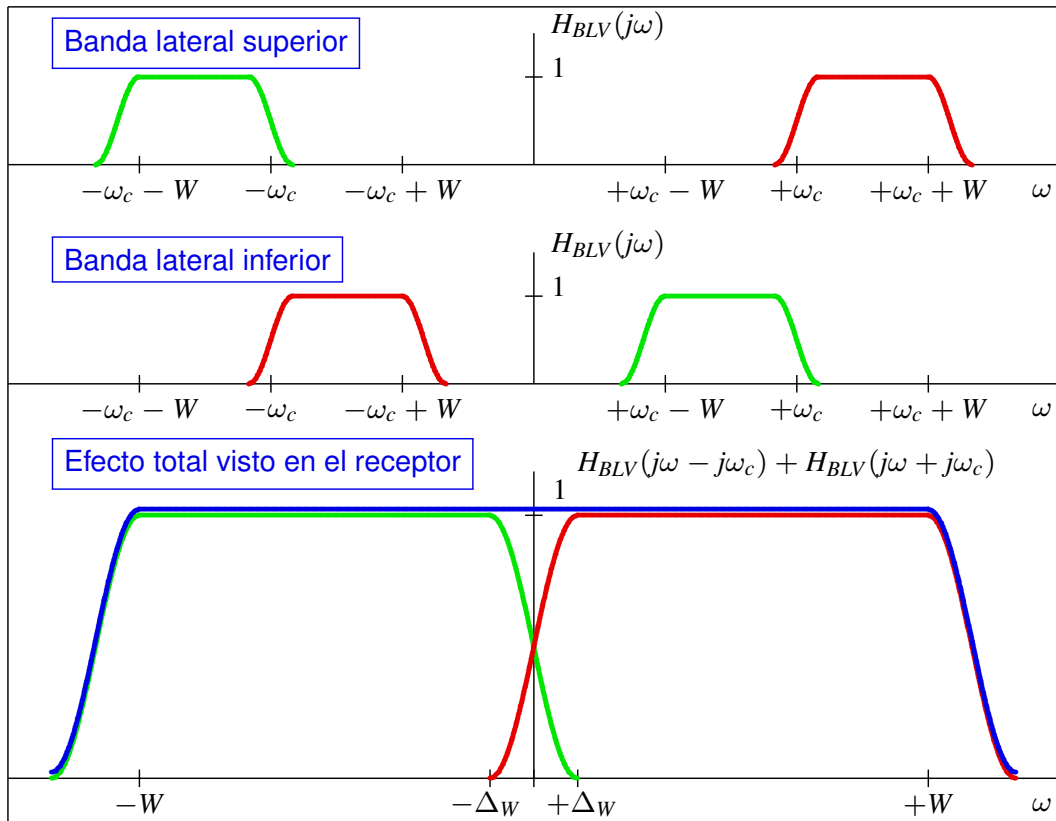
Δ_W : exceso de ancho de banda (vestigio) en radianes/s

- Ancho de banda de la señal modulada

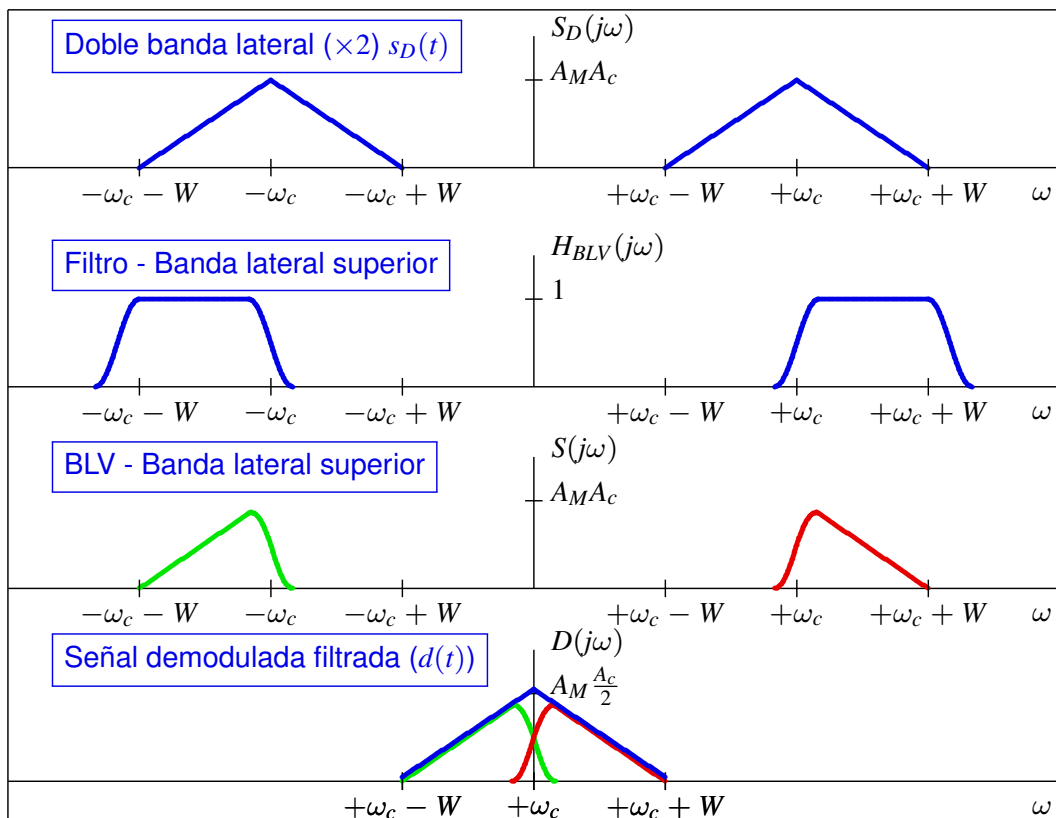
$$BW_{BLV} = B + \Delta_B \text{ Hz, con } \Delta_B = \frac{\Delta_W}{2\pi}$$

Δ_B : exceso de ancho de banda vestigial en Hz (habitualmente $\Delta_B \ll B$)

Filtro de banda lateral vestigial



Modulación y demodulación - Interpretación frecuencial



Modulaciones de amplitud - Resumen características

Modulación	BW (Hz)	P_S	$P_S(m(t))$	$d(t)$	$P_d(m(t))$
AM convencional	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$2B$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	B	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$B + \Delta_B$	$A_c^2 P_M$	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

BW (Hz): ancho de banda de la señal modulada en Hz

P_S : potencia de la señal modulada

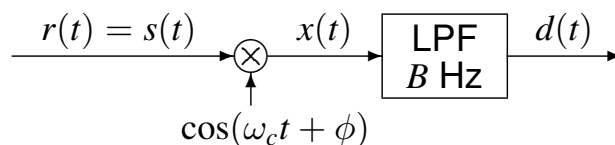
$P_S(m(t))$: potencia de la señal modulada relativa al término relacionado con $m(t)$

$d(t)$: señal recuperada con un receptor síncrono o coherente

$P_d(m(t))$: potencia de la señal demodulada relativa al término relacionado con $m(t)$

- Eficiencia en potencia
 - ▶ Toda la potencia de la señal está relacionada con $m(t)$
 - ★ DBL, BLU y BLV
- Eficiencia espectral
 - ▶ Mínimo ancho de banda para la transmisión (mismo ancho de banda que la señal moduladora, B Hz)
 - ★ BLU y BLV (en este caso con un incremento vestigial Δ_B)

Demodulación síncrona de modulación AM convencional



- Señal recibida

$$r(t) = s(t) = A_c \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c)$$

- Señal demodulada sin filtrar $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= A_c [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\omega_c t + \phi_c) \times \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi) + \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(2\omega_c t + \phi_c + \phi) \end{aligned}$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)] \cdot \cos(\phi_c - \phi)$$

- Necesidad de demodulador síncrono o coherente

$$d(t) = \frac{A_c}{2} \cdot [1 + m_a(t)]$$

MODULACIONES ANGULARES

PM Y FM

Modulaciones angulares

- La información está en el argumento de una senoide
- Se imprime en la frecuencia o fase de la portadora

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$$

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

FM: *Frequency Modulation*

$$f_i(t) = f_c \rightarrow f_i(t) = f(m(t))$$

$f_i(t)$: frecuencia instantánea de la señal portadora

- ▶ Modulación de fase (PM)

PM: *Phase Modulation*

$$\phi_c \rightarrow \phi_c(t) = f(m(t))$$

- Representación común de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t))$$

La información transmitida está en $\theta(t)$, i.e., $\theta(t) = f(m(t))$

Modulaciones PM y FM

- Representación común de señales FM y PM

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\theta(t)), \text{ donde } \theta(t) = \omega_c t + \phi(t)$$

- Definición de frecuencia instantánea de una senoide

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\theta(t)$$

- Señal modulada $s(t)$ y frecuencia instantánea

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\underbrace{(2\pi f_c)}_{\omega_c} t + \phi(t)), \quad f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t)$$

- Si $m(t)$ es la señal moduladora (mensaje)

- ▶ Modulación de fase (PM)

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t)$$

k_p : constante de desviación de fase

- ▶ Modulación de frecuencia (FM)

$$\Delta f_i(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f \cdot m(t)$$

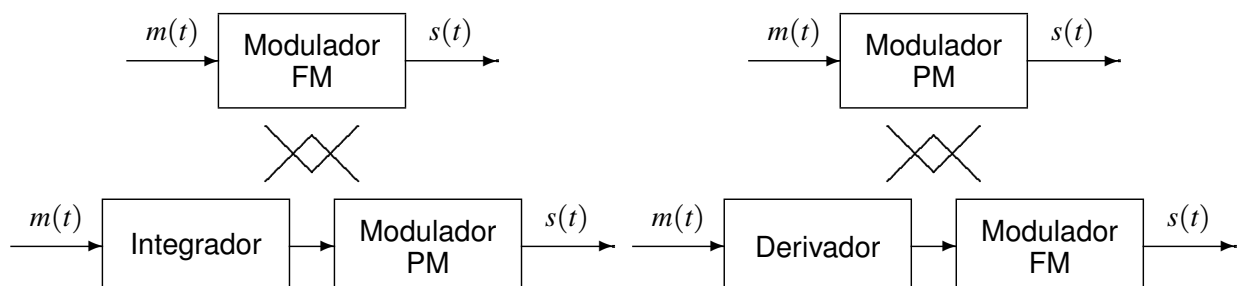
k_f : constante de desviación de frecuencia

Relación FM / PM

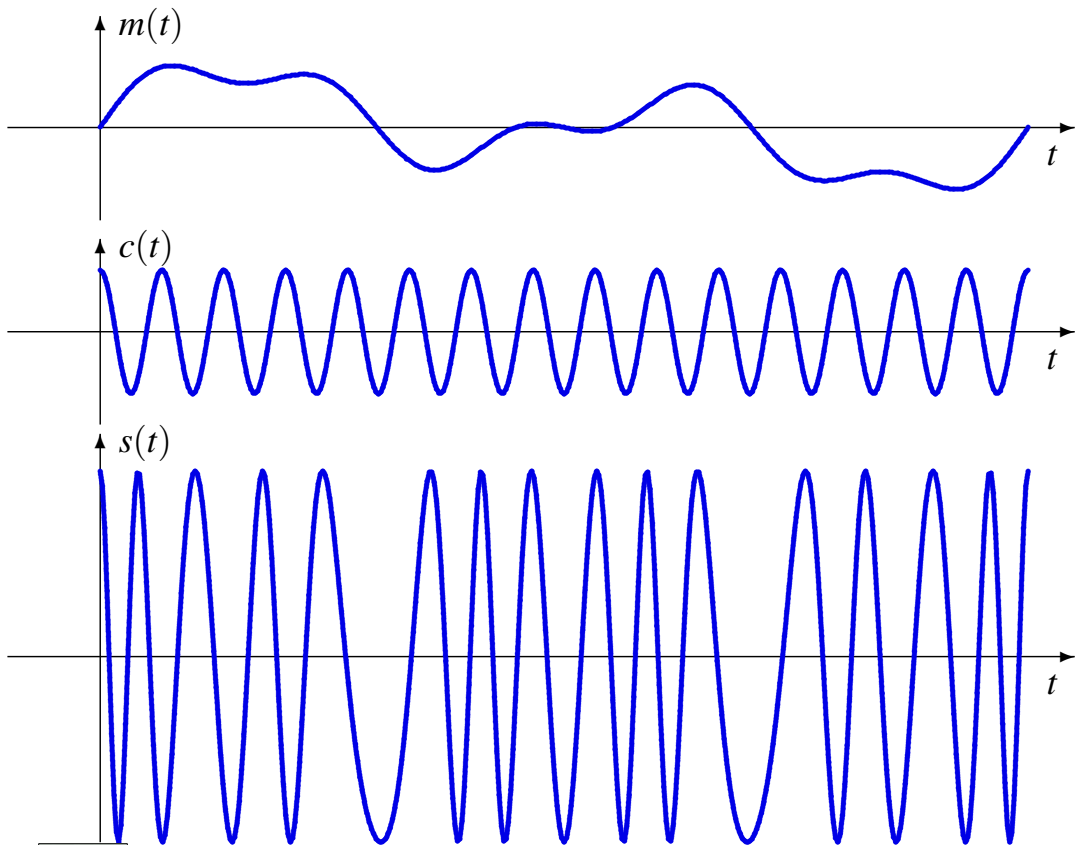
- Modulación de fase: $\phi(t) = k_p \cdot m(t)$
- Modulación de frecuencia: $\Delta f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}\phi(t) = k_f \cdot m(t)$
- Expresiones de $\phi(t)$ y $\frac{d}{dt}\phi(t)$ en PM y FM

$$\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$

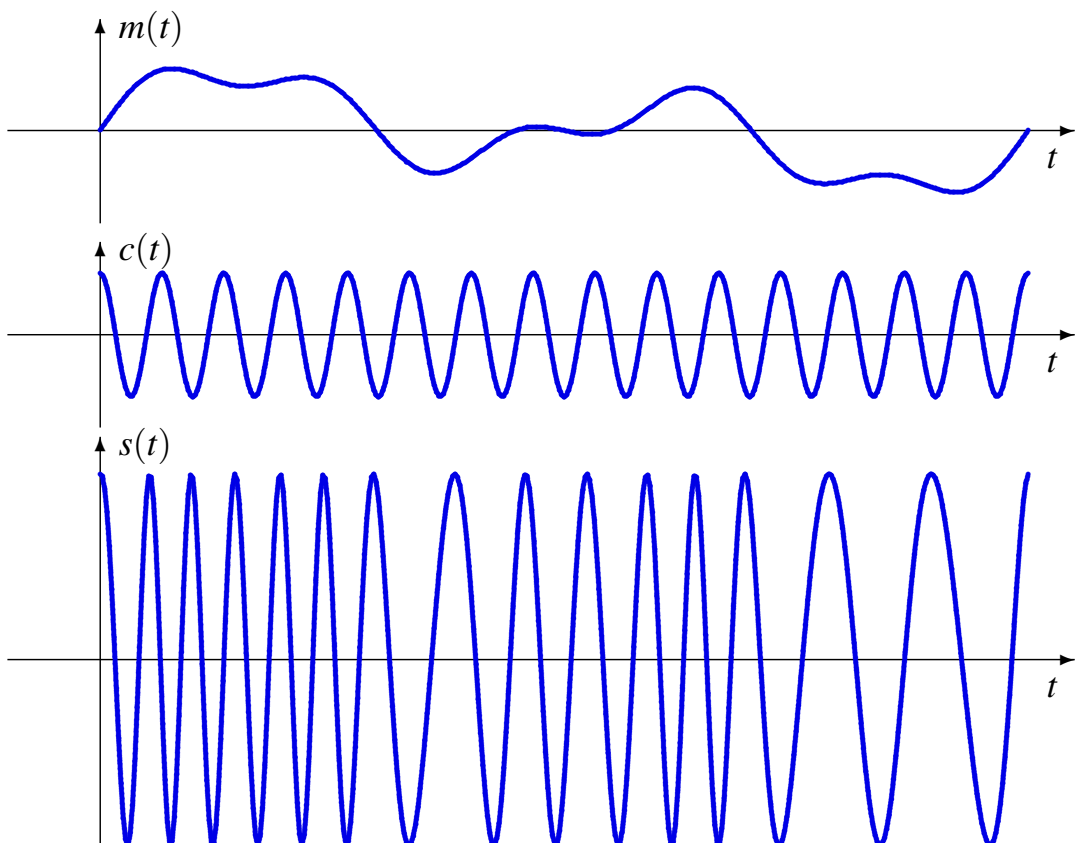
$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot \frac{d}{dt}m(t), & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot m(t), & \text{FM} \end{cases}$$



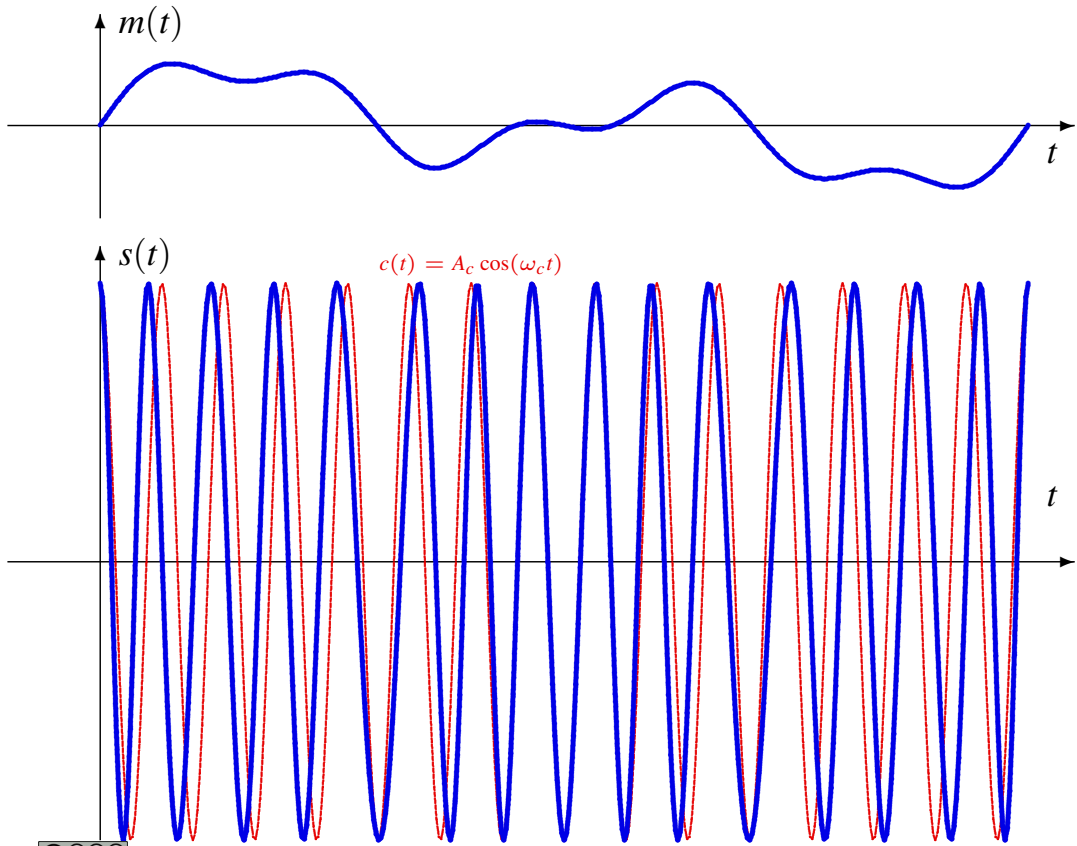
Forma de onda de una modulación PM



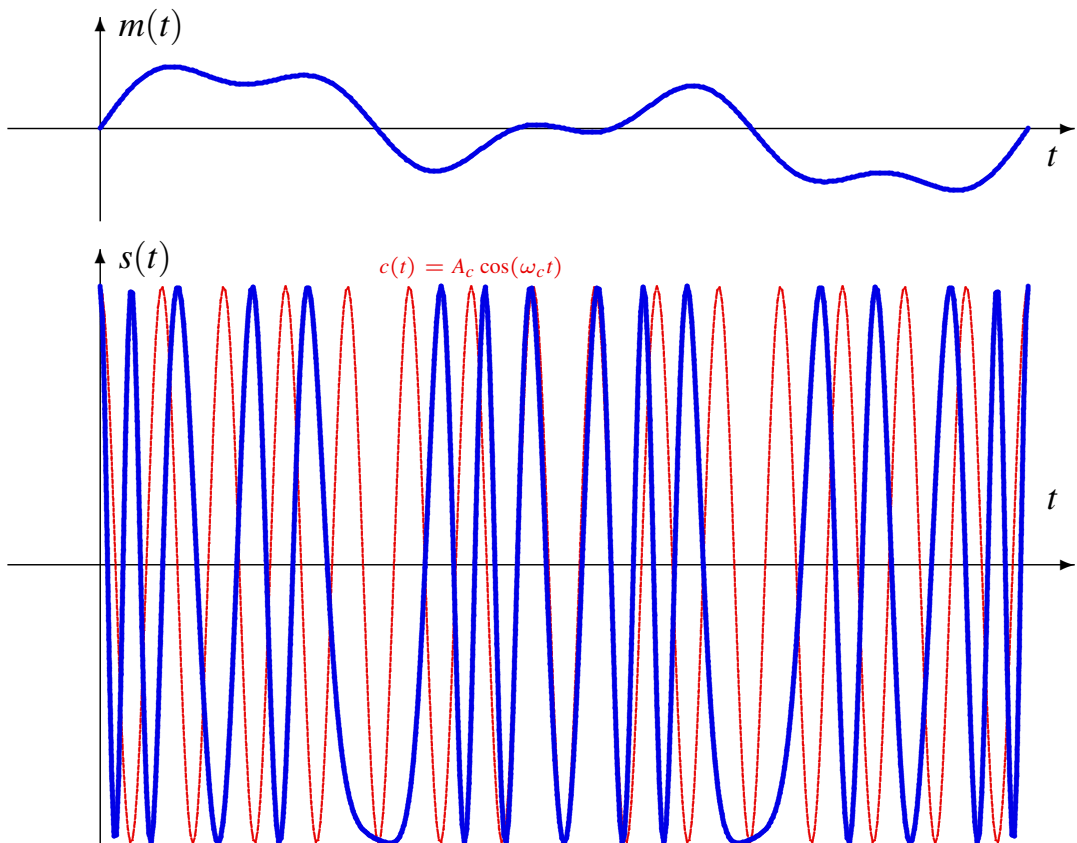
Forma de onda de una modulación FM



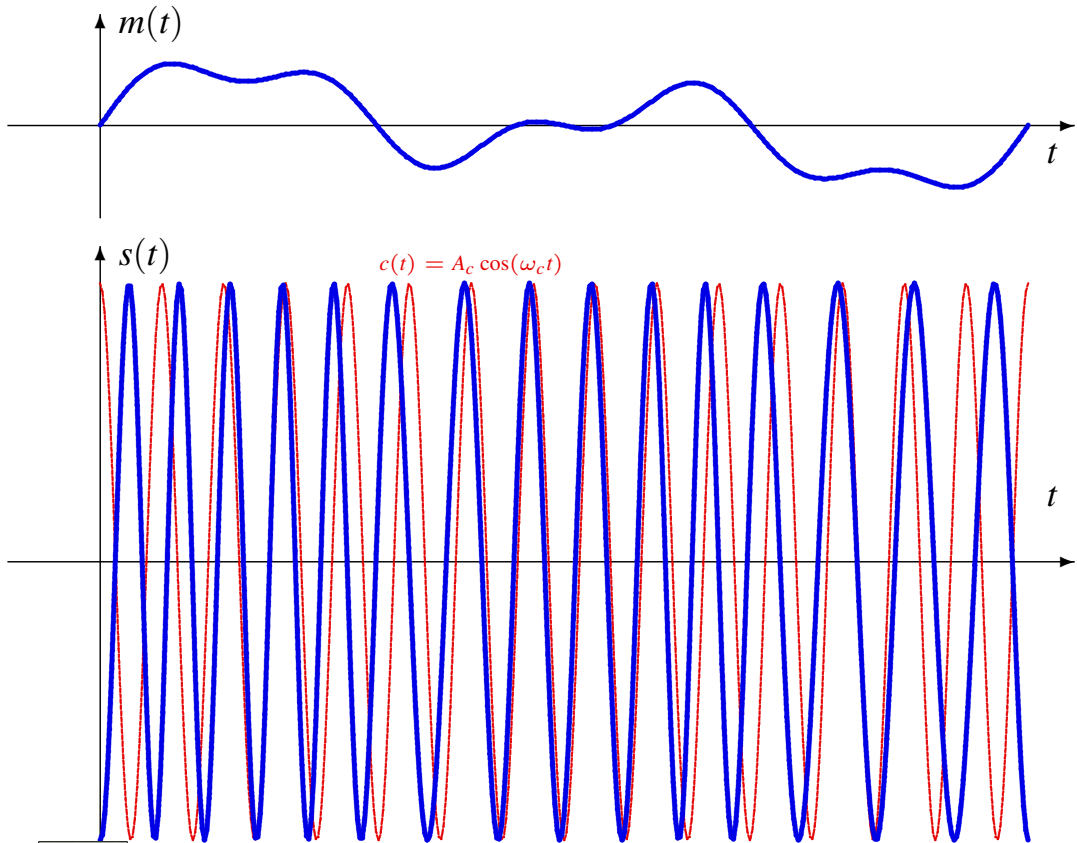
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{1}{4}$



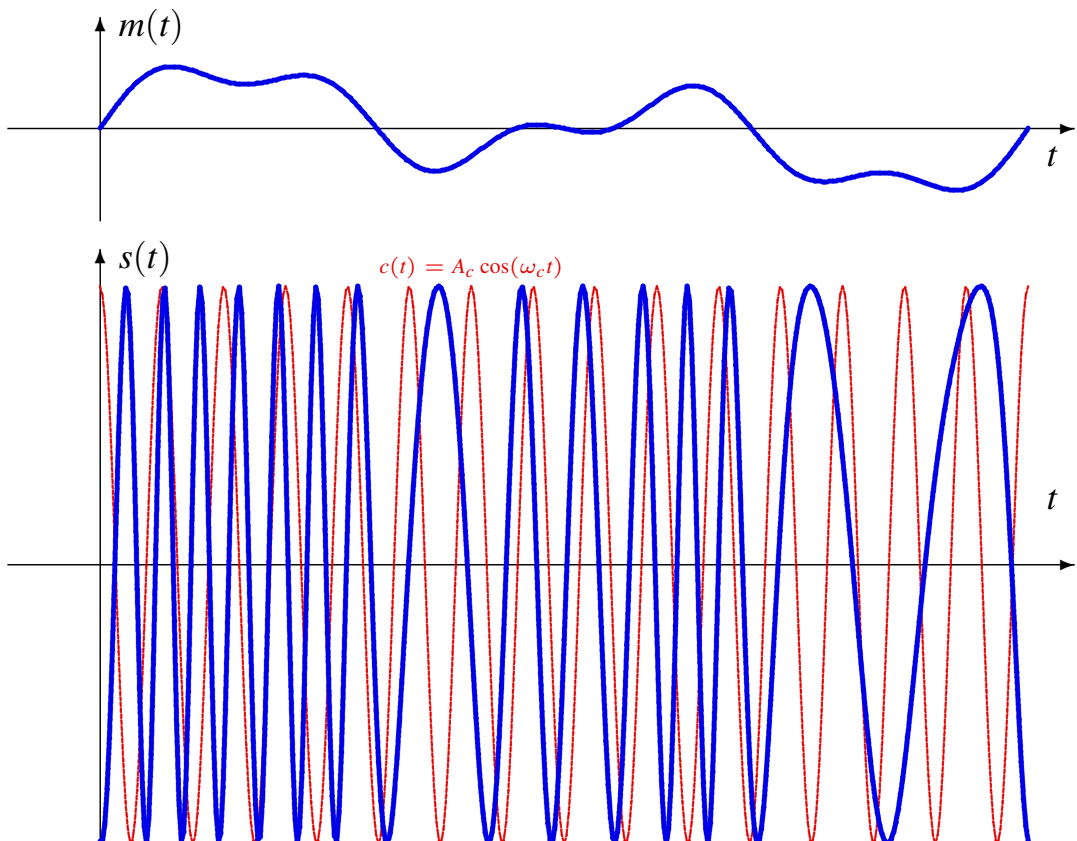
Modulación PM - Señal para $k_p = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{1}{4}$



Modulación FM - Señal para $k_f = 2\pi \times \frac{3}{4}$



Índices de modulación

- PM: máxima desviación en fase

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|)$$

- FM: máxima desviación de frecuencia

$$\Delta f_{\text{máx}} = k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B}$$

- ▶ B : ancho de banda en Hz de la señal moduladora $m(t)$

Análisis espectral de modulaciones angulares

- Cálculo (exacto o aproximado) de la representación espectral
 - ▶ Modulaciones angulares de banda estrecha
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora sinusoidal
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora periódica
- Regla heurística para el cálculo del ancho de banda
 - ▶ Modulaciones angulares con moduladora genérica
 - ★ Regla de Carson: aproximación del ancho de banda

Modulación angular de banda estrecha

- Modulación angular de banda estrecha: $\phi(t) \ll 1$
 - ▶ Constantes k_p o k_f pequeñas
- Expresión genérica de la señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \phi(t))$$

- ▶ Relación trigonométrica: $\cos(A \pm B) = \cos(A) \cdot \cos(B) \mp \sin(A) \cdot \sin(B)$
- ▶ Aproximaciones consideradas (para $\phi(t)$ pequeño)

$$\cos(\phi(t)) \approx 1, \quad \sin(\phi(t)) \approx \phi(t)$$

- Expresión alternativa para la señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot \cos \phi(t) - A_c \cdot \sin(\omega_c t) \cdot \sin \phi(t)$$

$$\approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$\text{AM Convencional: } s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot m_a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$\text{Recuerde que } \phi(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) & \text{PM} \\ 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau & \text{FM} \end{cases}$$

Modulación angular de banda estrecha - Análisis

- Expresión aproximada para la señal modulada

$$s(t) \approx A_c \cdot \cos(\omega_c t) - A_c \cdot \phi(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

- ▶ Expresión similar a la de una modulación AM convencional

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) + A_c \cdot m_a(t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

- Espectro de la señal modulada (considerando la aproximación)

- ▶ Dos deltas, situadas en $\pm\omega_c$ (espectro portadora)
- ▶ Réplicas del espectro de $\phi(t)$ situadas en $\omega = \pm\omega_c$
- ▶ Forma del espectro de $\phi(t)$

- ★ PM: proporcional al espectro de $m(t)$

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) \leftrightarrow \Phi(j\omega) = k_p \cdot M(j\omega)$$

- ★ FM: proporcional al espectro de la integral de $m(t)$

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \leftrightarrow \Phi(j\omega) = 2\pi k_f \cdot \frac{M(j\omega)}{j\omega}$$

- Ancho de banda (similar AM convencional)

$$BW_{BE} \approx 2 \cdot B \text{ Hz}$$

Modulación mediante una señal sinusoidal

- Señal moduladora sinusoidal de amplitud a y frecuencia ω_m rad/s

$$m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$$

- Índices de modulación de una modulación PM y FM

$$\beta_p = \Delta\phi_{\text{máx}} = k_p \cdot \text{máx}(|m(t)|) = k_p \cdot C_M = k_p \cdot a$$

$$\beta_f = \frac{\Delta f_{\text{máx}}}{B} = \frac{k_f \cdot \text{máx}(|m(t)|)}{B} = \frac{k_f \cdot C_M}{B} = k_f \cdot a \cdot \frac{2\pi}{\omega_m}$$

- Expresiones del término de fase $\phi(t)$

- ▶ Expresiones de $\phi(t)$ para PM

$$\phi(t) = k_p \cdot m(t) = k_p \cdot a \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_p \sin(\omega_m t)$$

- ▶ Expresiones de $\phi(t)$ para FM

$$\phi(t) = 2\pi \cdot k_f \cdot \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = 2\pi \cdot k_f \cdot a \cdot \frac{1}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m t) = \beta_f \sin(\omega_m t)$$

- Señal modulada: expresión común para PM y FM

$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi(t)) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t))$$

Modulación mediante una señal sinusoidal (II)

- Señal moduladora sinusoidal $m(t) = \begin{cases} a \cdot \sin(\omega_m t) & \text{PM} \\ a \cdot \cos(\omega_m t) & \text{FM} \end{cases}$

- Señal modulada

$$s(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t + \beta \cdot \sin(\omega_m t)) = \mathcal{R}e \left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \cdot e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} \right)$$

La función $e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)}$ es periódica de frecuencia $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ Hz
Desarrollo en serie de Fourier

$$e^{j\beta \cdot \sin(\omega_m t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t}$$

Coefficiente de índice n del desarrollo en serie: $J_n(\beta)$

$J_n(\beta)$: función de Bessel de primera especie de orden n y argumento β

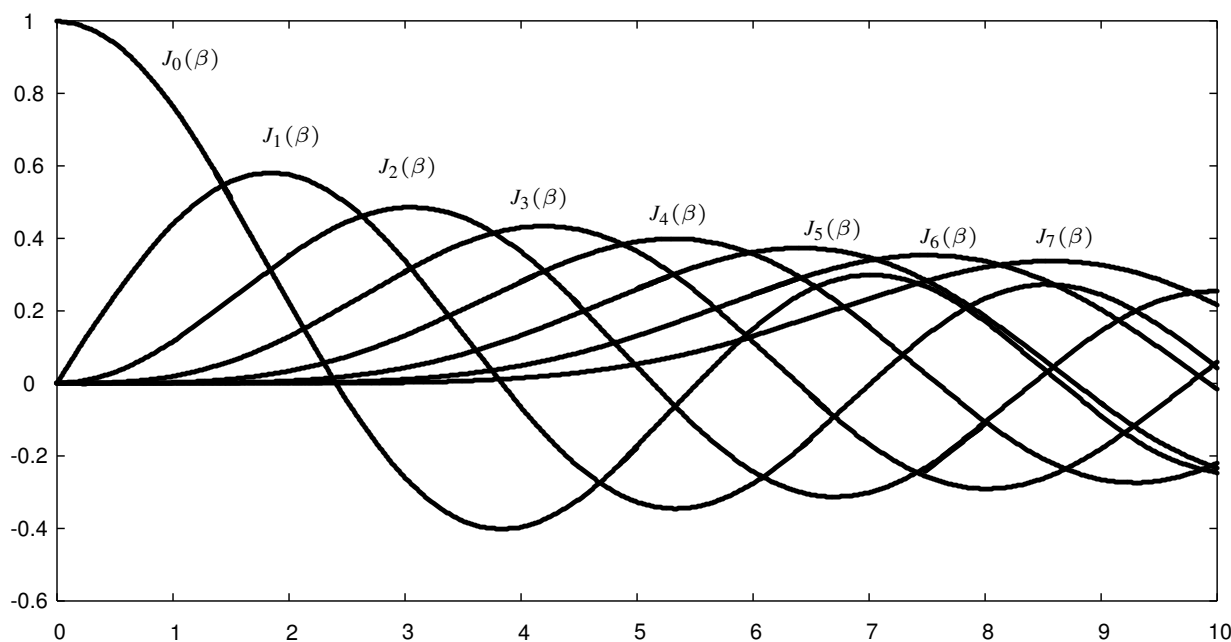
- Expresión alternativa de la señal modulada

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{R}e \left(A_c \cdot e^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t} \right) = \mathcal{R}e \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \underbrace{e^{j\omega_c t} \cdot e^{j(n \cdot \omega_m)t}}_{e^{j(\omega_c + n \cdot \omega_m)t}} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c \cdot J_n(\beta) \cdot \cos((\omega_c + n \cdot \omega_m) \cdot t) \end{aligned}$$

Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

$$J_n(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\beta}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)!}, \text{ Para } \beta \downarrow J_n(\beta) \approx \frac{\beta^n}{2^n n!}, J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta), & n \text{ par} \\ -J_n(\beta), & n \text{ impar} \end{cases}$$

Se encuentra habitualmente en tablas o en figuras



Modulación mediante una señal sinusoidal - Análisis

- La señal modulada contiene sinusoides con las frecuencias

$$\text{Frecuencias (Hz)} : f_c + n \cdot f_m, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Pulsación (rad/s)} : \omega_c + n \cdot \omega_m, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Amplitud de la senoide de pulsación $\omega_c + n \cdot \omega_m$

$$A_c \cdot J_n(\beta)$$

- Ancho de banda efectivo (contiene 98 % de la potencia):

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m \text{ Hz}$$

$$B_e = 2 \cdot (\beta + 1) \cdot f_m = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2\left(\frac{k_f a}{f_m} + 1\right)f_m, & \text{FM} \end{cases} = \begin{cases} 2(k_p a + 1)f_m, & \text{PM} \\ 2(k_f a + f_m), & \text{FM} \end{cases}$$

- Número total de armónicos en el ancho de banda efectivo B_e

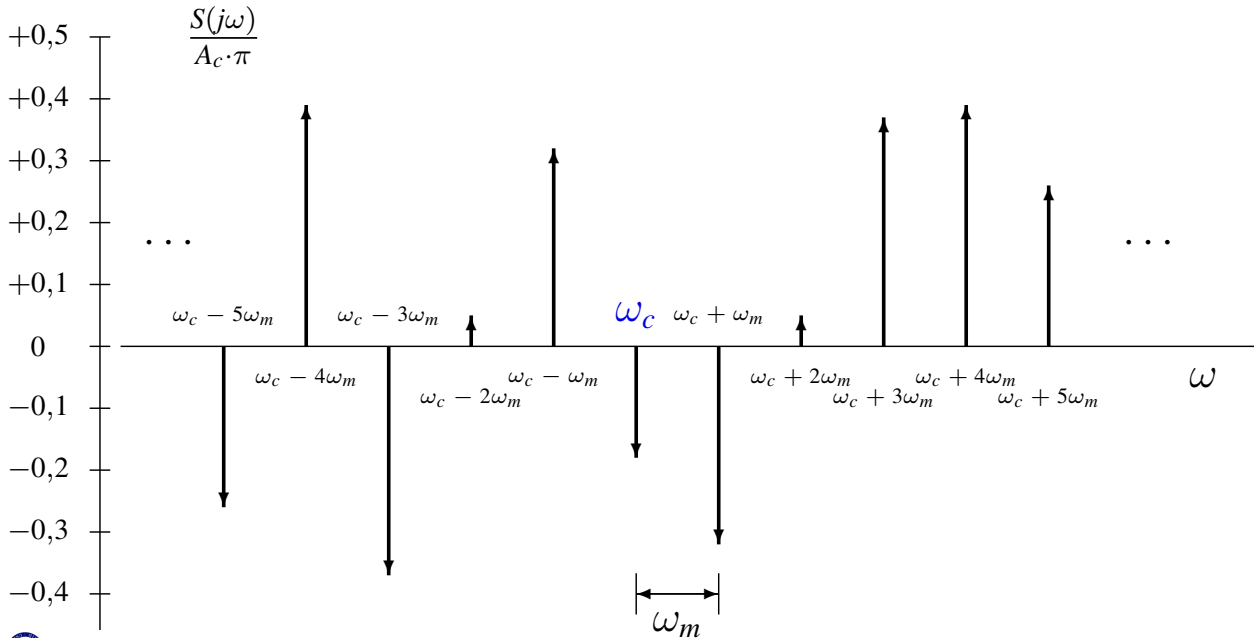
$$M_e = 2[\beta] + 3 = \begin{cases} 2[k_p a] + 3, & \text{PM} \\ 2\left[\frac{k_f a}{f_m}\right] + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

Forma del espectro - Ejemplo - Modulación con $\beta = 5$

- Suma de sinusoides de amplitud $A_c \cdot J_n(\beta)$ y pulsaciones $\omega_c + n \cdot \omega_m$

$$J_0(5) = -0,18, J_1(5) = -0,32, J_2(5) = 0,05$$

$$J_3(5) = 0,37, J_4(5) = 0,39, J_5(5) = 0,26, \dots$$



Otros tipos de moduladoras

- Modulación mediante una señal periódica
 - ▶ Admite un desarrollo en serie de Fourier
 - ★ Suma de sinusoides de frecuencias múltiplo de la que define el período
 - Frecuencias en el espectro de la señal

$$f_c \pm n \cdot f_m \quad \text{ó} \quad (\omega_c \pm n \cdot \omega_m)$$

- Amplitudes de cada frecuencia: suma de las contribuciones de cada armónico

- Modulación mediante una señal determinista no periódica
 - ▶ Análisis complicado debido a la no linealidad
 - ▶ Se aplica la Regla de Carson (regla heurística)

Para señales moduladoras con ancho de banda B Hz

$$BW_{Carson} \approx 2 \cdot (\beta + 1) \cdot B \text{ Hz}$$

Ancho de banda dependiente del índice de modulación β

EFFECTO DEL RUIDO

EN

MODULACIONES ANALÓGICAS

Efecto del ruido en modulaciones de amplitud

● Premisas

- ▶ Señal moduladora $m(t)$ de ancho de banda B Hz
- ▶ Señal recibida
 - ★ Transmisión sobre canal gaussiano
 - Transmisión ideal sin atenuación, sin distorsión, sólo con ruido térmico

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- ★ Potencia del término de señal: P_S (potencia transmitida)
 - ▶ Ruido térmico: modelo estadístico habitual
 - ★ Proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$
 - ▶ Receptor coherente
 - ★ Se introducirán filtros para limitar el efecto del ruido
 - ★ Los filtros se considerarán como ideales (prestaciones límite)
- Se analiza la relación señal a ruido de la señal demodulada para los distintos tipos de modulación y se comparará con la relación señal a ruido de la señal en una transmisión en banda base $\left(\frac{S}{N}\right)_b$

Referencia - Transmisión en banda base

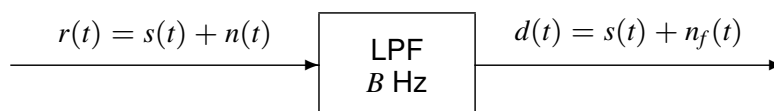
- Se transmite la señal sin modular

$$s(t) = m(t) \rightarrow P_S = P_M$$

- Señal en el receptor

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- Filtrado en el receptor para minimizar el efecto del ruido
 - ▶ Filtro paso bajo ideal de ancho de banda B Hz



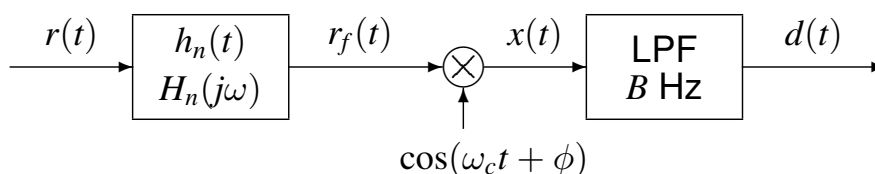
- ▶ Potencia del ruido a la salida del filtro

$$P_{n_f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{n_f}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{+2\pi B} \frac{N_0}{2} d\omega = N_0 \cdot B$$

- Relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 \cdot B}$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Notación



- Receptor coherente: $\phi = \phi_c$ (por simplicidad, $\phi_c = 0$)
- Filtro de ruido $h_n(t) / H_n(j\omega)$
 - ▶ Filtro paso banda ideal
 - ★ Banda de paso / ancho de banda: igual que señal modulada $s(t)$

- Señal recibida

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- Señal filtrada

$$r_f(t) = s(t) + n_f(t), \text{ con } n_f(t) = n(t) * h_n(t)$$

- Señal demodulada

$$x(t) = r_f(t) \times \cos(\omega_c t) = s(t) \cdot \cos(\omega_c t) + n_f(t) \cdot \cos(\omega_c t) = x_S(t) + x_n(t)$$

- Señal demodulada filtrada

$$d(t) = x(t) * h_{LPF-B}(t) = x_S(t) * h_{LPF-B}(t) + x_n(t) * h_{LPF-B}(t) = d_S(t) + d_n(t)$$

Receptor coherente + filtrado de ruido - Análisis

- Salida del receptor: Término de señal $d_S(t)$
 - ▶ No se ve afectado por el filtro de ruido
 - ▶ Para modulaciones de amplitud se calculó en su momento

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$

P_{d_S} : potencia en $d_S(t)$ relativa a $m(t)$ - P_{M_a} : potencia de $m_a(t)$, $P_{M_a} = \frac{a^2}{C_M^2} P_M$

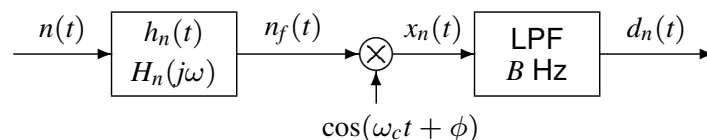
- Salida del receptor: Término de ruido $d_n(t)$
 - ▶ Depende del filtro de ruido empleado
 - ★ Depende del tipo de modulación
 - ★ Potencia: P_{d_n}
- Relación señal a ruido tras la demodulación

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}}$$

- ▶ Se comparará con la relación señal a ruido en banda base

$$\left(\frac{S}{N}\right)_b = \frac{P_S}{N_0 \cdot B}$$

Potencia del ruido tras la demodulación - General



- Densidad espectral de potencia del ruido filtrado $n_f(t)$

$$S_{n_f}(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |H_n(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_n(j\omega)|^2$$

- Densidad espectral de potencia del ruido demodulado $x_n(t)$

$$S_{x_n}(j\omega) = \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{4} S_{n_f}(j\omega + j\omega_c) = \frac{N_0}{8} \left[|H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 + |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 \right]$$

- Densidad espectral de potencia tras el filtrado paso bajo $d_n(t)$

$$S_{d_n}(j\omega) = S_{x_n}(j\omega) \cdot |H_{LPF-B}(j\omega)|^2 = \begin{cases} S_{x_n}(j\omega), & \text{si } |\omega| \leq W = 2\pi B \\ 0, & \text{si } |\omega| > W = 2\pi B \end{cases}$$

- Potencia tras el filtrado paso bajo

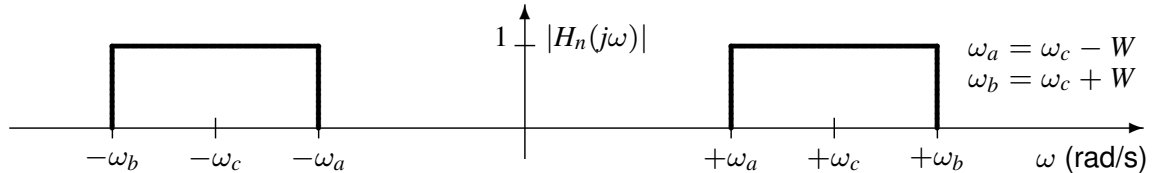
$$\begin{aligned} P_{d_n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{d_n}(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} S_{x_n}(j\omega) d\omega \\ &= \frac{N_0}{8} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega - j\omega_c)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |H_n(j\omega + j\omega_c)|^2 d\omega \right] \end{aligned}$$

Cálculo de la potencia de ruido - AM convencional y DBL

- Para ambas modulaciones el filtro de ruido es idéntico

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

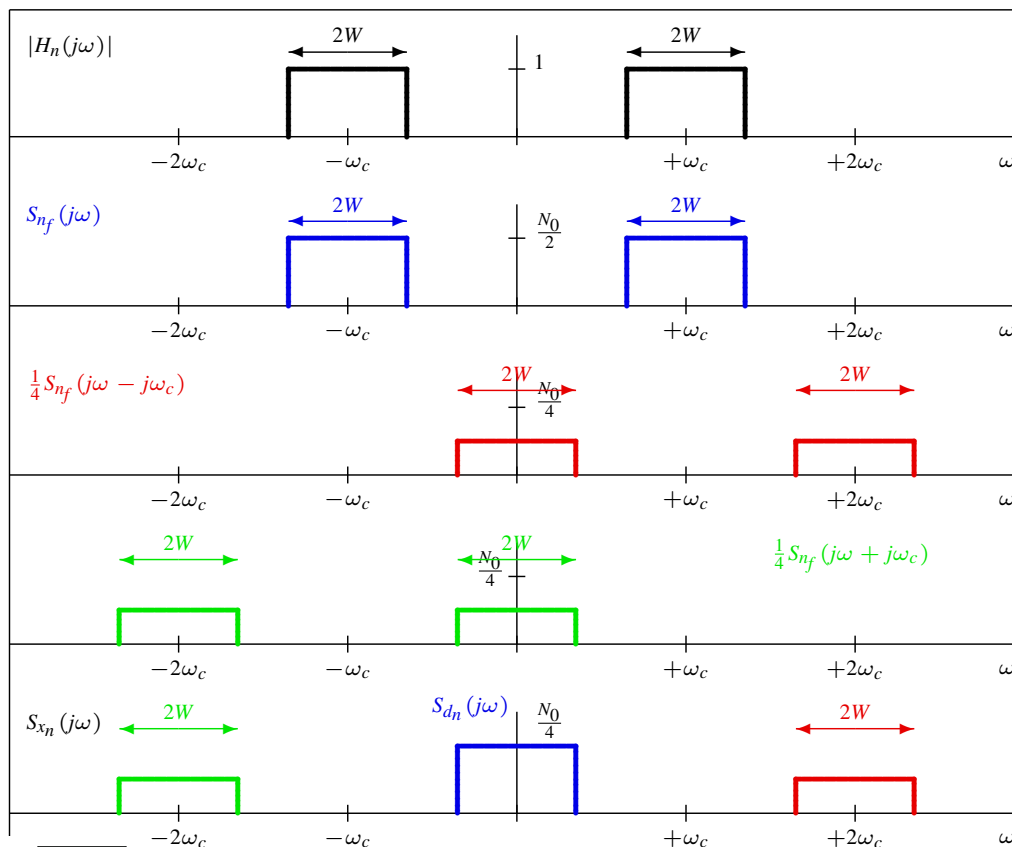


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 4B$$

$$P_{dn} = \frac{1}{2} N_0 B$$

Ruido en DBL y AM convencional - Interpretación frecuencial

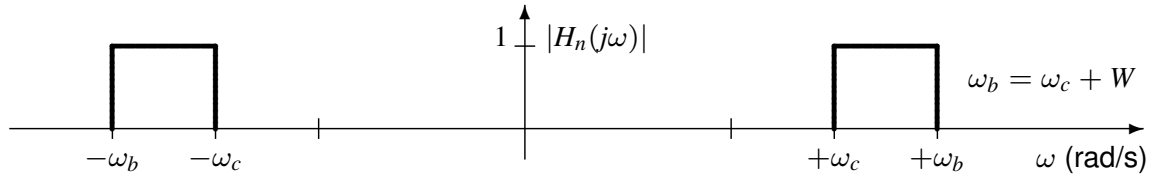


Cálculo de la potencia de ruido - BLU

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

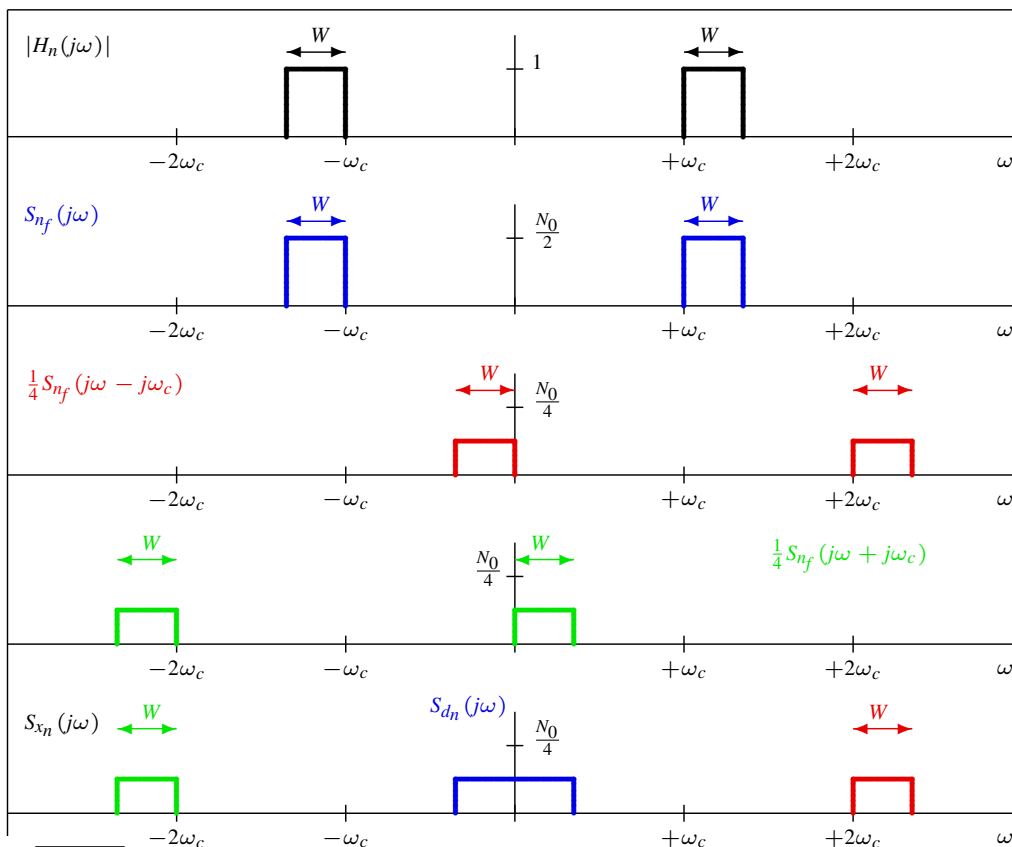


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2B$$

$$P_{dn} = \frac{1}{4} N_0 B$$

Ruido en BLU - Interpretación frecuencial (BLS)



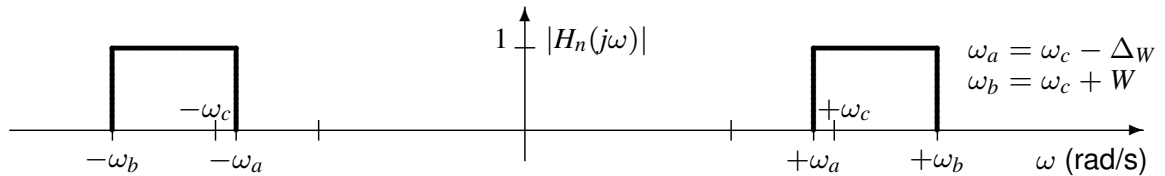
Cálculo de la potencia de ruido - BLV

- Se presenta el caso de banda lateral superior

$$H_n(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_c - \Delta_W \leq |\omega| \leq \omega_c + W \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

W : ancho de banda en rad/s ($W = 2\pi B$)

Δ_W : exceso de ancho de banda vestigial en rad/s ($\Delta_W = 2\pi\Delta_B$)

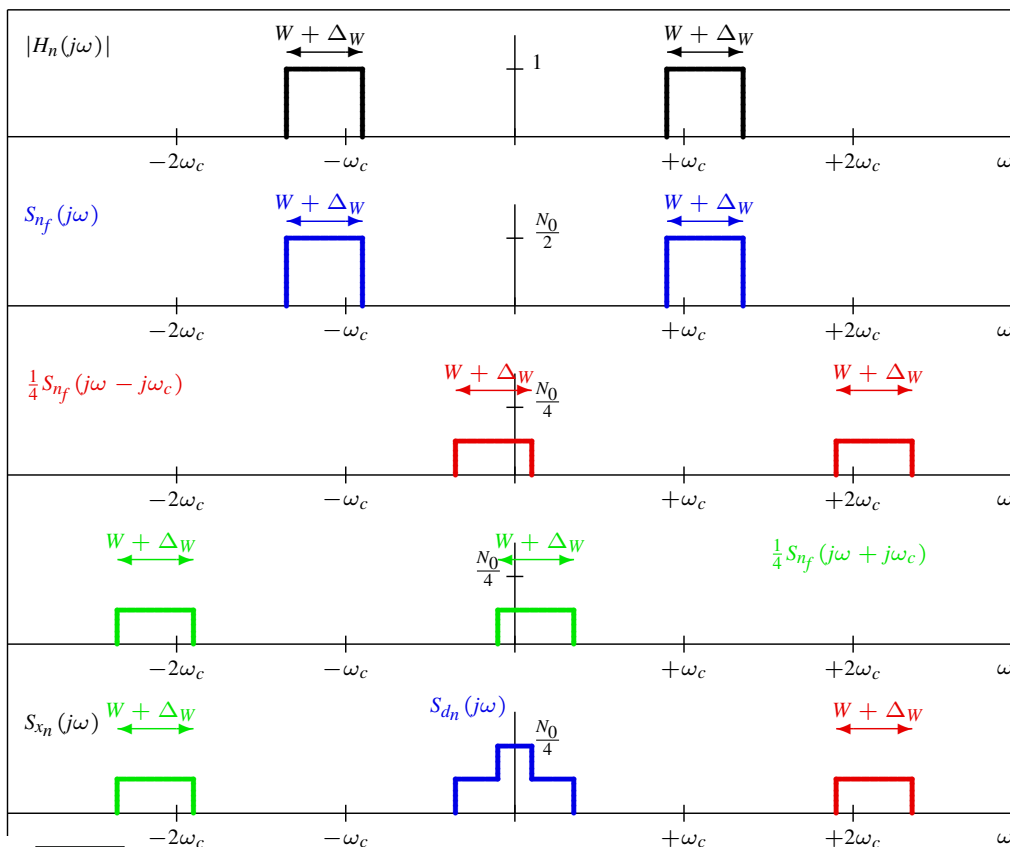


- Cálculo de la potencia de ruido

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega - j\omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} H_n(j\omega + j\omega_c) d\omega = 2(B + \Delta_B)$$

$$P_{d_n} = \frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$$

Ruido en BLV - Interpretación frecuencial (BLS)



Cálculo de relaciones señal a ruido - DBL y BLU

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

- Relación señal a ruido para DBL

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{DBL} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- Relación señal a ruido para BLU

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{BLU} = \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 B} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} = \frac{P_S}{N_0 B} = \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

Misma relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

Cálculo de relaciones señal a ruido - AM convencional

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

- Relación señal a ruido para AM convencional

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{AM} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}}{\frac{1}{2} N_0 B} = \frac{\frac{A_c^2}{2} P_{M_a}}{N_0 B} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} \frac{\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}}}_{\eta_{AM}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{AM} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

Peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- ▶ Factor de eficiencia $\eta_{AM} < 1$

$$\eta_{AM} = \frac{P_{M_a}}{1 + P_{M_a}} = \frac{\frac{a^2}{C_M^2} P_M}{1 + \frac{a^2}{C_M^2} P_M} = \frac{P_M}{\frac{C_M^2}{a^2} + P_M}$$

Depende del índice de modulación: peor eficiencia para valores bajos de a

Cálculo de relaciones señal a ruido - BLV

Modulación	P_S	$d_S(t)$	P_{d_S}	P_{d_n}
AM convencional	$\frac{A_c^2}{2} [1 + P_{M_a}]$	$\frac{A_c}{2} [1 + m_a(t)]$	$\frac{A_c^2}{4} P_{M_a}$	$\frac{1}{2} N_0 B$
DBL	$\frac{A_c^2}{2} P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{2} N_0 B$
BLU	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 B$
BLV	$A_c^2 P_M$	$\frac{A_c}{2} m(t)$	$\frac{A_c^2}{4} P_M$	$\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)$

● Relación señal a ruido para BLV

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N}\right)_{BLV} &= \frac{P_{d_S}}{P_{d_n}} = \frac{\frac{A_c^2}{4} P_M}{\frac{1}{4} N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{A_c^2 P_M}{N_0 (B + \Delta_B)} = \frac{B}{B + \Delta_B} \frac{A_c^2 P_M}{N_0 B} \\ &= \underbrace{\frac{B}{B + \Delta_B}}_{\eta_{BLV}} \frac{P_S}{N_0 B} = \eta_{BLV} \left(\frac{S}{N}\right)_b \end{aligned}$$

Peor relación señal a ruido que transmitiendo en banda base

- ▶ Factor de eficiencia $\eta_{BLV} < 1$

$$\eta_{BLV} = \frac{B}{B + \Delta_B}$$

Depende del exceso de ancho de banda Δ_B vestigial: habitualmente $\Delta_B \ll B$ y en ese caso $\eta_{BLV} \approx 1$, i.e., la relación señal a ruido es prácticamente igual que en banda base

Ruido en modulaciones angulares

- Análisis mucho más complejo (dependencia no lineal)
- Salida del demodulador (con ruido)

$$d(t) = \begin{cases} k_p \cdot m(t) + Y_n(t), & \text{PM} \\ k_f \cdot m(t) + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} Y_n(t), & \text{FM} \end{cases}$$

$Y_n(t)$: término de ruido a la salida del demodulador

- Relación señal a ruido (potencia recibida $P_R = P_S = \frac{A_c^2}{2}$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \begin{cases} \frac{k_p^2 A_c^2}{2} \frac{P_M}{N_0 B} = P_M \left(\frac{\beta_p}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{PM} \\ \frac{3k_f^2 A_c^2}{2B^2} \frac{P_M}{N_0 B} = 3P_M \left(\frac{\beta_f}{\max |m(t)|}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_b, & \text{FM} \end{cases}$$

Ganancia en relación señal a ruido proporcional al índice de modulación al cuadrado

- Expresión general

$$\left(\frac{S}{N}\right)_d = \alpha \left(\frac{P_M}{C_M^2}\right) \times \beta^2 \times \left(\frac{S}{N}\right)_b$$

- ▶ El factor α depende de la modulación: $\alpha_{PM} = 1$, $\alpha_{FM} = 3$
- ▶ El término $\left(\frac{P_M}{C_M^2}\right)$ suele ser constante (depende del tipo de señales)

Ruido en modulaciones angulares - Efecto umbral

- La ganancia en $\left(\frac{S}{N}\right)_d$ sólo se obtiene a partir de una relación señal a ruido umbral a la entrada del receptor

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{umbral} = 20 \cdot (\beta + 1)$$

- Esto implica en la práctica que hay un nivel umbral de potencia recibida que hay que alcanzar

$$P_{R_{umbral}} = (N_0B) \times \left(\frac{S}{N}\right)_{umbral} \rightarrow A_{c,umbral} = \sqrt{2P_{R_{umbral}}}$$



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

Modulaciones Analógicas 201 / 418



Universidad
Carlos III de Madrid

OPEN COURSEWARE
CONSORTIUM

Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 4

MODULACIONES Y DETECCIÓN EN CANALES GAUSIANOS

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



Índice de contenidos

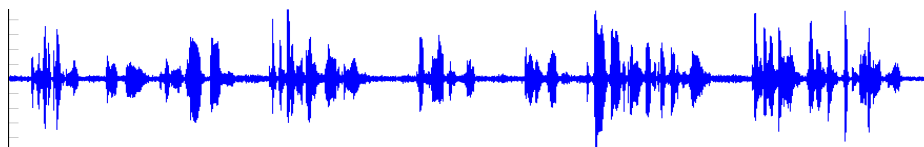
- Introducción a los sistemas de comunicaciones digitales
- Representación geométrica de las señales
- Modelo de comunicación digital
- Diseño de cada elemento del sistema de comunicaciones
 - ▶ Demodulador
 - ▶ Decisor
 - ▶ Codificador
 - ▶ Modulador

Definición de un sistema de comunicaciones

- Finalidad de un sistema de comunicaciones: *transmisión*
- Transmisión: *Proceso de **enviar**, transportar, información de un punto (fuente) hasta otro punto (destino) a través de un canal o medio de transmisión*



- ▶ Transmisión de información a través del medio de transmisión (canal): señales electromagnéticas
 - ★ Conversión de la información en señales adecuadas para su transmisión por el canal
 - ★ Conversión información / señal eléctrica: Transductor
 - Ejemplo: salida de un micrófono (señal de voz)



RESERVOIR DOGS (Mr. White): *If you get a customer, or an employee, who thinks he's Charles Bronson, take the butt of your gun and smash their nose in. Everybody jumps. He falls down screaming, blood squirts out of his nose, nobody says fucking shit after that.*

Sistemas de comunicaciones analógicos y digitales

● Sistema de comunicaciones analógico

- ▶ Diseñado para enviar como información una forma de onda continua



● Sistema de comunicaciones digital

- ▶ Diseñado para enviar como información una secuencia de símbolos pertenecientes a un alfabeto finito (M posibles valores para cada símbolo)
 - ★ Ejemplo más común: Bits ($M = 2$): $\{0, 1\}$
 - Información: 0110001101110011010101110010011010...
- ▶ Transmisión a una velocidad (tasa de símbolo) dada: R_s símbolos/s
 - ★ Se transmite un símbolo cada $T = \frac{1}{R_s}$ segundos
- ▶ Los símbolos han de convertirse en señales eléctricas para su transmisión
 - ★ Cada símbolo se asocia a una forma de onda
 - ★ Caso más simple: formas de onda de $T = \frac{1}{R_s}$ segundos

● Preponderancia de los sistemas de comunicaciones digitales



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Introducción 205/418

Ventajas de los Sistemas Digitales

- Capacidad de **regeneración**
- Existen técnicas de detección y corrección de errores
- La información se puede encriptar (proteger)
- Permite corregir la distorsión introducida por el canal (igualación)
- Formato independiente del tipo de información (voz, datos, TV, etc.)
- Permite utilizar TDM/TDMA y CDM/CDMA (además de FDM/FDMA) como mecanismo de multiplexación/acceso al medio
- Los circuitos son, en general
 - ▶ Más fiables
 - ▶ De menor coste
 - ▶ Más flexibles (programables)



©Marcelino Lázaro, 2014

Teoría de la Comunicación

MDCG - Introducción 206/418

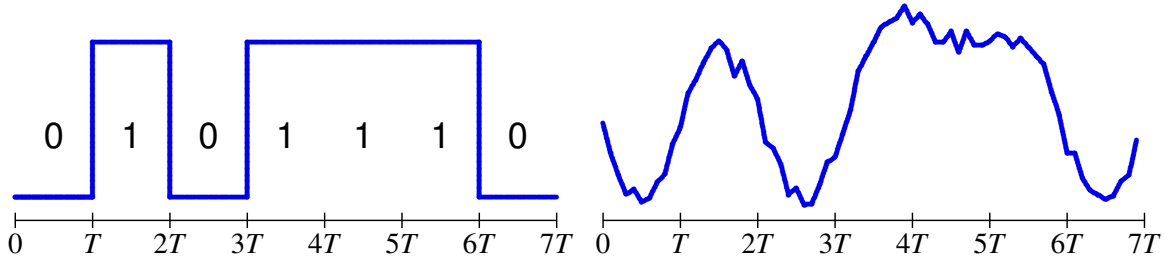
Regeneración digital

CODIFICACIÓN DE BITS - Sistema binario con pulsos rectangulares

1 \equiv Nivel alto

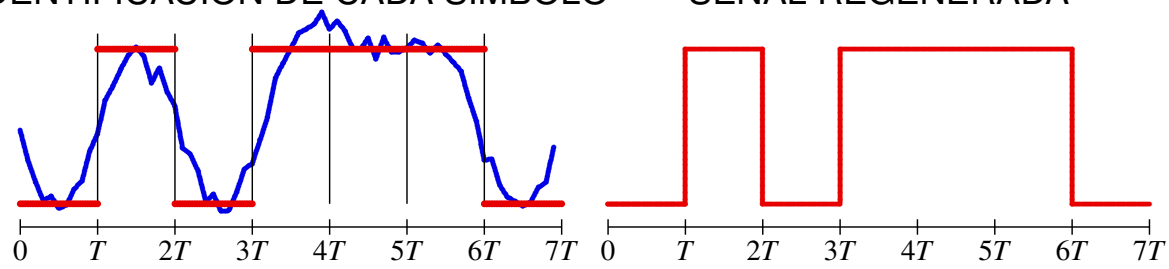
0 \equiv Nivel bajo

SEÑAL DIGITAL TRANSMITIDA SEÑAL RECIBIDA DISTORSIONADA



IDENTIFICACIÓN DE CADA SÍMBOLO

SEÑAL REGENERADA

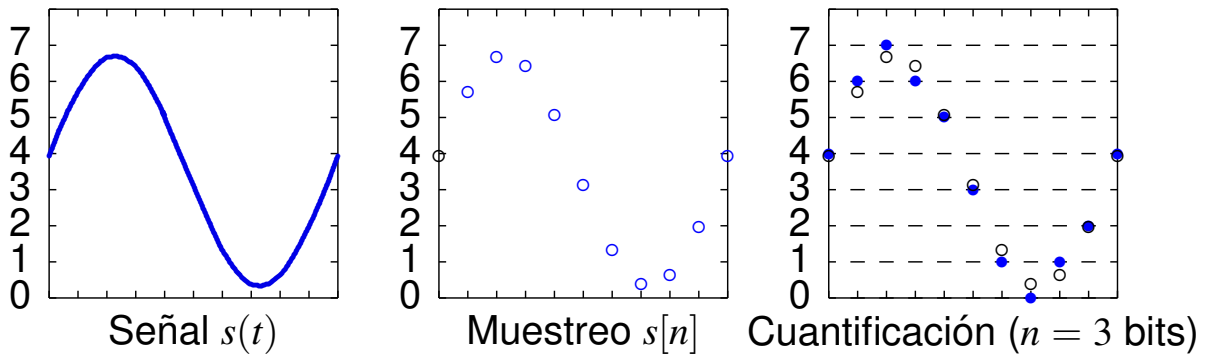


Desventajas de los Sistemas Digitales

- Necesidad de sincronismo
- Mayor ancho de banda
- Muchas fuentes de información son de naturaleza analógica
 - ▶ Conversión A/D
 - ★ Muestreo
 - ★ Cuantificación \rightarrow error de cuantificación
 - ▶ Conversión D/A
 - ★ Interpolación
 - ★ Filtrado paso bajo

Conversión Analógico Digital (A/D)

- Fuentes analógicas: amplitudes continuas, tiempo continuo
- Conversión analógico/digital:
 - ▶ Tiempo discreto: Muestreo a frecuencia f_s muestras/s
 - ▶ Amplitudes discretas: Cuantificación a n bits/muestra
 - ★ Ruido de cuantificación: sólo hay 2^n niveles de cuantificación
 - Diferencia entre valor muestreado y valor cuantificado
 - ★ Decece a medida que se incrementa n

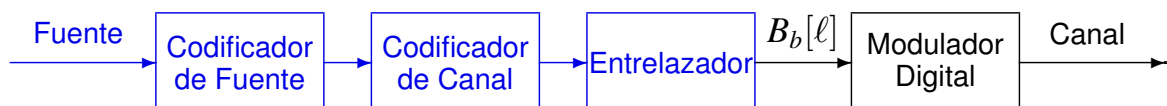


- Tasa binaria (bits/s): $R_b = f_s$ (muestras/s) \times n (bits/muestra)



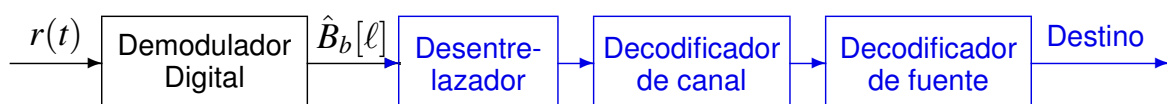
Transmisor/Receptor Digital

- Transmisor digital



- ▶ Modulador digital: Transmisión de una secuencia de símbolos (generalmente bits, $B_b[l]$) a través de una canal de comunicaciones

- Receptor digital



- ▶ Demodulador digital: Recuperación de la secuencia de símbolos (bits, $\hat{B}_b[l]$) a partir de la señal recibida través de una canal de comunicaciones, $r(t)$



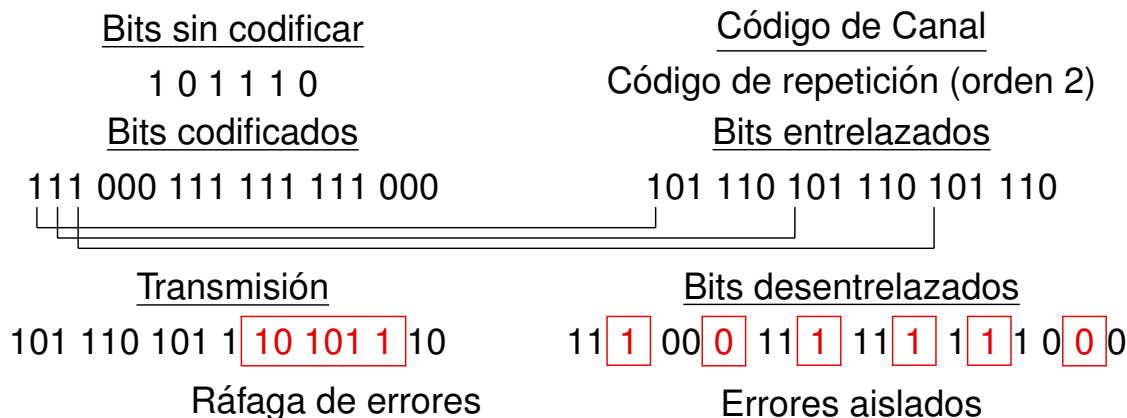
Codificadores de fuente y de canal

- Codificador de fuente
 - ▶ Reduce la redundancia de la fuente (compresión)
 - ▶ Reducción de la tasa binaria a transmitir
- Codificador de canal
 - ▶ Introducción de redundancia de forma controlada
 - ▶ Detección y corrección de errores
 - ▶ Capacidad de detección/corrección en función de su complejidad
 - ▶ Ejemplo más sencillo: códigos de repetición
 - ★ Código de repetición 1: $0 \rightarrow 00$ $1 \rightarrow 11$
 - Detecta 1 error sobre un bloque de dos bits
 - ★ Código de repetición 2: $0 \rightarrow 000$ $1 \rightarrow 111$
 - Detecta 2 errores o corrige 1 error (corrección basada en decisión por mayoría) sobre un bloque de tres bits

Entrelazado (Interleaving)

- Protección frente a errores de ráfaga
 - ▶ En combinación con el codificador de canal
- Reordenación de bits
 - ▶ Objetivo: transformar errores de ráfaga en errores aislados
 - ★ El decodificador de canal puede corregir relativamente pocos errores por bloque
- Clases de entrelazadores
 - ▶ Entrelazadores bloque
 - ▶ Entrelazadores convolucionales

Entrelazado - Un ejemplo



1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0

Entrelazador
 $N_c \times N_b$

Entrelazador Bloque
 Entrada de bits: por columna
 Salida de bits: por fila

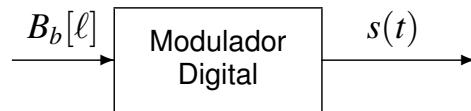
1	1	1
0	0	0
1	1	1
1	1	1
1	1	1
0	0	0

Desentrelazador
 $N_b \times N_c$

Diseño de un sistema de comunicaciones

- Factores a considerar en el diseño
 - ▶ Tecnologías existentes
 - ▶ Coste
 - ▶ Calidad (prestaciones)
 - ★ Sist. analógicos: fidelidad → relación señal a ruido (S/N)
 - ★ Sist. digitales: tasa de errores (BER)
 - ▶ Consumo de recursos
 - ★ Potencia (energía)
 - Limitaciones físicas
 - Limitaciones administrativas
 - Limitaciones económicas
 - ★ Ancho de banda
 - Mismo tipo de limitaciones
- Objetivo fundamental de este capítulo:
 - ▶ Diseño de moduladores/demoduladores digitales considerando el compromiso entre prestaciones y consumo de recursos

Modulador digital



- Transmisión de bits (secuencia $B_b[\ell]$) a una tasa binaria $R_b = \frac{1}{T_b}$ bits/s
 - ▶ Conversión en una señal eléctrica $s(t)$
- Transmisión de bits por bloques - Secuencia de símbolos
 - ▶ Segmentación de la secuencia $B_b[\ell]$ en bloques de m bits
 - ▶ Cada bloque de m bits es un símbolo
 - ★ 1 símbolo $\equiv m$ bits
 - ★ Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{M-1}$
 - ▶ Secuencia de símbolos $B[n]$
 - ★ Tasa de símbolo $R_s = \frac{1}{T}$ símbolos/s (baudios)
 - ★ Relación entre tasas R_b / R_s : $R_b = m \cdot R_s$ (o también $T = m \cdot T_b$)
 - ★ Alfabeto de posibles símbolos: $M = 2^m$ símbolos: $B \in \{b_i\}_{i=0}^{M-1}$
 - ▶ Transmisión de un símbolo (bloque de m bits) cada T seg.
- Conversión de secuencia de bits/símbolos a señal $s(t)$
 - ▶ Generación por tramos: “fragmentos” de T segundos (correspondientes a 1 símbolo)
 - ★ Intervalo de símbolo para $B[n]$: intervalo $nT \leq t < (n+1)T$

Conversión símbolo / señal - Modelo más simple

- Se estudia inicialmente el caso del primer símbolo
 - ▶ $B \equiv B[0]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $0 \leq t < T$
- Conversión símbolo / señal
 - ▶ Alfabeto de M posibles símbolos: $B \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$
 - ▶ Definición de M formas de onda de duración T segundos

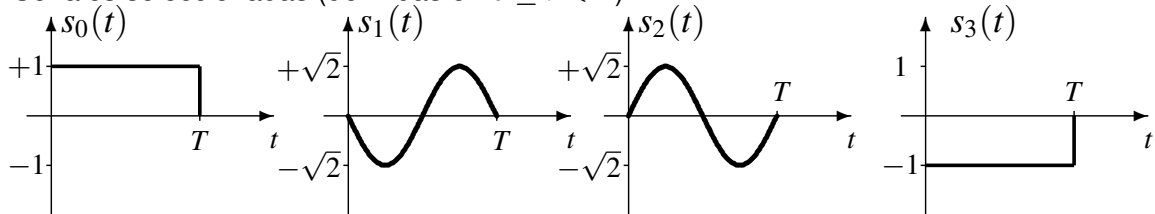
$$\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}, \text{ definidas en } 0 \leq t < T$$

- ▶ Asociación símbolo / forma de onda: $b_i \leftrightarrow s_i(t)$
- ▶ Generación de la señal a transmitir
 - ★ Si $B = b_i$, entonces $s(t) = s_i(t)$
- Transmisión del símbolo $B[n]$
 - ▶ Intervalo de símbolo: $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Valor de símbolo: $B[n] = b_j$
 - ★ Se traslada la forma de onda asociada a b_j al intervalo

$$s(t) = s_j(t - nT), \text{ en } nT \leq t < (n+1)T$$

Ejemplo $M = 4$

- Número de bits por símbolo: $m = 2 \rightarrow M = 4$ símbolos
- Símbolos: $b_0 \equiv 00, b_1 \equiv 01, b_2 \equiv 10, b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas (definidas en $0 \leq t < T$)



- Secuencia a transmitir: $B_b[\ell] = 011110001101 \dots$

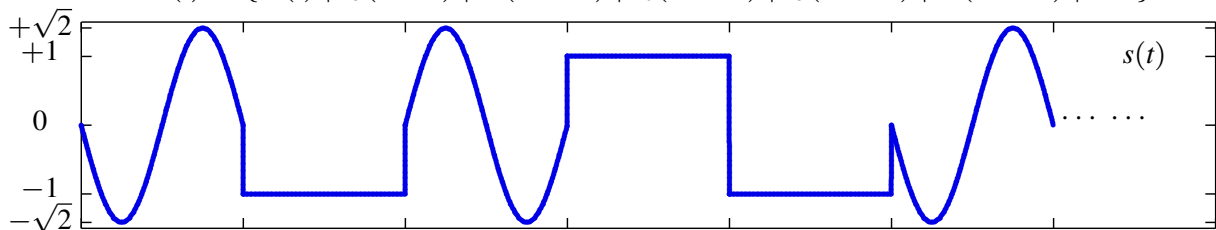
- Secuencia de símbolos

- ▶ Segmentación de $B_b[\ell]$: $01 | 11 | 10 | 00 | 11 | 01 | \dots$
- ▶ Secuencia $B[n] = b_1 | b_3 | b_2 | b_0 | b_3 | b_1 | \dots$

- Señal transmitida

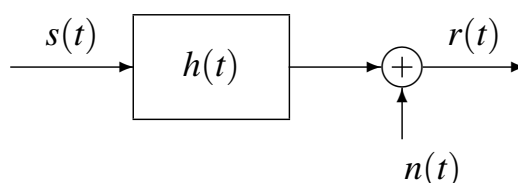
- ▶ Generación por intervalos:

$$s(t) = \{s_1(t) | s_3(t - T) | s_2(t - 2T) | s_0(t - 3T) | s_3(t - 4T) | s_1(t - 5T) | \dots\}$$



Transmisión a través del canal

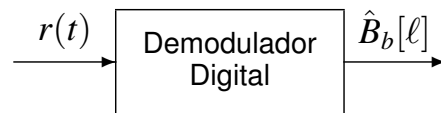
- Señal recibida a la salida del canal, $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones durante la transmisión
 - ▶ No coincide con la señal transmitida: $r(t) \neq s(t)$
- Modelo de canal - Efectos de distorsión considerados
 - ▶ Distorsión lineal
 - ★ Modelo: sistema lineal e invariante, $h(t), H(j\omega)$
 - ▶ Ruido térmico
 - ★ Modelo: proceso aleatorio $n(t)$ estacionario, ergódico, blanco, gaussiano, con densidad espectral de potencia $S_n(t) = \frac{N_0}{2}$, siendo $N_0 = k \times T^a(^{\circ}\text{K})$



- ▶ Señal recibida

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

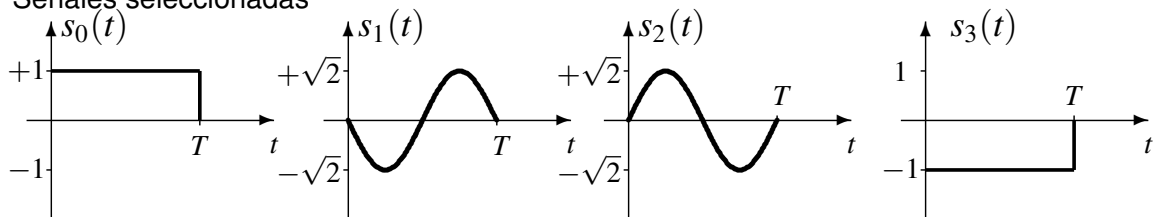
Demodulador digital



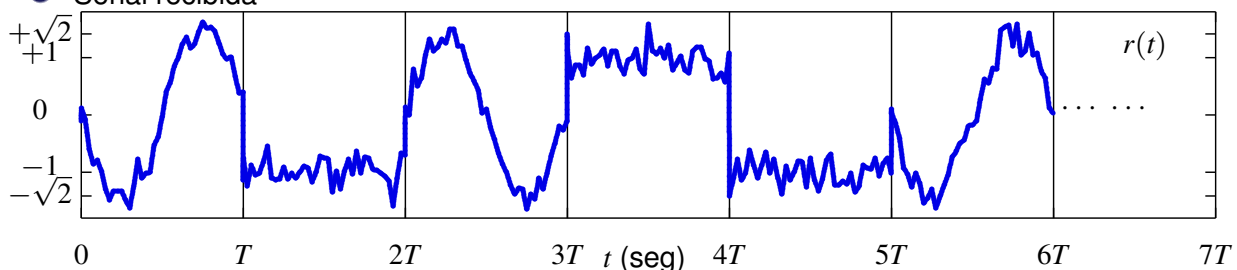
- Recuperación de la secuencia de bits $B_b[\ell]$ a partir de la señal recibida a través del canal, $r(t)$
 - ▶ La señal sufre distorsiones en la transmisión: $r(t) \neq s(t)$
- Procesado de $r(t)$ para recuperar los bits transmitidos
 - ▶ Procesado a tramos: partición en intervalos de símbolo
 - ▶ Estimación del símbolo (m bits) transmitido en cada intervalo
- Estima del primer símbolo: $\hat{B} \equiv \hat{B}[0]$
 - ▶ Observación de la señal $r(t)$ en el primer intervalo: $0 \leq t < T$
 - ▶ Comparar con las M posibles formas de onda transmitidas
 - ★ Si la "más parecida" es $s_k(t)$, entonces $\hat{B} = b_k$
- Estima del símbolo de índice n : $\hat{B}[n]$
 - ▶ Observar la señal $r(t)$ en el intervalo $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Comparar con las M posibles formas de onda
 - ★ Si la "más parecida" es $s_v(t)$, entonces $\hat{B}[n] = b_v$

Ejemplo $M = 4$

- Símbolos: $b_0 \equiv 00$, $b_1 \equiv 01$, $b_2 \equiv 10$, $b_3 \equiv 11$
- Señales seleccionadas



- Señal recibida



- Detección de símbolos

- ▶ Segmentación de la señal en intervalos de símbolo
 - ★ $n = 0$, intervalo $0 \leq t < T$ - Señal "más parecida": $s_1(t) \rightarrow \hat{B}[0] = b_1$
 - ★ $n = 1$, intervalo $T \leq t < 2T$ - Señal "más parecida": $s_3(t) \rightarrow \hat{B}[1] = b_3$
 - ★ Siguiendo el mismo proceso: $\hat{B}[2] = b_2$, $\hat{B}[3] = b_0$, $\hat{B}[4] = b_3$, $\hat{B}[5] = b_1$

- Secuencia decidida: $\hat{B}[n] = b_1|b_3|b_2|b_0|b_3|b_1| \dots \Rightarrow \hat{B}_b[\ell]: 01|11|10|00|11|01| \dots$

Selección de las M fomas de onda - Factores a considerar

- 1 Prestaciones: probabilidad de equivocarse en el receptor (P_e)
 - ▶ Decisión: señal más parecida - P_e depende del “parecido” entre señales
 - ▶ Medida de “parecido” (distancia): energía de la diferencia (raíz cuadrada)

$$d(s_i(t), s_k(t)) = \sqrt{\mathcal{E}\{s_i(t) - s_k(t)\}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt}$$

- ★ Reducir errores: incrementar la distancia entre señales

- 2 Energía de la señal transmitida

- ▶ La energía de la señal transmitida está limitada en la práctica
- ▶ Cuantificación: energía media por símbolo transmitido (E_s)
 - ★ Probabilidad de cada símbolo: $p_B(b_i) = P(B[n] = b_i)$
 - ★ Energía del símbolo $b_i \equiv$ energía de la señal $s_i(t)$
 - ★ Energía media por símbolo: promedio de la energía de los M símbolos

$$E_s = \sum_{i=0}^{M-1} p_B(b_i) \cdot \mathcal{E}\{s_i(t)\}, \text{ siendo } \mathcal{E}\{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt$$

- 3 Adecuación al canal ($h(t)$)

- ▶ Minimizar la distorsión que sufre la señal en la transmisión: $r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$
- ▶ Situación ideal: distorsión lineal introducida por el canal nula (sólo ruido)

- ★ El ruido es el único elemento de distorsión: $r(t) = s(t) + n(t)$

- ★ Se consigue si: $s_i(t) * h(t) = s_i(t)$ ó $S_i(j\omega) \cdot H(j\omega) = S_i(j\omega)$ para $i = 0, 1, \dots, M - 1$

Conveniencia de una representación vectorial de las señales

- Diseño del modulador digital
 - ▶ Selección de las M señales que permiten transmitir cada bloque de m bits
- Considerar los 3 factores anteriores a la hora de seleccionar las M señales trabajando en el dominio temporal es un problema difícil de tratar
 - ▶ Se simplifica utilizando una representación vectorial de las señales
- Representación vectorial de las señales
 - ▶ Facilitará el cálculo de la energía de cada señal
 - ▶ Facilitará el cálculo del “parecido” entre señales
 - ▶ Permite separar el problema de la adecuación de las señales al canal de los otros dos factores a considerar

Representación geométrica de las señales

Espacios vectoriales

Un espacio vectorial (\mathbb{V}) es un conjunto de elementos (vectores) que poseen las siguientes propiedades:

- Ley de composición interna: suma (+)

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \in \mathbb{V}, \text{ Operación suma: } \boxed{\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{V}}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Conmutativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}; \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- b) Asociativa: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{V}; \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
- c) Existencia de elemento neutro

$$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{V} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- d) Existencia de elemento inverso

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{V} \exists (-\mathbf{x}) : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Espacios vectoriales (II)

- Ley de composición externa: producto (\times) con escalares (\mathbb{C})

$$\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x} \in \mathbb{V}, \text{ Operación producto: } \boxed{\alpha \times \mathbf{x} \in \mathbb{V}}$$

que debe cumplir las siguientes propiedades

- a) Asociativa:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; \alpha \times (\beta \times \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \times \mathbf{x}$$

- b) Existencia de elemento neutro:

$$\exists e_n \in \mathbb{C} : \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; e_n \times \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- c) Distributiva respecto a la suma:

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}; \alpha \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \times \mathbf{x} + \alpha \times \mathbf{y}$$

- d) Distributiva respecto al producto por un escalar:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}; (\alpha + \beta) \times \mathbf{x} = \alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{x}$$

Espacios de Hilbert

- Espacio de Hilbert: espacio vectorial con producto escalar

Notación: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ - Operación $f : (\mathbb{V}, \mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{C}$

- Propiedades de la operación producto escalar

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$
- $\langle (\alpha \times \mathbf{x} + \beta \times \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle = \alpha \times \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \times \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (vector elemento neutro)

Norma para el espacio vectorial

- El producto escalar define una norma para el espacio vectorial

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- Medida de distancia entre vectores

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- Ángulo entre dos vectores se mide como

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\operatorname{Re}\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right)$$

- La definición del producto escalar no es única
 - ▶ Cada definición da lugar a un espacio de Hilbert distinto

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo continuo (espacio L_2)

- Producto escalar que define el espacio L_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t)\}}$$

- Distancia entre dos señales

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt} = \sqrt{\mathcal{E}\{x(t) - y(t)\}}$$

Espacio de Hilbert para señales de energía en tiempo discreto (espacio ℓ_2)

- Producto escalar que define el espacio ℓ_2

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n]$$

- Norma inducida por este producto escalar

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n]\}}$$

- Distancia: distancia euclídea

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2} = \sqrt{\mathcal{E}\{x[n] - y[n]\}}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

- Expresiones para los espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y^*[n] \right| \leq \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2}$$

- Se cumple la igualdad si los dos vectores son linealmente dependientes (proporcionales)

$$\mathbf{y} = \alpha \times \mathbf{x}, \text{ para cualquier } \alpha \in \mathbb{C}$$

- ▶ Particulación para espacios de señales de energía L_2 y ℓ_2

$$y(t) = \alpha \times x(t) \text{ ó } y[n] = \alpha \times x[n]$$

Representación en una base del espacio vectorial

- Base para un espacio de Hilbert \mathbb{H} de dimensión D :
Subconjunto de D elementos $\{\mathbf{b}_n\}_{n=0}^{D-1} \in \mathbb{H}$ que permiten representar cada elemento del espacio como una combinación lineal de estos D elementos

$$\mathbf{x} = \sum_{n=0}^{D-1} c_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}_n$$

- ▶ D coeficientes únicos $c_n(\mathbf{x})$ ($n \in \{0, 1, \dots, D-1\}$) para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ (coordenadas)

- Base ortogonal:

$$\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m \rangle = 0, \forall n \neq m$$

El producto escalar de dos elementos distintos de la base es nulo

- Base ortonormal: base ortogonal con elementos normalizados

$$\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_m \rangle = 0, \forall n \neq m \text{ y además } \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n \rangle = 1 \rightarrow \|\mathbf{b}_n\| = 1$$

- ▶ Coeficientes en una base ortonormal:

$$c_n(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b}_n \rangle$$

Se obtienen a través del producto escalar (del vector con los elementos de la base)

Procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt

- Objetivo (general): encontrar una base ortonormal que permita representar un conjunto de vectores
- Objetivo (particular): encontrar una base ortonormal que permita representar un conjunto de M señales

- ▶ Señales (M)

$$\{s_i(t)\}_{i=0}^{M-1}$$

- ▶ Base ortonormal - N señales (dimensión N) - $N \leq M$

$$\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$$

- ▶ Representación de las señales

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- ▶ Coordenadas de una señal, $s_i(t)$, en la base

$$a_{i,j} = \langle s_i(t), \phi_j(t) \rangle$$

Representación vectorial (N dimensional): vector de coordenadas $\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$

Obtención de la base

- Paso 0: Elegir $s_0(t)$ con energía no nula

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_0}}, \quad \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}\{s_0(t)\} : \text{Energía de } s_0(t)$$

- Paso 1

- ▶ Proyección de $s_1(t)$ sobre $\phi_0(t)$

$$a_{1,0} = \langle s_1(t), \phi_0(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot \phi_0^*(t) dt$$

- ▶ Ortogonalización - Se sustrae esta proyección

$$d_1(t) = s_1(t) - a_{1,0} \cdot \phi_0(t)$$

- ▶ Normalización

$$\phi_1(t) = \frac{d_1(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_1}}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\{d_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_1(t)|^2 dt$$

Obtención de la base (II)

- Paso k

- ▶ Proyección de $s_k(t)$ sobre los elementos ya disponibles de la base ($\{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{k-1}(t)\}$)

$$a_{k,j} = \langle s_k(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_k(t) \cdot \phi_j^*(t) dt, \quad j = 0, 1, \dots, k-1$$

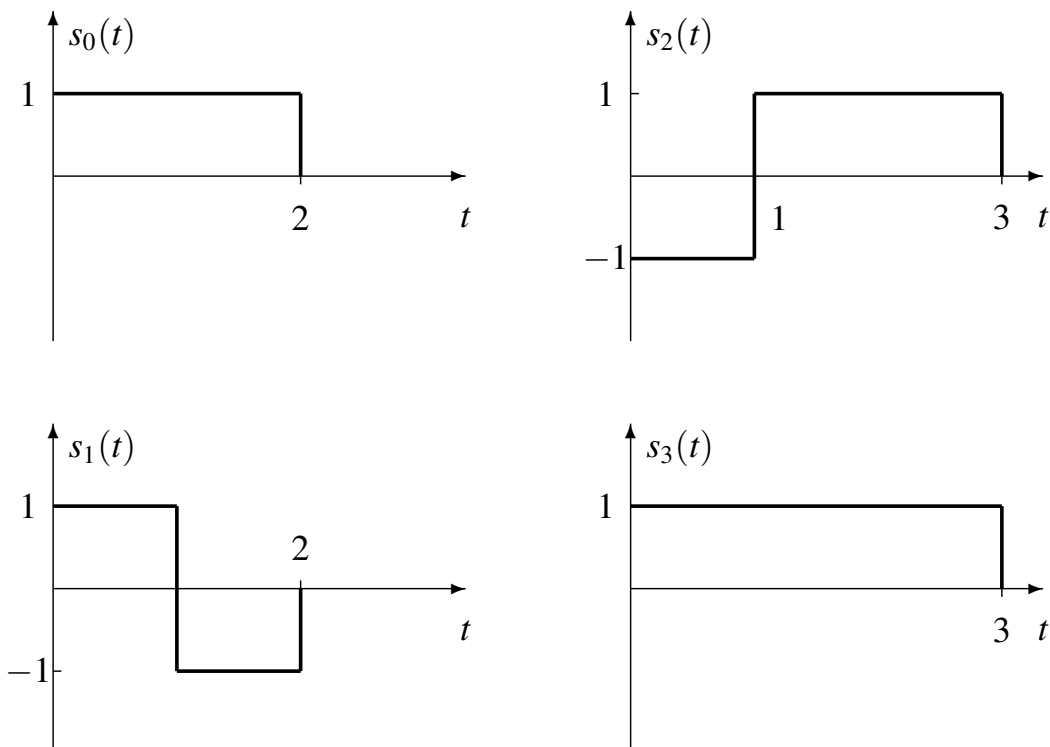
- ▶ Ortogonalización - Sustracción de las proyecciones

$$d_k(t) = s_k(t) - \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j} \cdot \phi_j(t)$$

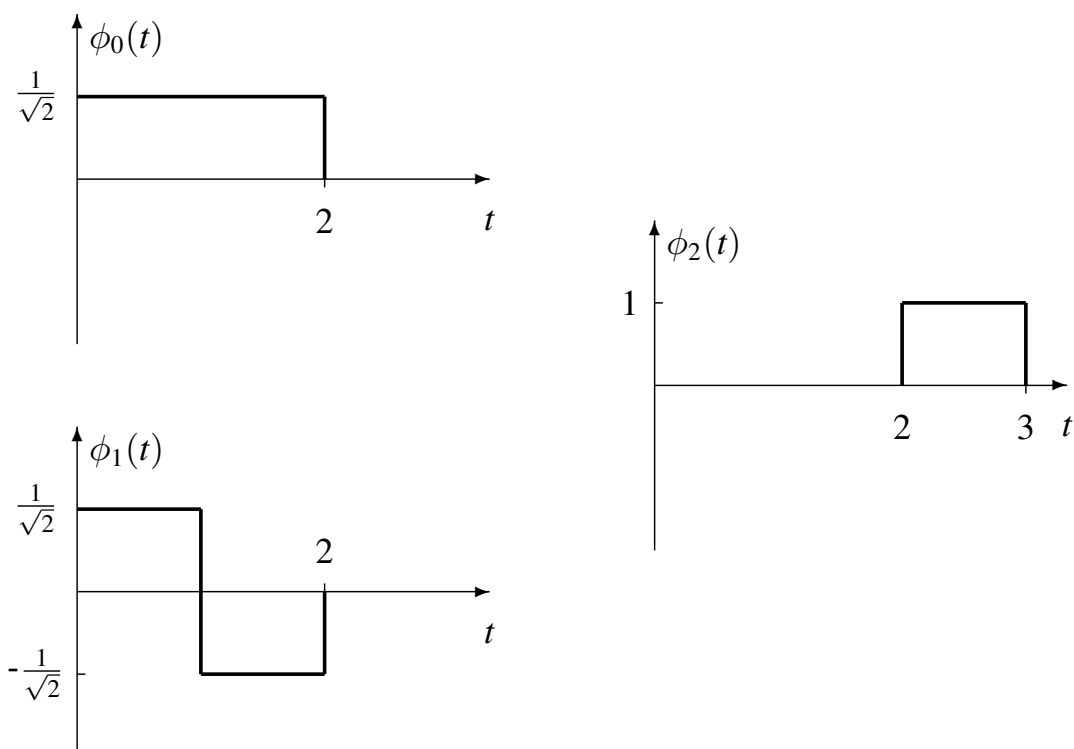
- ▶ Normalización

$$\phi_k(t) = \frac{d_k(t)}{\sqrt{\mathcal{E}_k}}, \quad \mathcal{E}_k = \mathcal{E}\{d_k(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |d_k(t)|^2 dt$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Señales



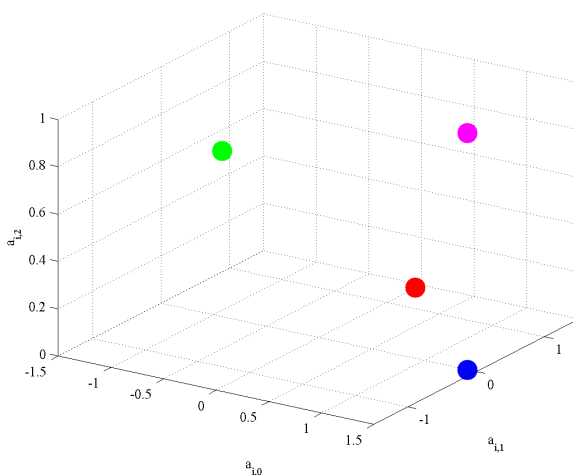
Ejemplo Gram-Schmidt - Base



Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas

- Representación vectorial de las señales

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram-Schmidt - Base alternativa

- Base

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

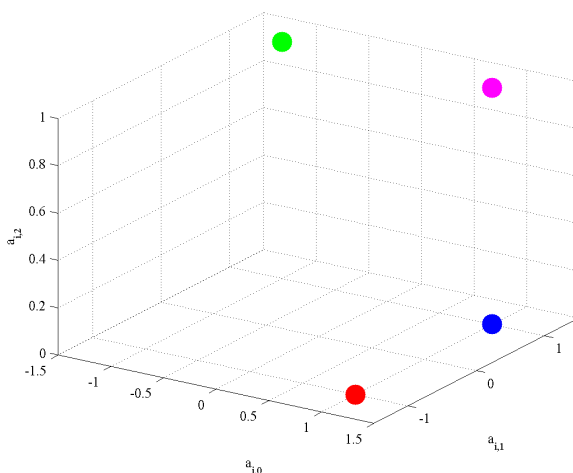
- Coordenadas en la base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo Gram-Schmidt - Coordenadas (base alternativa)

- Representación vectorial de las señales

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo Gram Schmidt - Energías y distancias

- Energía de una señal y distancias entre señales se calculan de forma eficiente a partir de las representaciones vectoriales de las señales
 - ▶ Energía de una señal

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E} \{s_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2$$

- ▶ Distancia entre dos señales

$$\begin{aligned} d(s_i(t), s_k(t)) &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_k(t)|^2 dt} \\ &= \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2} \end{aligned}$$

Ejemplo Gram Schmidt - Energías y distancias (II)

- Coordenadas en la primera base

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas en la segunda base

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

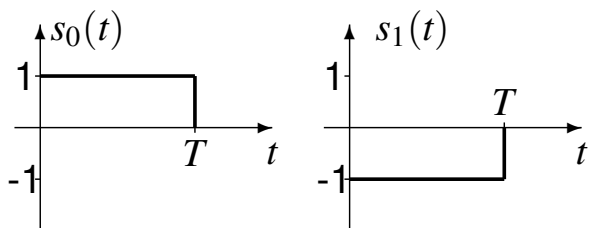
- Energías y distancias (independientemente de la base elegida)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= 2, \quad \mathcal{E}_1 = 2, \quad \mathcal{E}_2 = 3, \quad \mathcal{E}_3 = 3 \\ d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) &= 2, \quad d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_2) = \sqrt{5}, \quad d(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_3) = 1 \\ d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) &= \sqrt{9}, \quad d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) = \sqrt{5}, \quad d(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = 2 \end{aligned}$$

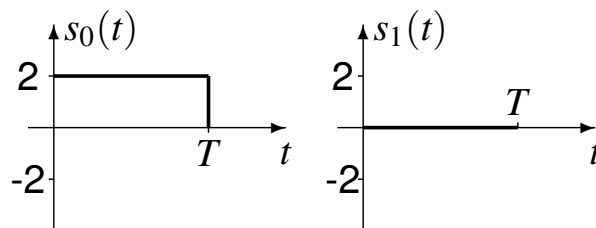
Ejemplo Gram Schmidt - Conclusiones

- La base ortonormal que permite representar las M señales no es única
 - ▶ Es válido cualquier conjunto de N señales ortonormales que permitan representar cada una de las M señales de forma exacta
- La energía de cada una de las señales y la distancia entre las mismas será la misma para cualquier base ortonormal
 - ▶ La elección de una base u otra sólo supondrá una rotación del sistema de referencia

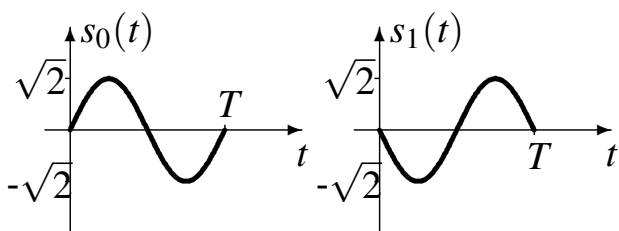
Ejemplo para $M = 2$ - Candidatos para $s_0(t)$, $s_1(t)$



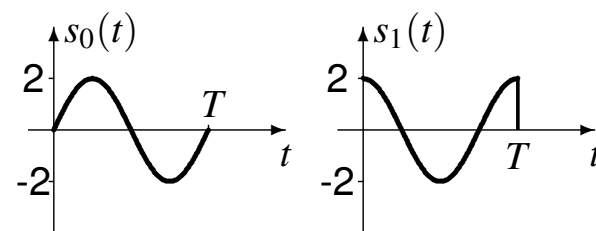
Conjunto 1



Conjunto 2



Conjunto 3



Conjunto 4

Distancias entre las señales

$$d(s_i(t), s_j(t)) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t) - s_j(t)|^2 dt}$$

- Primer conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |1 - (-1)|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

- Segundo conjunto

$$d(s_0(t), s_1(t)) = \sqrt{\int_0^T |2 - 0|^2 dt} = 2\sqrt{T}$$

Distancias entre las señales

- Tercer conjunto

$$\begin{aligned} d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| \sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(-\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 8 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt} = \sqrt{4 \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T} = 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

- Cuarto conjunto

$$\begin{aligned} d(s_0(t), s_1(t)) &= \sqrt{\int_0^T \left| 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \left(2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) \right|^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_0^T 4 - 8 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt} = 2\sqrt{T} \end{aligned}$$

ya que

$$\int_0^T 8 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \left[\frac{2T}{\pi} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = 0$$

Energía media por símbolo

$$\begin{aligned} E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt\right] \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} P(s(t) = s_i(t)) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt \end{aligned}$$

- Conjunto 1

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |1|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |-1|^2 dt = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T = T$$

- Conjunto 2

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^T |2|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T |0|^2 dt = \frac{1}{2}4T + \frac{1}{2}0 = 2T$$



Energía media por símbolo

$$\int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2\pi} \left[\frac{\pi t}{T} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^T = \frac{T}{2}$$

- Conjunto 3

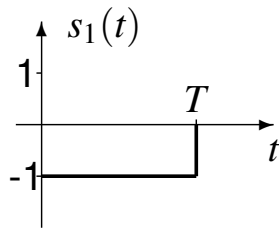
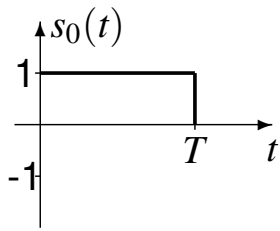
$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 \frac{T}{2} = T$$

- Conjunto 4

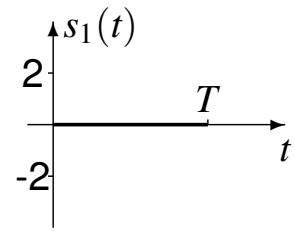
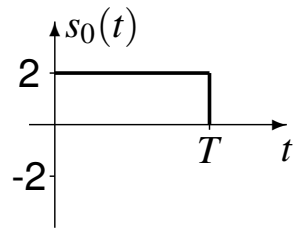
$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (2)^2 \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 \frac{T}{2} = 2T$$



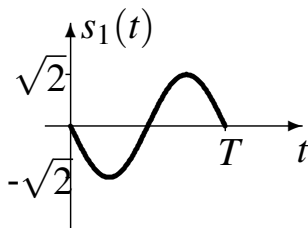
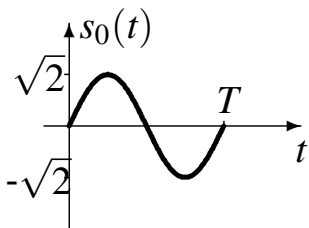
Ejemplo para $M = 2$ - Candidatos para $s_0(t)$, $s_1(t)$



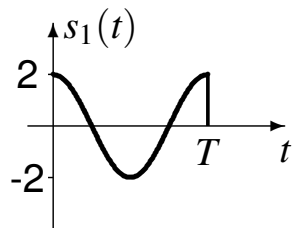
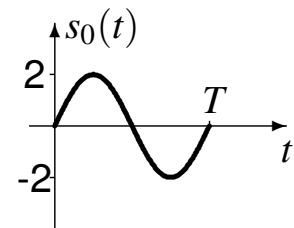
Conjunto 1



Conjunto 2



Conjunto 3



Conjunto 4

Base y constelación

- Se define una base para las M señales
- Se obtiene la representación vectorial de cada señal

$$s_i(t) \leftrightarrow \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix}$$

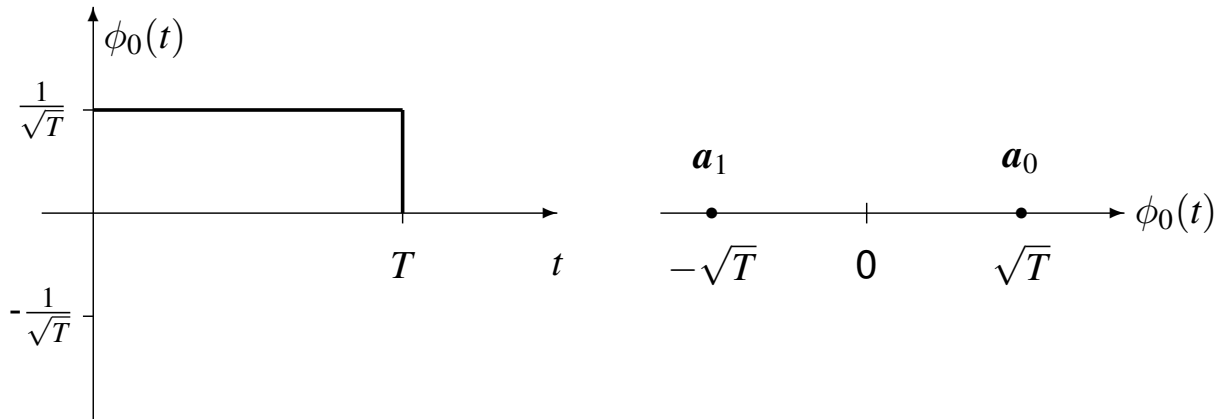
- Relación de la señal con la representación discreta

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- Facilita la medida de energía y distancias

$$\mathcal{E}\{s_i(t)\} = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2, \quad d(s_i(t), s_k(t)) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

Base y constelación - Conjunto 1

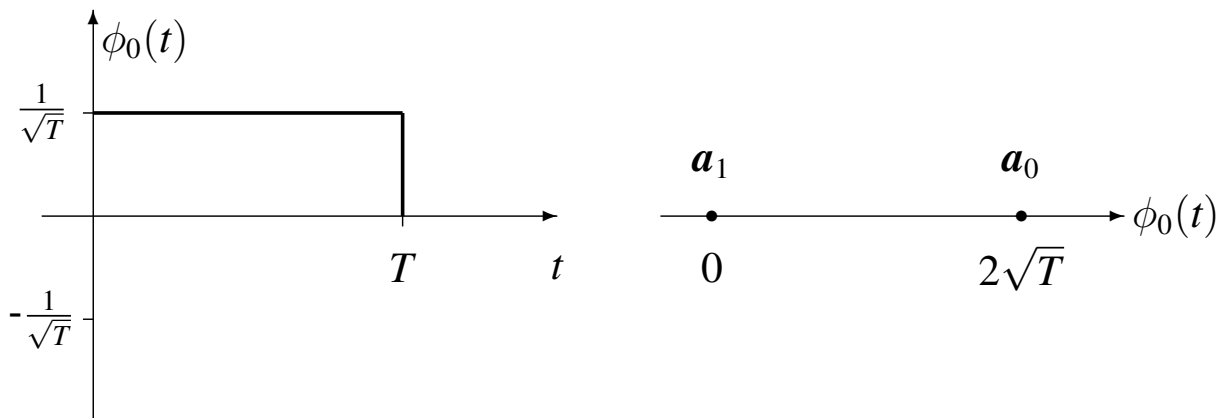


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = -\sqrt{T}$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 2

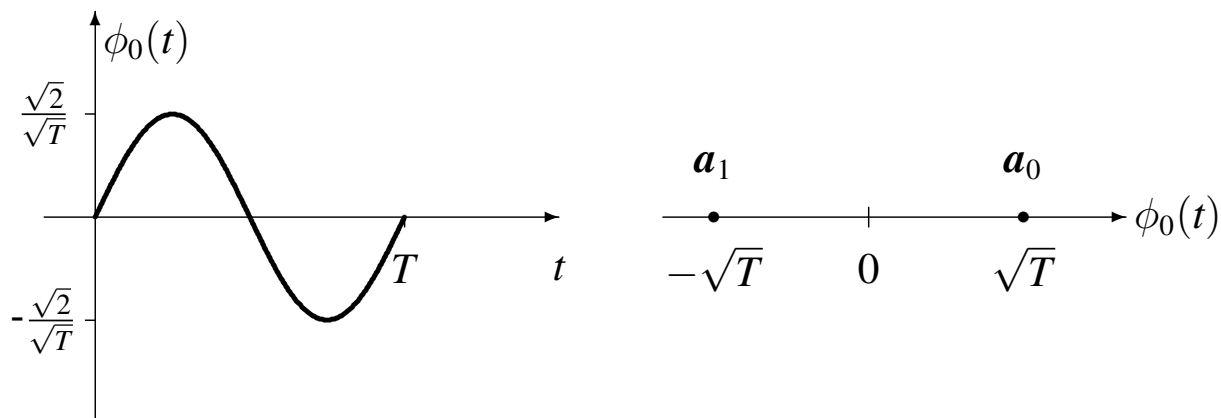


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +2\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = 0$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 3

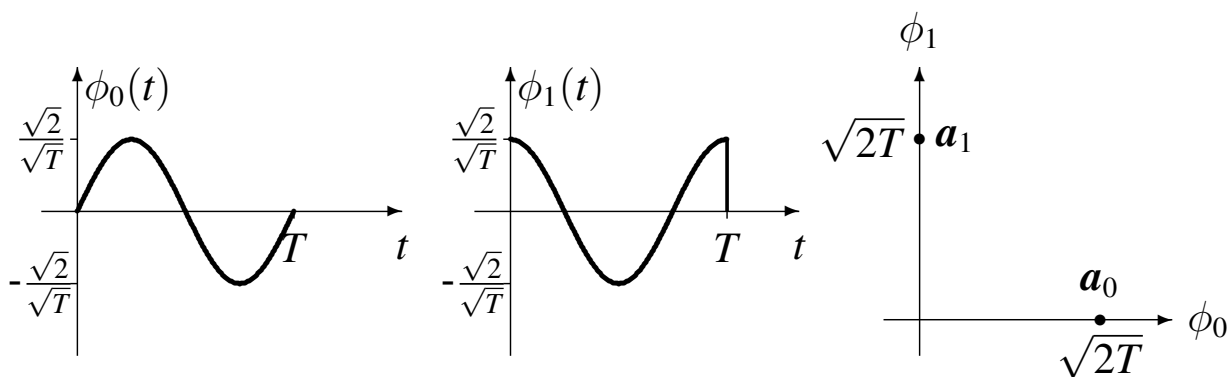


$$\mathbf{a}_0 = [a_{0,0}] = +\sqrt{T}, \quad \mathbf{a}_1 = [a_{1,0}] = -\sqrt{T}$$

$$s_0(t) = \mathbf{a}_0 \cdot \phi_0(t)$$

$$s_1(t) = \mathbf{a}_1 \cdot \phi_0(t)$$

Base y constelación - Conjunto 4



$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} a_{0,0} \\ a_{0,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$$

$$s_0(t) = a_{0,0} \cdot \phi_0(t) + a_{0,1} \cdot \phi_1(t)$$

$$s_1(t) = a_{1,0} \cdot \phi_0(t) + a_{1,1} \cdot \phi_1(t)$$

Distancias entre las señales - Constelación

$$d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j} - a_{k,j}|^2}$$

- Primer conjunto: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Segundo conjunto: $\mathbf{a}_0 = 2\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = 0$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+2\sqrt{T}) - (0)|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Tercer conjunto: $\mathbf{a}_0 = +\sqrt{T}$, $\mathbf{a}_1 = -\sqrt{T}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(+\sqrt{T}) - (-\sqrt{T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

- Cuarto conjunto: $\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2T} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2T} \end{bmatrix}$

$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{|(\sqrt{2T}) - (0)|^2 + |(0) - (\sqrt{2T})|^2} = 2\sqrt{T}$$

Energía media por símbolo - Constelación

$$\begin{aligned} E_s &= E[\mathcal{E}\{s(t)\}] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\} \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \sum_{j=0}^{N-1} |a_{i,j}|^2 \end{aligned}$$

- Conjunto 1 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (+\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{T})^2 = \frac{1}{2} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot T = T$$

- Conjunto 2 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot (+2\sqrt{T})^2 + \frac{1}{2} \cdot (0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4T + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2T$$

Energía media por símbolo - Constelación (II)

- Conjunto 3 (símbolos equiprobables)

$$E_s = \frac{1}{2} \cdot \left(+\sqrt{T}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{T}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot T = T$$

- Conjunto 4 (símbolos equiprobables)

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{2T}\right)^2 + (0)^2 \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[(0)^2 + \left(\sqrt{2T}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2T + \frac{1}{2} \cdot 2T = 2T \end{aligned}$$

- Mínima energía para unas distancias entre símbolos dadas

- ▶ En este caso Conjunto 1 y Conjunto 3 requieren menos energía para la misma distancia

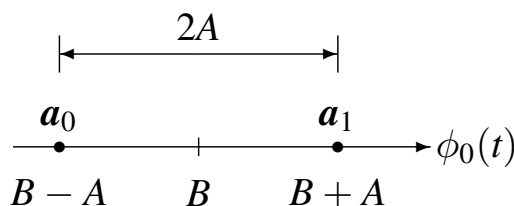
- ★ Para unas distancias entre símbolos dadas, se minimiza la energía si la media de la constelación es nula

$$E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} E[a_{i,0}] \\ E[a_{i,1}] \\ \vdots \\ E[a_{i,N-1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Mínima E_s para unas distancias entre símbolos - Media nula

- Ejemplo en espacio 1D: símbolos $\mathbf{a}_0 = B - A$, $\mathbf{a}_1 = B + A$

- ▶ Media B
- ▶ Distancia entre símbolos $2A$



- Energía media por símbolo (símbolos equiprobables)

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{a}_0\} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}\{\mathbf{a}_1\} = \frac{1}{2} \cdot (B - A)^2 + \frac{1}{2} \cdot (B + A)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (B^2 + A^2 - 2AB) + \frac{1}{2} \cdot (B^2 + A^2 + 2AB) = B^2 + A^2 \end{aligned}$$

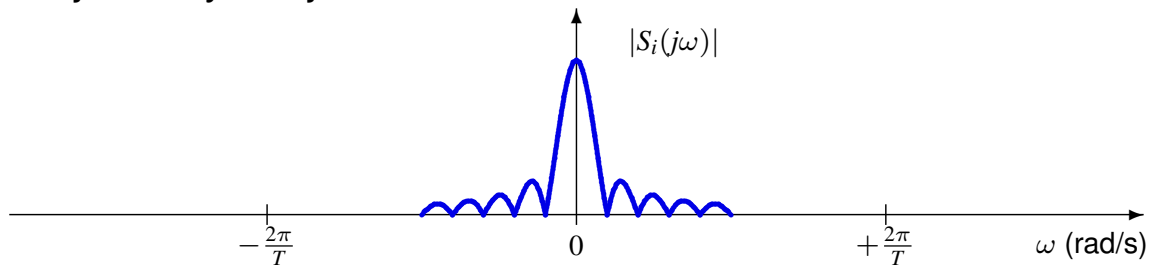
- ▶ Contribución media: B^2
- ▶ Contribución distancia: A^2

- Mínima energía por símbolo para una distancia $2A$

$$\text{Media nula } (B = 0) \rightarrow E_s = A^2$$

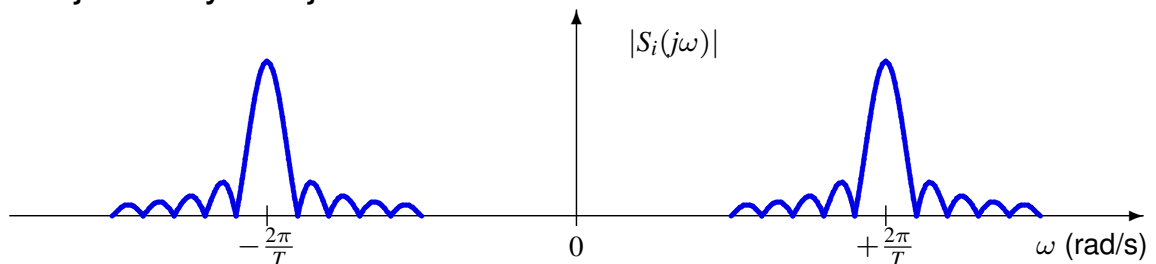
Respuesta en frecuencia de las señales

- Conjunto 1 y Conjunto 2



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias

- Conjunto 3 y Conjunto 4



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

Diseño del modulador digital - Selección de las M señales

- Restricciones a tener en cuenta

- ▶ Energía de las señales (E_s)
- ▶ Distancia (medida de parecido) entre señales: $d(s_i(t), s_j(t))$
- ▶ Adecuación a las características del canal: $s_i(t) * h(t) = s_i(t)$

- Representación discreta (vectorial) de las señales

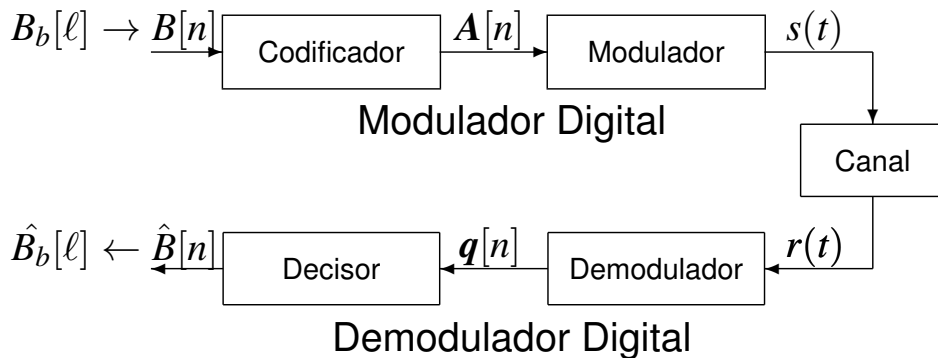
- ▶ Constelación de M puntos representando las señales
 - ★ M vectores a_i de dimensión N
 - ★ Permite evaluar energías y distancias (independientemente de la base)
- ▶ Base ortonormal de dimensión N
 - ★ N funciones ortonormales, $\phi_j(t)$
 - ★ Permite evaluar la adecuación a las características del canal (independientemente de la constelación)

$$\text{Si } \phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t), \forall j, \text{ entonces } s_i(t) * h(t) = s_i(t), \forall i$$

- ▶ Restricciones constelación – base

- ★ Dimensión del espacio de señales, N

Modelo de comunicación digital

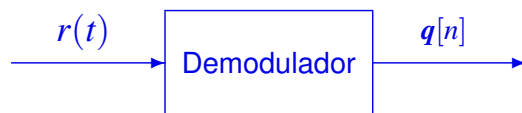


- División del modulador digital en dos módulos
 - ▶ Codificador
 - ▶ Modulador
- División del demodulador digital en dos módulos
 - ▶ Demodulador
 - ▶ Decisor
- Representaciones intermedias vectoriales: $A[n]$ y $q[n]$
 - ▶ Representación discreta de las señales en un espacio vectorial de dimensión N definido por una base $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ▶ Simplifican notablemente el diseño del transmisor y receptor

Descripción de cada módulo

- Codificador
 - ▶ Define la representación vectorial de la señal asociada a cada símbolo (constelación)
 - ★ Intervalo de índice n : vector $A[n]$ representando $s(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$
 - ▶ Criterios de diseño (para seleccionar la constelación)
 - ★ Energía
 - ★ Distancia (“*parecido*”) entre señales (prestaciones)
- Modulador
 - ▶ Define la base ortonormal del espacio de señales
 - ▶ Criterios de diseño (para seleccionar las N funciones $\phi_j(t)$)
 - ★ Adecuación a las características del canal
- Demodulador
 - ▶ Convierte la señal recibida, por intervalos de símbolo, en vectores en el espacio de señales definido por la base $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ★ Intervalo de índice n : vector $q[n]$ representando $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$
- Decisor
 - ▶ Compara el “*parecido*” entre la señal recibida y las M posibles señales $\{s_0(t), s_1(t), \dots, s_{M-1}(t)\}$ para decidir símbolos
 - ★ Medida de distancia sobre las representaciones vectoriales
 - ★ Compara las distancias de:
 - Vector de la señal recibida en el intervalo de símbolo: $q[n]$
 - Vectores de los M posibles símbolos: a_i para $i \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

Demodulador



- Obtiene la representación en tiempo discreto de la señal recibida $r(t)$
 - ▶ Proyección en el espacio de señales N -D del modulador

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \\ \vdots \\ q_{N-1}[n] \end{bmatrix} \equiv r(t) \text{ en base ortonormal } \{\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{N-1}(t)\}$$

- ▶ Proceso de la señal a tramos: por intervalos de símbolo
 - ★ En $\mathbf{q}[n]$ se tiene la representación discreta de $r(t)$ en el intervalo de símbolo asociado a $A[n]$, i.e., $nT \leq t < (n+1)T$
- Cálculo de la proyección
 - ▶ Proyección en una base ortonormal: producto escalar
 - ★ Proceso del primer intervalo de símbolo:

$$\mathbf{q}[0] \equiv \mathbf{q} = [q_0, q_1, \dots, q_{N-1}]^T$$

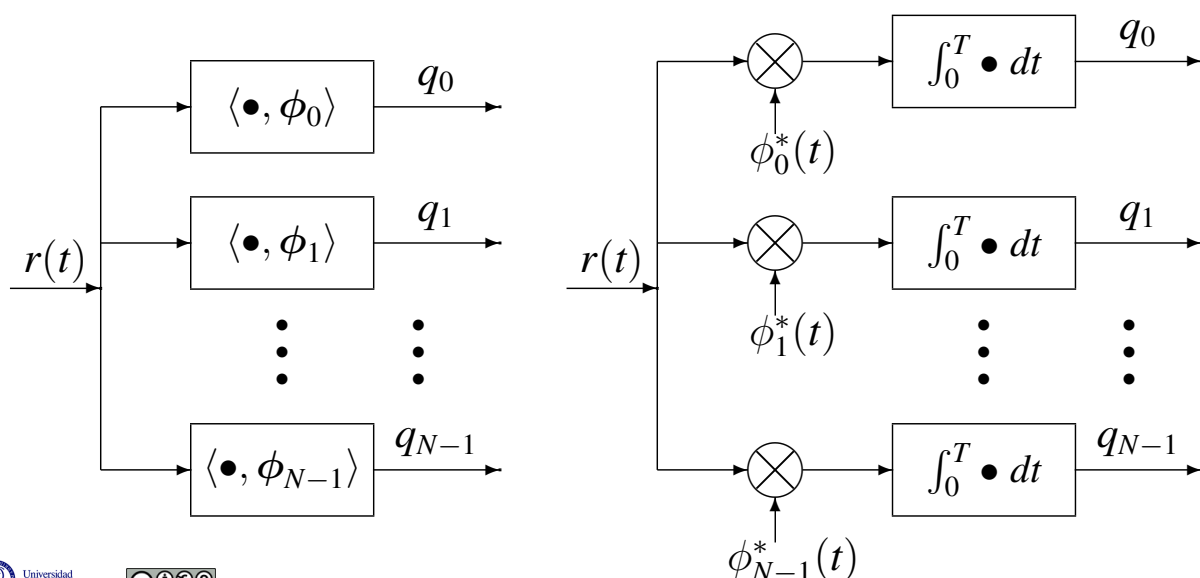
$$\text{Intervalo: } 0 \leq t < T$$

$$q_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt = \int_0^T r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt$$

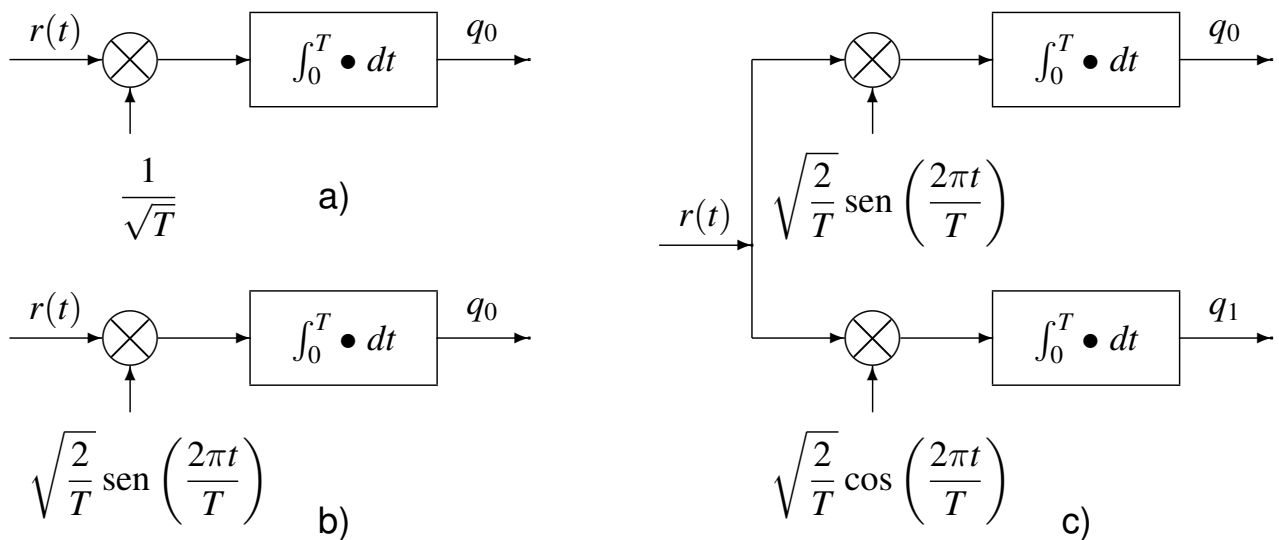
Demodulador por correlación

- Implementación directa del producto escalar
 - ▶ Banco de N correladores con $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo

$$q_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle = \int_0^T r(t) \cdot \phi_j^*(t) dt$$



Ejemplos de implementación - Conjuntos de señales anteriores candidatos a implementar el modulador



- a) Conjuntos 1 y 2
- b) Conjunto 3
- c) Conjunto 4

Demodulador mediante filtros adaptados

- Filtrado de la señal con un banco de N filtros
 - ▶ Respuesta de los filtros: $h_k(t)$, con $k = 0, 1, \dots, N - 1$
 - ▶ Salida del filtro de índice k

$$y_k(t) = r(t) * h_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot h_k(t - \tau) d\tau$$

- Filtros adaptados a los elementos de la base ortonormal
 - ▶ Respuesta del filtro adaptado

$$h_k(t) = \phi_k^*(-t)$$

- ▶ Señal de salida del filtro

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot \phi_k^*(-(t - \tau)) d\tau$$

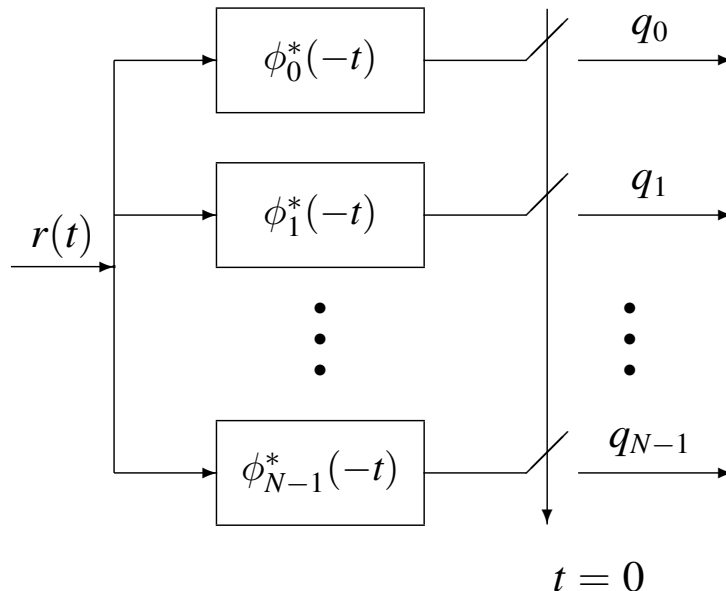
- ▶ Valor de la señal $y_k(t)$ en el instante $t = 0$

$$y_k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \cdot \phi_k^*(\tau) d\tau \equiv \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = q_k$$

★ Coordenada de índice k de la salida del demodulador

Demodulador mediante filtros adaptados (II)

- Banco de N filtros adaptados
 - ▶ Filtros adaptados a los N elementos de la base ortonormal
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo
 - ★ Muestreo en $t = 0$ de la salida de los filtros



Demodulador con filtros adaptados causales

- Soporte para la respuesta de los elementos de la base
 - ▶ Funciones $\phi_k(t)$ definidas en $0 \leq t < T$
 - ▶ Soporte de los filtros adaptados $h_k(t) = \phi_k^*(-t)$
 - ★ Funciones $\phi_k^*(-t)$ definidas en $-T < t \leq 0$
 - ★ Respuestas al impulso NO causales (anticausales)
 - ★ Implementación real NO es posible
- Implementación real de los filtros adaptados
 - ▶ Conversión en respuesta causal: retardo de T segundos

$$h_k^T(t) = h_k(t - T) = \phi_k^*(-(t - T)) = \phi_k^*(T - t)$$

- ▶ Producto escalar (para obtener coordenada q_k)
 - ★ Usando $h_k^T(t)$ se retarda T segundos la señal de salida

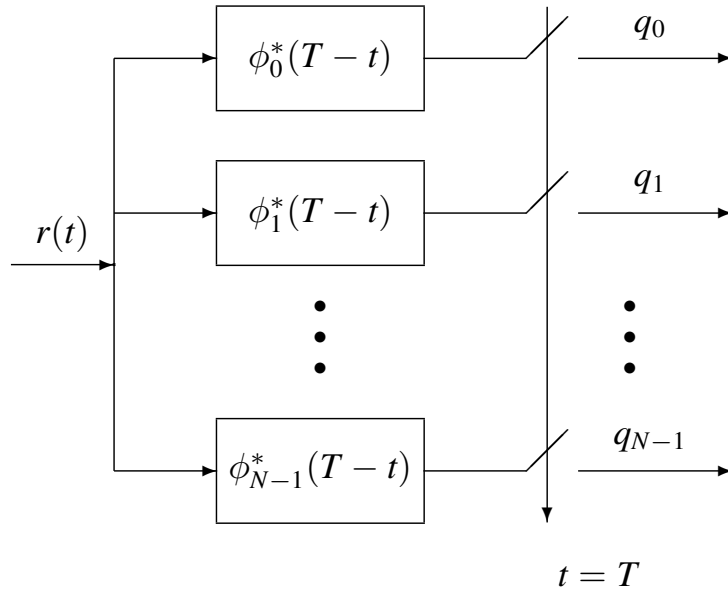
$$y_k^T(t) = r(t) * h_k^T(t) = y_k(t - T)$$

- ★ Hay que retardar el instante de muestreo T segundos

$$q_k = \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = y_k(0) = y_k^T(T)$$

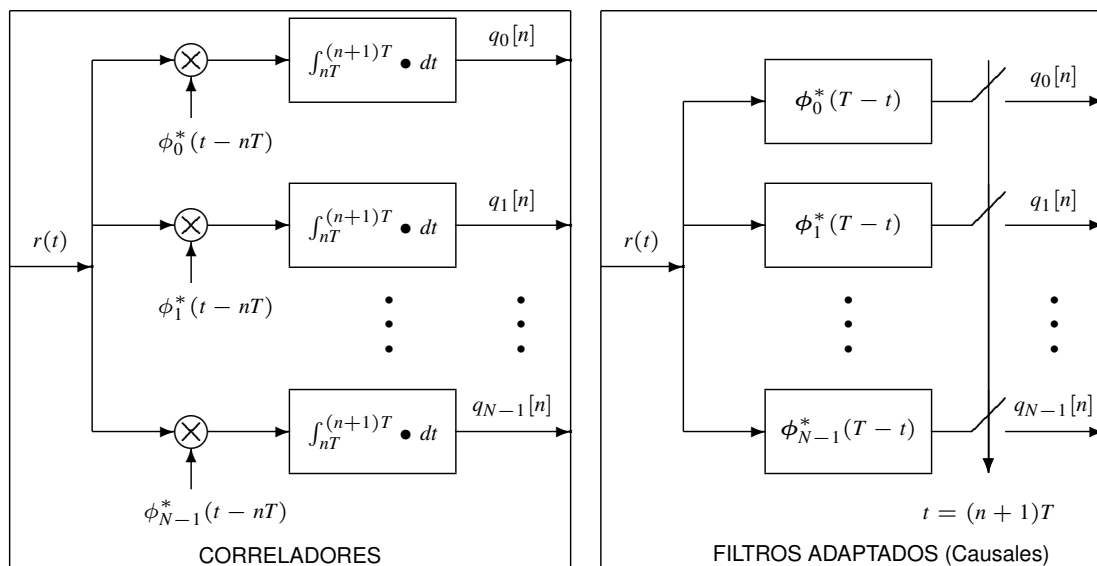
Demodulador mediante filtros adaptados causales (II)

- Banco de N filtros adaptados causales
 - ▶ Retardo de T segundos en la respuesta de los filtros
 - ▶ Proceso del primer intervalo de símbolo
 - ★ Retardo de T seg. en el instante de muestreo: $t = T$



Demodulador con flujo indefinido de símbolos

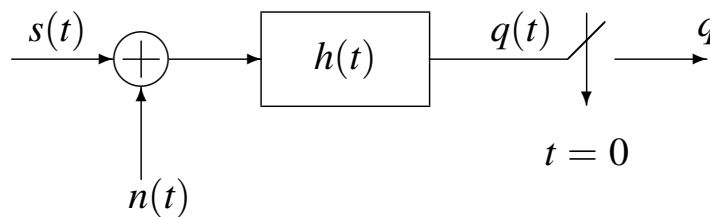
- Se ha analizado el proceso de la primera observación $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}[0]$
- Obtención de $\mathbf{q}[n]$: proceso de $r(t)$ en $nT \leq t < (n+1)T$



NOTA: se ha representado el caso general para una posible base $\{\phi_k(t)\}$ compleja, aunque en este capítulo sólo se considera el caso real

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N

- Filtrado de una señal $s(t)$ más ruido $n(t)$ con filtro $h(t)$



- ▶ S : Energía en q debida a la señal $s(t)$
 - ★ $s(t)$ es una señal real determinista
- ▶ N : Energía en q debida al ruido $n(t)$
 - ★ Modelo de ruido: proceso aleatorio estacionario, blanco y gaussiano, con estadísticos

$$S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}, R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

- ▶ Cálculo de la relación señal a ruido (S/N)

$$\frac{S}{N} \equiv \frac{\text{Energía en } q \text{ debida a } s(t)}{\text{Energía en } q \text{ debida a } n(t)}$$

- ★ Búsqueda del filtro real $h(t)$ que maximiza la relación S/N

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (II)

- Salida del filtro

$$\begin{aligned} q(t) &= (s(t) + n(t)) * h(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

- Valor en el instante $t = 0$

$$q = q(0) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau}_{\text{término de señal} \equiv s} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau}_{\text{término de ruido} \equiv z} = s + z$$

- Relación señal a ruido en q

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E[|s|^2]}{E[|z|^2]}$$

- ▶ Cálculo de $E[|s|^2]$
 - ★ Procesado de $s(t)$, señal determinista

$$E[|s|^2] = |s|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau \right|^2 \quad (\text{valor determinista})$$

- ▶ Cálculo de $E[|z|^2]$
 - ★ Procesado de $n(t)$, señal aleatoria
 - Cálculo del valor esperado de $|z|^2$ teniendo en cuenta los estadísticos de la señal de ruido $n(t)$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (III)

- Estadísticos de $n(t)$

Densidad espectral de potencia $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$; Autocorrelación $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

- Cálculo de $E[|z|^2]$

$$\begin{aligned} E[|z|^2] &= E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} n(\theta) \cdot h(-\theta) d\theta\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E[n(\tau) \cdot n(\theta)]}_{R_n(\tau-\theta)} \cdot h(-\tau) \cdot h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{N_0}{2} \delta(\tau - \theta)}_{R_n(\tau-\theta)} \cdot h(-\tau) \cdot h(-\theta) d\tau d\theta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = \frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\} \end{aligned}$$

NOTA: se ha aplicado la propiedad de la integral de una delta multiplicando a una función

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

- Relación señal a ruido

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{|s|^2}{E[z^2]} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}}$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz para $s(t)$ y $h(-t)$ reales

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)|^2 d\tau\right)$$

- ▶ La igualdad (valor máximo) se obtiene para $h(-t) = \alpha \times s(t)$, $\alpha \in \mathbf{R}$

- Relación señal a ruido máxima:

$$\begin{aligned} \max_{h(t)} \left(\frac{S}{N}\right)_q &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(-\tau) d\tau\right)^2}{\frac{N_0}{2} \cdot \mathcal{E}\{h(t)\}} \Bigg|_{h(-t)=\alpha \cdot s(t)} \\ &= \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right) \cdot \left(\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |s(\tau)|^2 d\tau\right)}{\frac{N_0}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \mathcal{E}\{s(t)\}} = \frac{\mathcal{E}\{s(t)\}}{\frac{N_0}{2}} \end{aligned}$$

Propiedad del filtro adaptado - Máxima relación S/N (IV)

De este resultado se obtienen dos conclusiones:

- 1 Para señales reales, la relación señal a ruido a la salida se hace máxima cuando $h(t) = \alpha \cdot s(-t)$ para cualquier valor de α (exceptuando $\alpha = 0$) y, particularmente, para el filtro adaptado

$$h(t) = s(-t)$$

Para señales complejas se llega a la misma conclusión pero con el filtro adaptado complejo

$$h(t) = s^*(-t)$$

- 2 La relación señal a ruido a la salida del filtro adaptado no depende de la forma específica de $s(t)$, sino únicamente de su energía y de la densidad espectral de potencia de ruido a la entrada del filtro

Demodulador - Modelo estadístico de q para $A = a_i$

- Modelo de la salida del demodulador q asumiendo:
 - ▶ Elección óptima del modulador para el canal

$$\text{Base ortonormal : } \langle \phi_j(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T \phi_j(t) \cdot \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j \\ 1, & \text{si } k = j \end{cases} \equiv \delta[j - k]$$

- ★ Adecuación al canal \rightarrow canal gaussiano:

$$\phi_j(t) * h(t) = \phi_j(t) \rightarrow r(t) = s(t) + n(t)$$

- ▶ Símbolo transmitido es $A = \mathbf{a}_i = [a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,N-1}]^T$
 - ★ Señal generada en el primer intervalo de símbolo $0 \leq t < T$:

$$s(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t)$$

- Coordenada de índice k de q

$$\begin{aligned} q_k &= \langle r(t), \phi_k(t) \rangle = \int_0^T r(t) \cdot \phi_k^*(t) dt = \int_0^T (s(t) + n(t)) \cdot \phi_k^*(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \phi_j(t) \right) \phi_k^*(t) dt + \underbrace{\int_0^T n(t) \cdot \phi_k^*(t) dt}_{z_k} \end{aligned}$$

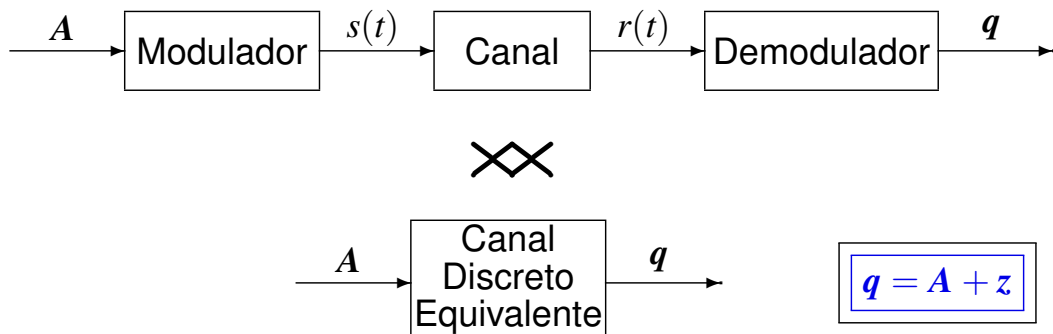
$$= \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \int_0^T \phi_j(t) \cdot \phi_k^*(t) dt + z_k = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \cdot \delta[j - k] + z_k = a_{i,k} + z_k$$

Canal discreto equivalente

- Modelo completo de la observación q dado que $A = a_i$

$$q = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = a_i + z$$

- Canal discreto equivalente



Canal discreto equivalente - Modelo estadístico para z

- Modelo para $n(t)$ es un proceso aleatorio gaussiano
 - Coordenadas $\{z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\}$ son variables aleatorias conjuntamente gaussianas
 - Caracterización - función densidad de probabilidad conjunta gaussiana
 - Parámetros: Vector de medias / Matriz de covarianzas
- Media de cada coordenada

$$E[z_k] = E \left[\int_0^T n(t) \cdot \phi_k^*(t) dt \right] = \int_0^T \underbrace{E[n(t)]}_{m_n(t)=0} \cdot \phi_k^*(t) dt = 0$$

- Covarianza entre dos coordenadas

$$\begin{aligned} \text{Cov}(z_j, z_k) &= E[z_j \cdot z_k^*] = E \left[\left(\int_0^T n(t) \cdot \phi_j^*(t) dt \right) \left(\int_0^T n^*(\tau) \cdot \phi_k(\tau) d\tau \right) \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \underbrace{E[n(t) \cdot n^*(\tau)]}_{R_n(t-\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t-\tau)} \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t-\tau) \cdot \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \phi_j^*(t) \cdot \phi_k(t) dt = \frac{N_0}{2} \cdot \delta[j-k] \end{aligned}$$

Distribuciones marginales y conjuntas para z

- Distribución marginal

$$f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}}$$

- ▶ Gaussiana de media nula y varianza $\frac{N_0}{2}$

$$f_{z_k}(z_k) = \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Distribución conjunta (para $\mathbf{z} = [z_0, z_1, \dots, z_{N-1}]^T$)

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \prod_{k=0}^{N-1} f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{N_0}} = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{z}\|^2}{N_0}}$$

- ▶ Gaussiana N -dimensional de media nula y varianzas $\frac{N_0}{2}$

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \mathcal{N}^N\left(\mathbf{0}, \frac{N_0}{2}\right)$$

Distribuciones condicionales para q dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

- Canal discreto equivalente

$$\mathbf{q} = \mathbf{A} + \mathbf{z}$$

- Distribución para cada coordenada dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

$$q_k = a_{i,k} + z_k, \text{ con } f_{z_k}(z_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{z_k^2}{N_0}}$$

$$f_{q_k|\mathbf{A}}(q_k|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}\left(a_{i,k}, \frac{N_0}{2}\right)$$

- ▶ Gaussiana de media $a_{i,k}$ y varianza $\frac{N_0}{2}$

- Distribución de la observación conjunta dado $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}|\mathbf{A}}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) &= \prod_{k=0}^{N-1} f_{q_k|\mathbf{A}_k}(q_k|a_{i,k}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(q_k - a_{i,k})^2}{N_0}} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} \equiv \mathcal{N}^N\left(\mathbf{a}_i, \frac{N_0}{2}\right) \end{aligned}$$

- ▶ Gaussiana N -dimensional de media \mathbf{a}_i y varianzas $\frac{N_0}{2}$

Decisor



- Estima la secuencia de símbolos transmitidos $B[n]$
 - ▶ Estima de esta secuencia símbolo a símbolo
 - ▶ En el instante discreto n :
 - ★ Se procesa la observación en n , i.e., $q[n]$
 - ★ Se estima el símbolo transmitido en n , i.e., $\hat{B}[n]$
- Objetivo de diseño
 - ▶ Minimizar la probabilidad de error de símbolo P_e

Decisión para $P_e = P(\hat{B}[n] \neq B[n])$ mínima

Diseño del decisor - Regiones de decisión

- Alfabeto de M posibles valores

$$B[n] \in \{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$$

- Forma de establecer la decisión para una observación $q[n]$
 - ▶ División del dominio de $q[n]$ en M regiones disjuntas
 - ★ Cada región I_k se asocia a un símbolo b_k
 - ★ Se decidirá $\hat{B}[n] = b_k$ cuando $q[n] \in I_k$
 - ★ Por eso se denominan regiones de decisión
- Establecimiento de las regiones de decisión
 - ▶ Hay que hacer la división del dominio de $q[n]$ para cumplir el criterio de diseño del decisor
 - ★ Minimización de la probabilidad de error de símbolo P_e

NOTA: Recuerde que hay una asociación unívoca $B[n] = b_i \leftrightarrow A[n] = a_i$

Desarrollo del decisor

- Desarrollo para el primer símbolo: $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}[0] \rightarrow \hat{B} \equiv \hat{B}[0]$
- Probabilidad de error para un caso concreto
 - ▶ Caso en que observando $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ se decide $\hat{B} = b_i$

$$\begin{aligned} P_e^{(\mathbf{q}=\mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B}=b_i)} &= P(B \neq b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) = 1 - P(B = b_i | \mathbf{q} = \mathbf{q}_0) \\ &= 1 - p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) \end{aligned}$$

- ▶ Probabilidad condicional $p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) \equiv$ Probabilidad *a posteriori*
- Probabilidad de error para un decisor "tonto" (constante)
 - ▶ Decisión es siempre $\hat{B} = b_i$, para cualquier valor de \mathbf{q}
 - ▶ Promedio de la probabilidad de error cuando se decide $\hat{B} = b_i$, para todos los posibles valores de \mathbf{q}

$$\begin{aligned} P_e^{(\hat{B}=b_i, \forall \mathbf{q})} &= E_{f_q(\mathbf{q}_0)} [P_e^{(\mathbf{q}=\mathbf{q}_0 \rightarrow \hat{B}=b_i)}] = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0)] \cdot f_q(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_q(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) \cdot f_q(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) \cdot f_q(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0 \end{aligned}$$

Desarrollo del decisor (II)

- Probabilidad de error usando REGIONES DE DECISIÓN
 - ▶ División del dominio de \mathbf{q} en M regiones disjuntas $\{I_k\}_{k=0}^{M-1}$
 - ▶ Se decide $\hat{B} = b_i$ si la observación \mathbf{q} cae en I_i
 - ▶ Probabilidad de error:

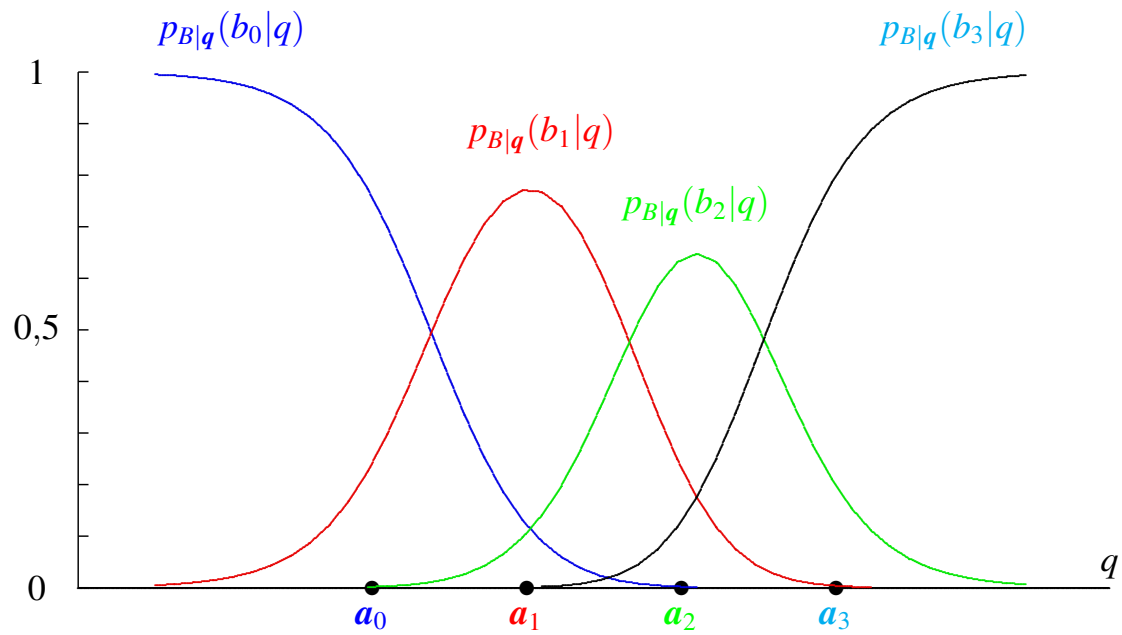
$$P_e = 1 - \sum_{i=0}^{M-1} \int_{I_i} p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) \cdot f_q(\mathbf{q}_0) d\mathbf{q}_0$$

- Minimización de la probabilidad de error
 - ▶ Se minimiza maximizando el segundo término (rojo)
 - ▶ $f_q(\mathbf{q}_0)$ es independiente del símbolo transmitido o decidido
 - ▶ Para cada valor de \mathbf{q}_0 sólo se puede variar la $p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0)$ que se suma eligiendo b_i entre uno de los M posibles valores de $\{b_k\}_{k=0}^{M-1}$
 - ★ Esto equivale a modificar la definición de $\{I_k\}_{k=0}^{M-1}$
- Diseño de las regiones de decisión - CRITERIO MAXIMO A POSTERIORI
 - ▶ Asignación de un valor del dominio de la observación $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ a la región de decisión que maximiza la probabilidad a posteriori

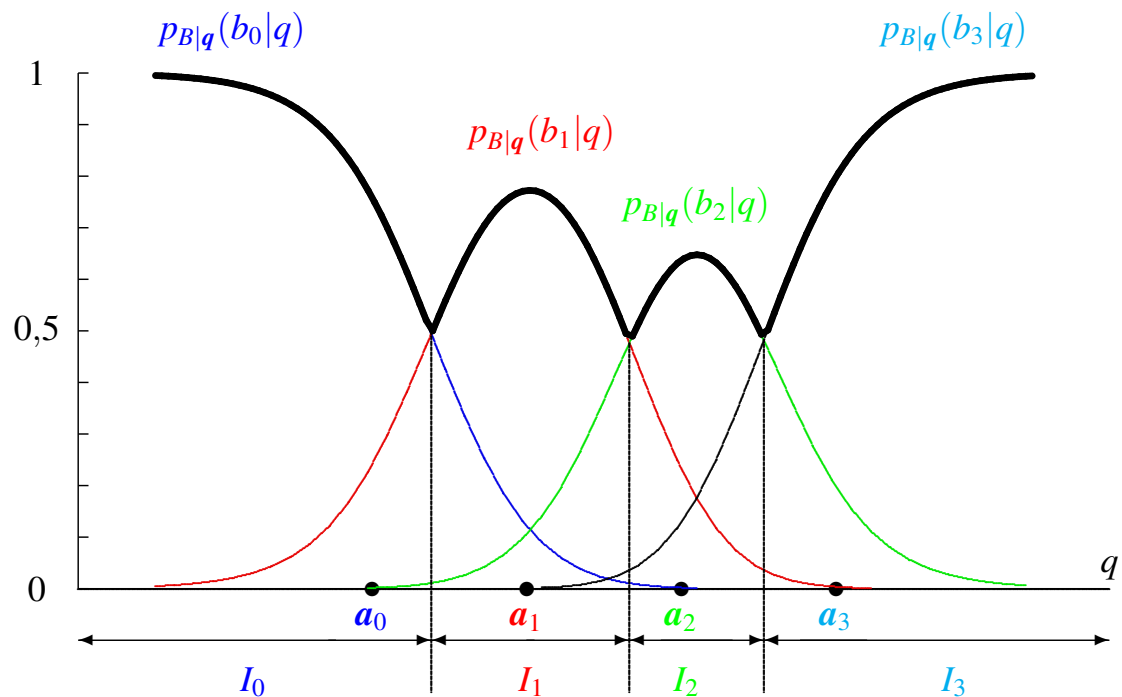
$$\mathbf{q}_0 \in I_i \text{ si } p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) > p_{B|q}(b_j | \mathbf{q}_0), \quad \forall j \neq i$$

- ▶ En el caso: $p_{B|q}(b_i | \mathbf{q}_0) = p_{B|q}(b_k | \mathbf{q}_0) > p_{B|q}(b_j | \mathbf{q}_0), \forall j \neq \{i, k\}$

Regiones de decisión para P_e mínima - Un ejemplo



Regiones de decisión para P_e mínima - Un ejemplo



Criterio Maximo A Posteriori (MAP) - Desarrollo

- Probabilidades a posteriori $p_{B|q}(b_i|q_0)$ - Regla de Bayes

$$p_{B|q}(b_j|q_0) = \frac{p_B(b_j) \cdot f_{q|B}(q_0|b_j)}{f_q(q_0)}$$

- ▶ Teniendo en cuenta que $B = b_j$ implica que $A = a_j$ y viceversa

$$f_{q|B}(q_0|b_j) \equiv f_{q|A}(q_0|a_j)$$

- Criterio MAXIMO A POSTERIORI (MAP): Se asigna q_0 a I_i si

$$\frac{p_B(b_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i)}{f_q(q_0)} > \frac{p_B(b_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j)}{f_q(q_0)} \quad j = 0, \dots, M-1, j \neq i$$

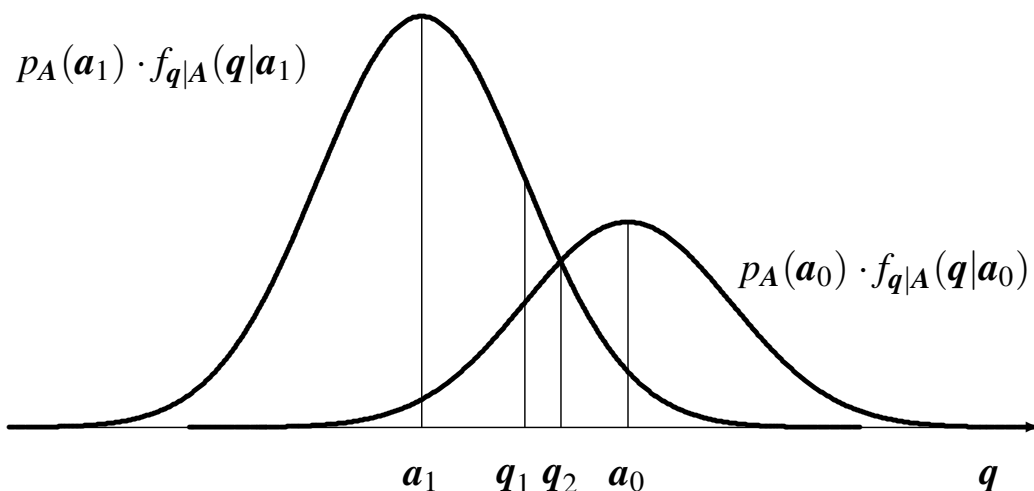
Como $f_q(q_0)$ es una cantidad no negativa

$$q_0 \in I_i \text{ si } \begin{cases} p_B(b_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i) > p_B(b_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j) \\ p_A(a_i) \cdot f_{q|A}(q_0|a_i) > p_A(a_j) \cdot f_{q|A}(q_0|a_j) \end{cases} \quad \forall j \neq i$$

Criterio MAP con $f_{q|A}(q_0|a_i)$ gaussianas

- Ejemplo:

- ▶ Caso binario ($M = 2$)
- ▶ $p_B(b_0) = p_A(a_0) = 1/3$ y $p_B(b_1) = p_A(a_1) = 2/3$



$$I_1 = (-\infty, q_2), \quad I_0 = [q_2, \infty)$$

$$p_B(b_0) < p_B(b_1) \text{ ó } p_A(a_0) < p_A(a_1) \Rightarrow d(q_2, a_0) < d(q_2, a_1)$$

Criterio de Máxima Verosimilitud

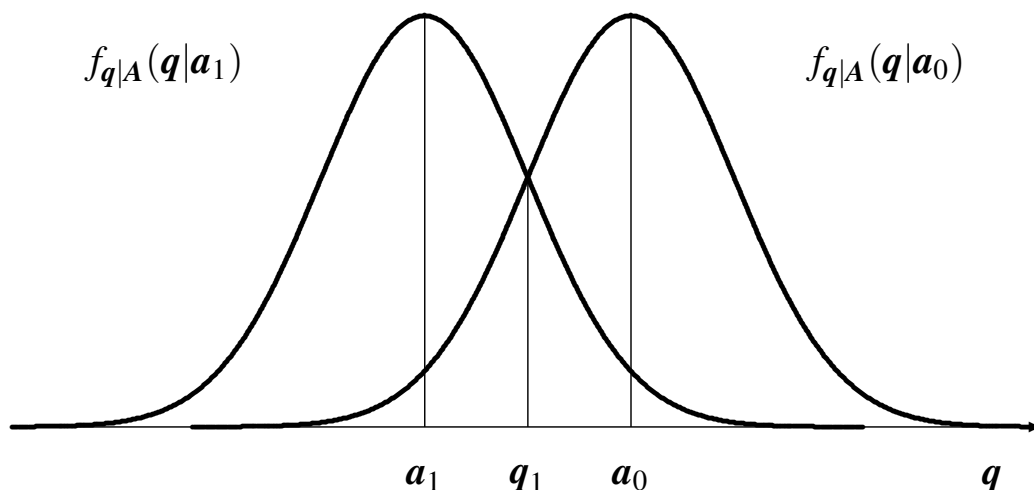
- Acrónimo ML (*Maximum Likelihood*)
- Se aplica cuando los símbolos son equiprobables

$$p_B(b_i) = p_A(a_i) = \frac{1}{M}, \quad \forall i$$

- En ese caso, q_0 se asigna a la región I_i si

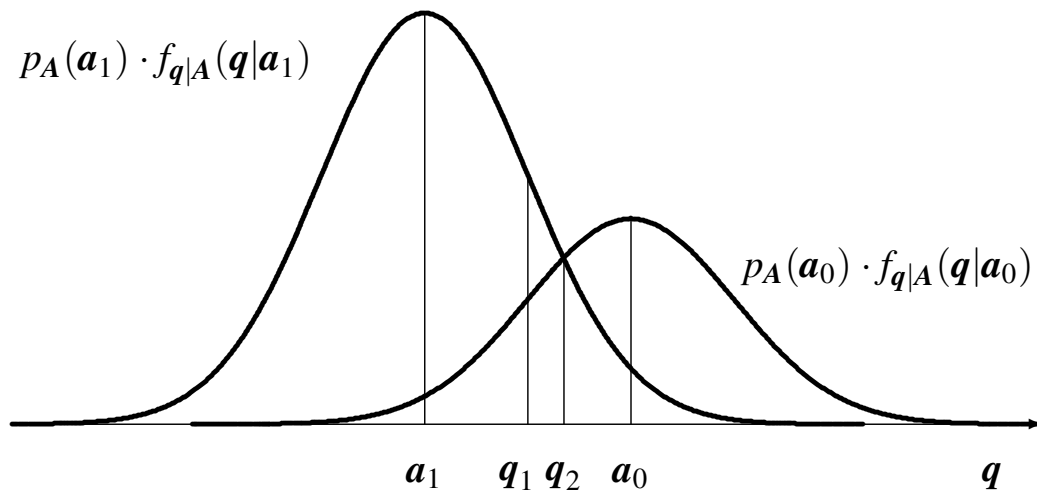
$$f_{q|A}(q_0|a_i) > f_{q|A}(q_0|a_j) \quad \forall j \neq i$$

Criterio ML (b_i equiprobables)



$$q_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}, \quad I_1 = (-\infty, q_1), \quad I_0 = [q_1, \infty)$$

Criterio MAP (b_i no equiprobables)



$$I_1 = (-\infty, q_2), \quad I_0 = [q_2, \infty)$$

$$p_B(b_0) < p_B(b_1) \text{ ó } p_A(\mathbf{a}_0) < p_A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow d(q_2, \mathbf{a}_0) < d(q_2, \mathbf{a}_1)$$

Si los símbolos no son equiprobables se tiende a hacer mayor la región de decisión de los símbolos más probables



Caso $f_{q|A}(q|a_i)$ gaussiana y $p_B(b_i) = 1/M$

- Criterio ML: q_0 pertenece a I_i si

$$\frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} > \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0}} \quad \forall j \neq i$$

$$e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0}} > e^{-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0}} \quad \forall j \neq i$$

La exponencial es una función monótona creciente $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

$$-\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2}{N_0} > -\frac{\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2}{N_0} \quad \forall j \neq i$$

Multiplicando por N_0 y quitando el signo negativo

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 < \|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

Aplicando la definición de la norma de un vector

$$\|\mathbf{q}_0 - \mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |q_{0,k} - a_{i,k}|^2 = |d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i)|^2$$

- Criterio de mínima distancia euclídea

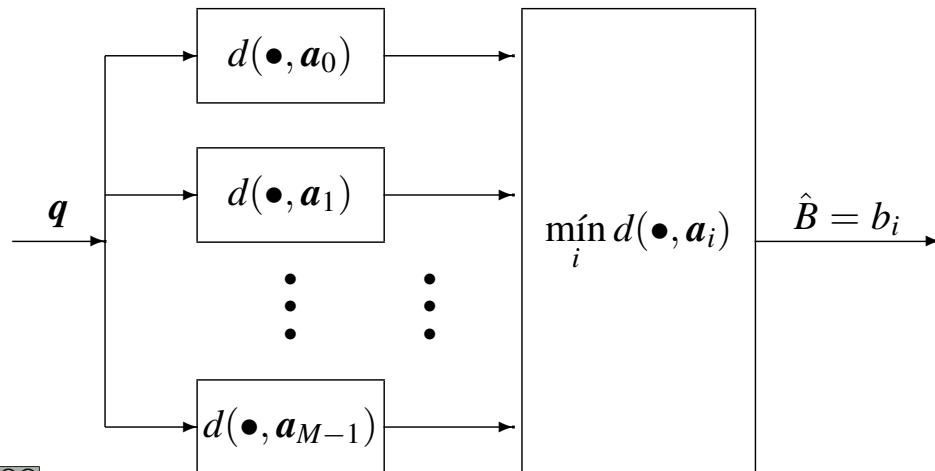
$$\mathbf{q} \in I_i \text{ si } d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_i) < d(\mathbf{q}_0, \mathbf{a}_j), \quad \forall j \neq i$$



Decisor de Mínima Distancia

- Símbolos equiprobables
- Distribución $f_{q|A}(q|a_i)$ gaussiana (ruido gaussiano)

NOTA: En realidad, también se cumplirá para cualquier distribución simétrica respecto del origen (función par) y decreciente en el caso 1-D, ya que en ese caso dos distribuciones con distinta media “se cortarán” en el punto medio entre ambas medias, o para funciones de base radial decrecientes en el caso N -D



Cálculo de la probabilidad de error

- Cuando se transmite el símbolo $B = b_i$ (o $A = a_i$)
 - ▶ Distribución de la observación $f_{q|A}(q|a_i)$
 - ▶ Probabilidad de error condicional

$$P_{e|B=b_i} = P_{e|A=a_i} \equiv P_{e|a_i}$$

Si se transmite el símbolo $B = B_i$

- ★ Se produce un error cuando se decide $\hat{B} = b_j \neq b_i$
- ★ Esto ocurre cuando al transmitir a_i la observación $q \notin I_i$

$$P_{e|a_i} = \int_{q \notin I_i} f_{q|A}(q|a_i) dq$$

- Probabilidad de error total
 - ▶ Se promedian las probabilidades de error condicionales

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot P_{e|a_i}$$

- ★ Para símbolos equiprobables

$$p_A(a_i) = \frac{1}{M} \rightarrow P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|a_i}$$

Ejemplo

- Caso unidimensional ($N = 1$) y binario ($M = 2$)

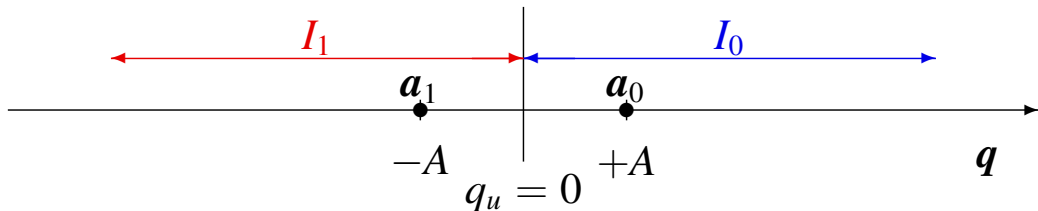
- ▶ Constelación

$$\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$$

- ▶ Símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_0) = p_A(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{2}$

- ▶ Regiones de decisión

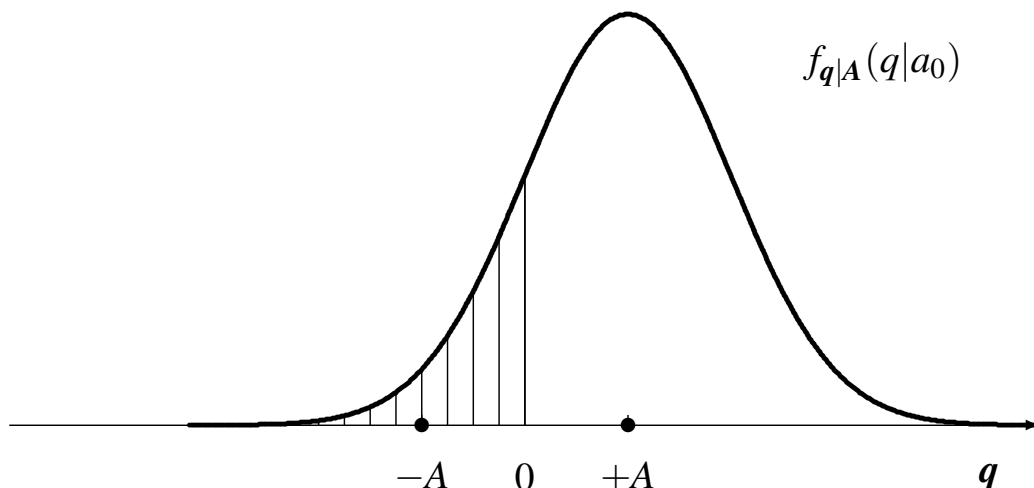
$$\text{Umbral } q_u = 0 \rightarrow I_0 = [0, \infty), I_1 = (-\infty, 0)$$



- Probabilidad de error

$$\begin{aligned} P_e &= p_A(\mathbf{a}_0) \cdot P_{e|a_0} + p_A(\mathbf{a}_1) \cdot P_{e|a_1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_{e|a_0} + \frac{1}{2} \cdot P_{e|a_1} \end{aligned}$$

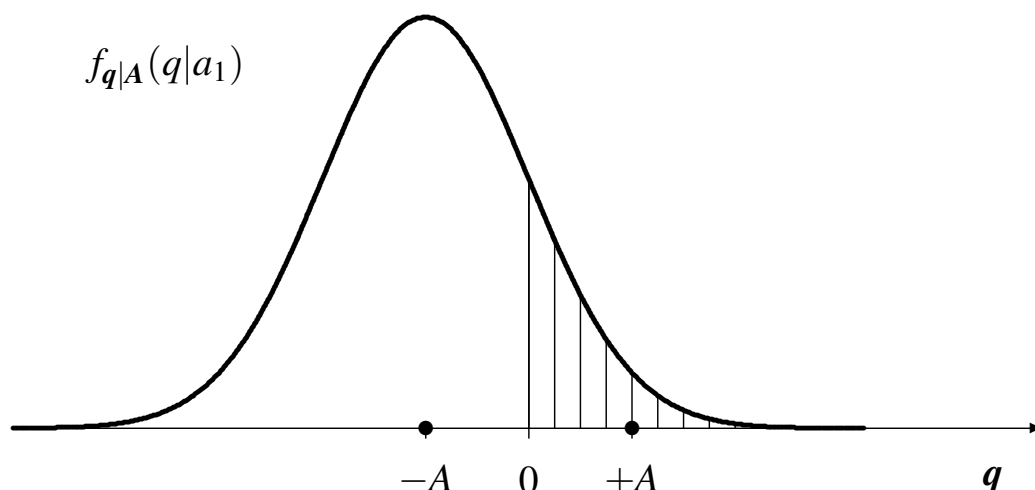
Probabilidad de error $B = b_0$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$ gaussiana de media $+A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error $B = b_1$

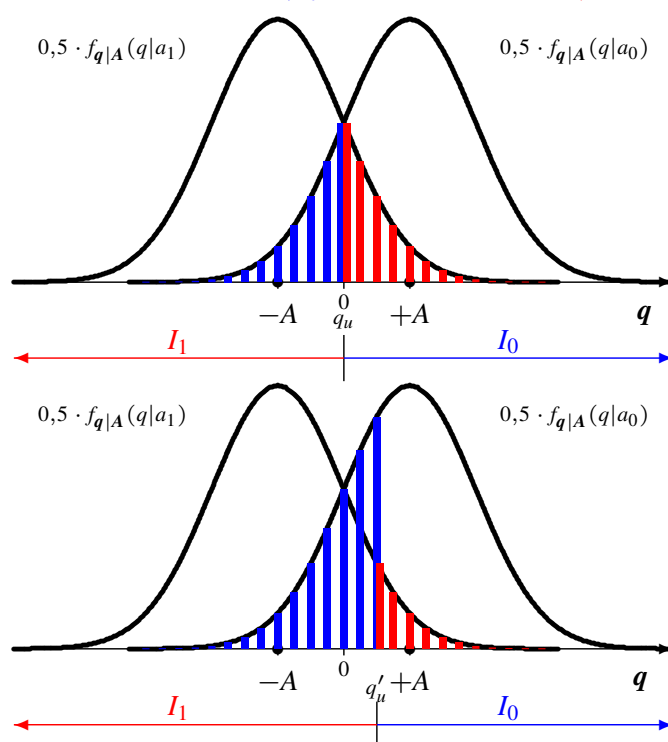


- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$ gaussiana de media $-A$ y varianza $N_0/2$

$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Probabilidad de error total - Interpretación gráfica

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e|a_0} + \frac{1}{2}P_{e|a_1} = \frac{1}{2} \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq + \frac{1}{2} \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq$$



Resultado general caso 1-D binario equiprobable

- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$q_u = \frac{a_0 + a_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

$$d(a_0, q_u) = d(a_1, q_u) = \frac{d(a_0, a_1)}{2}$$

- Probabilidad de error

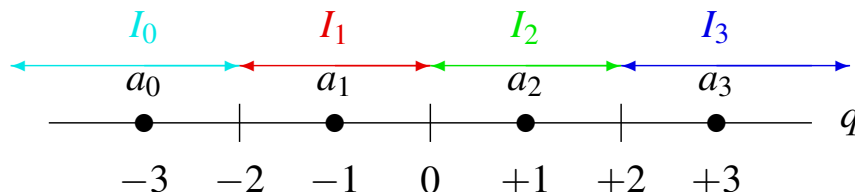
$$P_e = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Espacio 1-D M -ario

- Ejemplo:

- ▶ $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(a_i) = \frac{1}{4}$
- ▶ Constelación: $a_0 = -3$, $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, $a_3 = +3$
- ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$

$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$



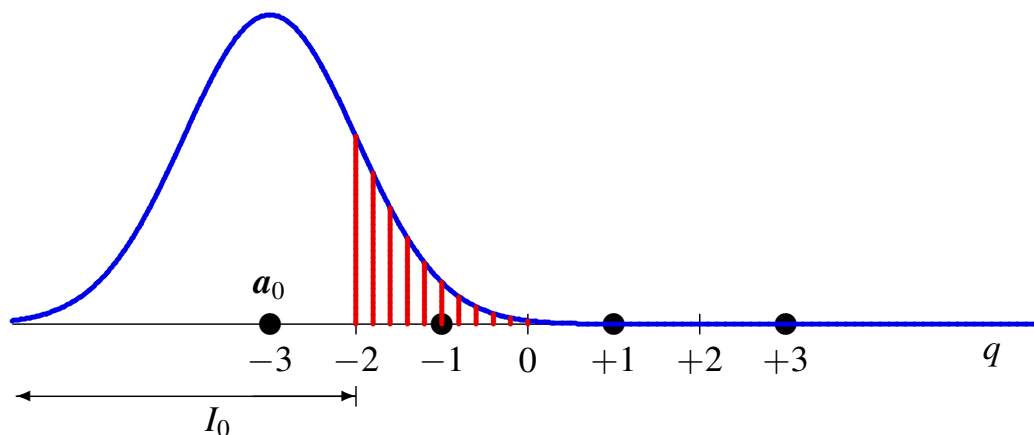
- ▶ Probabilidades de error condicionales

$$P_{e|a_0} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|a_1} = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right), P_{e|a_2} = P_{e|a_1}, P_{e|a_3} = P_{e|a_0}$$

- ▶ Probabilidad de error total

$$P_e = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{M-1} P_{e|a_i} = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

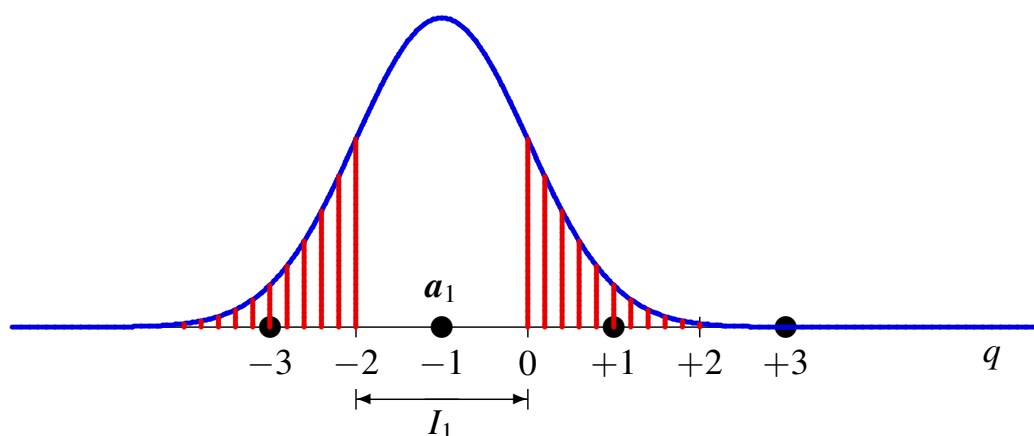
Cálculo $P_{e|a_0}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_0 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_0)$ fuera de I_0

$$P_{e|a_0} = \int_{q \notin I_0} f_{q|A}(q|a_0) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

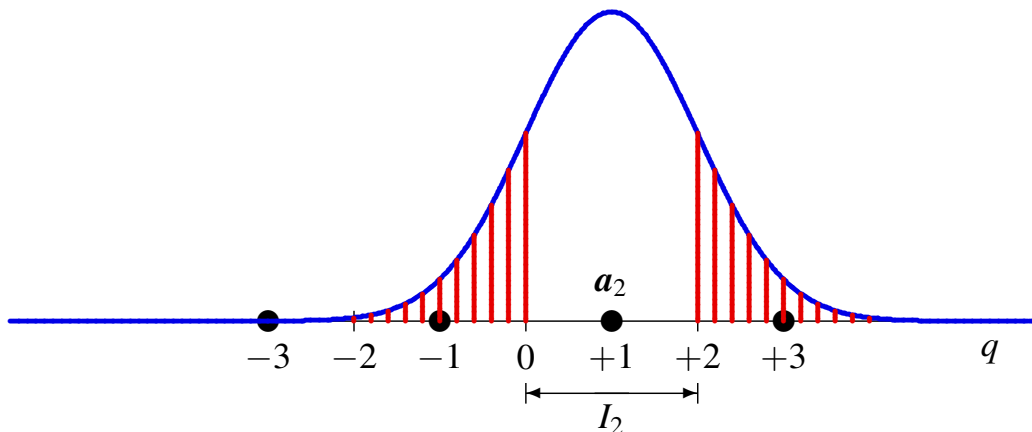
Cálculo $P_{e|a_1}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_1 = -1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_1)$ fuera de I_1

$$P_{e|a_1} = \int_{q \notin I_1} f_{q|A}(q|a_1) dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

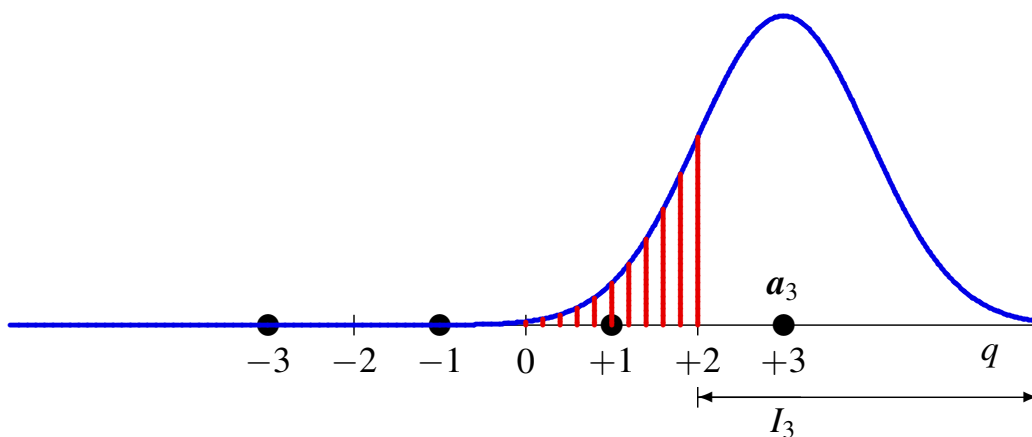
Cálculo $P_{e|a_2}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_2 = +1$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_2)$ fuera de I_2

$$P_{e|a_2} = \int_{q \notin I_2} f_{q|A}(q|a_2) dq = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cálculo $P_{e|a_3}$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$
 - ▶ Gaussiana de media $a_3 = -3$ y varianza $N_0/2$
- Probabilidad de error
 - ▶ Integrar $f_{q|A}(q|a_3)$ fuera de I_3

$$P_{e|a_3} = \int_{q \notin I_3} f_{q|A}(q|a_3) dq = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

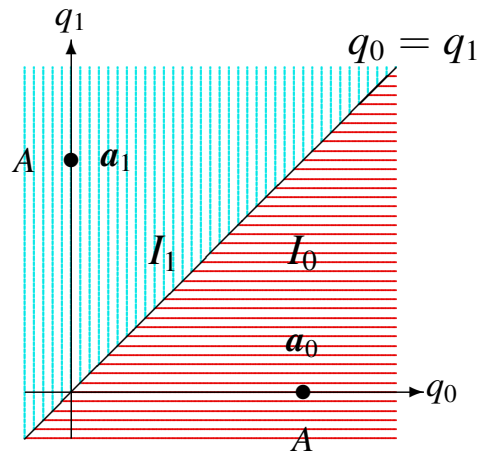
Ejemplo binario 2D

- Símbolos equiprobables $p_A(\mathbf{a}_0) = p_A(\mathbf{a}_1) = \frac{1}{2}$
- Constelación

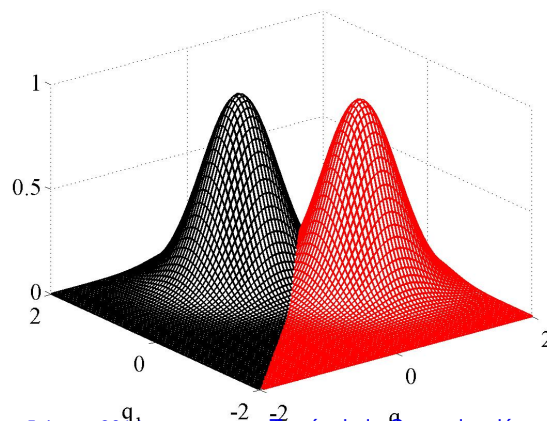
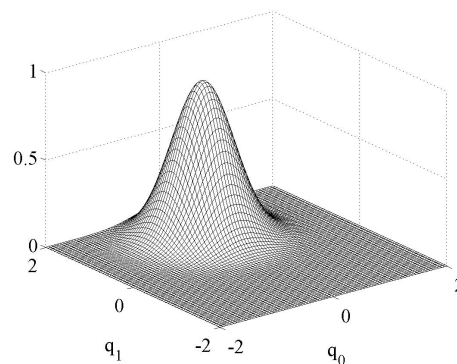
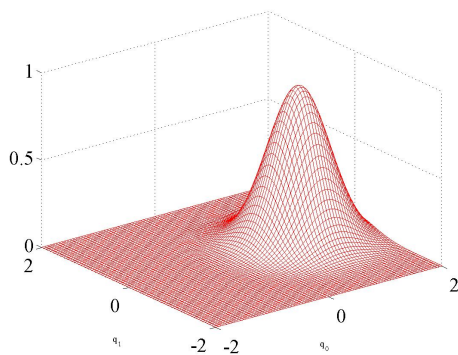
$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Regiones de decisión: frontera $q_0 = q_1$

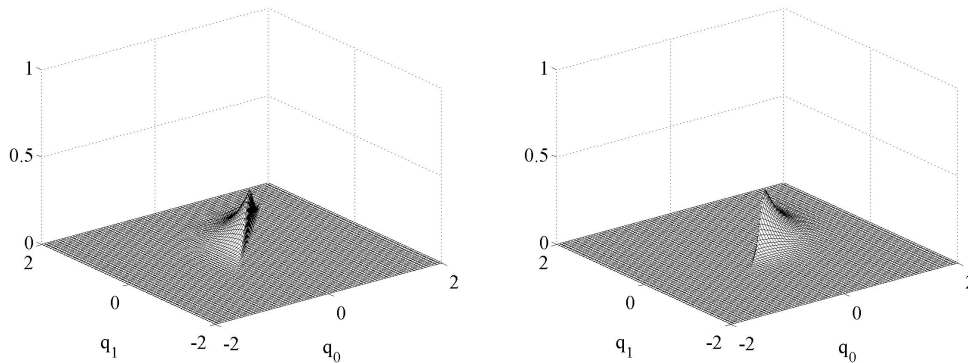
$$I_0 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 \geq q_1 \right\} \quad I_1 = \left\{ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} : q_0 < q_1 \right\}$$



Distribuciones $f_{q|A}(q|\mathbf{a}_0), f_{q|A}(q|\mathbf{a}_1)$ ($A = 1$)



Cálculo de las probabilidades de error

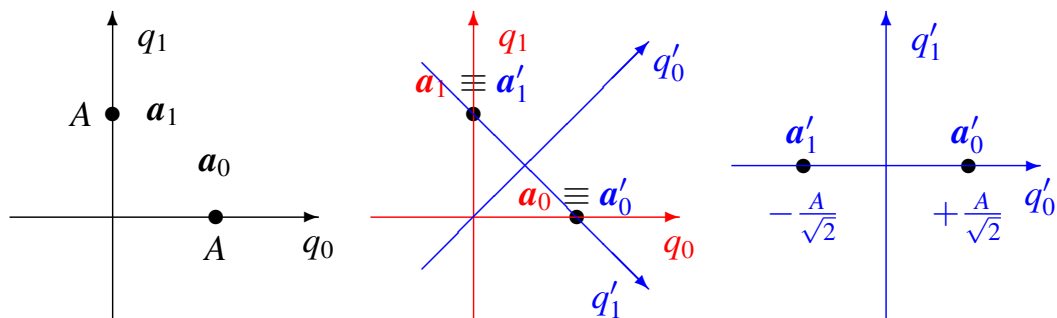


- Hay que integrar las distribuciones condicionales para a_0 y para a_1 fuera de sus regiones de decisión
- Integrales de gaussianas en 2D en un semiplano
 - ▶ No existen expresiones analíticas ni tablas numéricas

Cambio de sistema de coordenadas

- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - ▶ Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$



- ▶ El valor de la segunda coordenada es nulo para ambos símbolos

Cambio de sistema de coordenadas

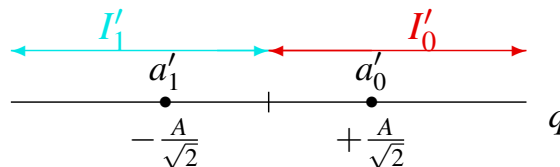
- Se puede realizar un cambio de coordenadas
 - ▶ Uno de los ejes pasa por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Se gira la constelación 45° (sin cambiar escala)

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$

- ▶ Nueva constelación (se mantiene la distancia)

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ★ Se puede eliminar la segunda coordenada : Espacio 1D!!!



Desarrollo formal del cambio de coordenadas

- Transformación para el cambio de coordenadas

$$q'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_1), \quad q'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_1 - A)$$

- Si el símbolo transmitido es a_0 , entonces $q_0 = a_{0,0} + z_0$, $q_1 = a_{0,1} + z_1$
Lo que implica que q'_0 y q'_1 toman la forma

$$q'_0|_{A=a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) - (a_{0,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) - (0 + z_1)) = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{0,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{A=a_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{0,0} + z_0) + (a_{0,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((A + z_0) + (0 + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

- Si el símbolo transmitido es a_1 entonces $q_0 = a_{1,0} + z_0$, $q_1 = a_{1,1} + z_1$
Lo que implica que q'_0 y q'_1 toman la forma

$$q'_0|_{A=a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) - (a_{1,1} + z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) - (A + z_1)) = \underbrace{-\frac{A}{\sqrt{2}}}_{a'_{1,0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)}_{z'_0}$$

$$q'_1|_{A=a_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}((a_{1,0} + z_0) + (a_{1,1} + z_1) - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 + z_0) + (A + z_1) - A) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 + z_1)}_{z'_1}$$

Desarrollo formal del cambio de coordenadas (II)

- Coordenadas de la nueva constelación

$$\mathbf{a}'_0 = \begin{bmatrix} +\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \begin{bmatrix} -\frac{A}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ No hay término de señal en la segunda coordenada

- Términos de ruido

- ▶ Términos z'_0 y z'_1 proporcionales a $z_0 - z_1$ y a $z_0 + z_1$, respectivamente
- ▶ Son independientes (gaussianos e incorrelados)

$$\text{Cov}(z_0 - z_1, z_0 + z_1) = E[(z_0 - z_1)(z_0 + z_1)] = E[z_0^2 - z_1^2] = \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{2} = 0$$

- ★ Se puede descartar la segunda coordenada (no hay señal y el término de ruido z'_1 es independiente de z'_0)
- ▶ Estadísticos z'_0

$$E[z'_0] = E\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_0] - \frac{1}{\sqrt{2}}E[z_1] = 0$$

$$\text{Var}(z'_0) = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z_0 - z_1)\right)^2\right] = \frac{1}{2}E[z_0^2] + \frac{1}{2}E[z_1^2] - E[z_0z_1] = \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{N_0}{2} - 0 = \frac{N_0}{2}$$

Resultado general caso binario equiprobable

- Siempre es posible encontrar un cambio de coordenadas con uno de los ejes pasando por los dos puntos de la constelación
 - ▶ Lo relevante es la distancia entre los puntos
- En este caso, se tienen las siguientes condiciones
 - ▶ Regiones de decisión para símbolos equiprobables
 - ★ Umbral en el punto medio de los dos símbolos

$$\mathbf{q}_u = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1}{2}$$

- ★ Distancia de cada símbolo al umbral

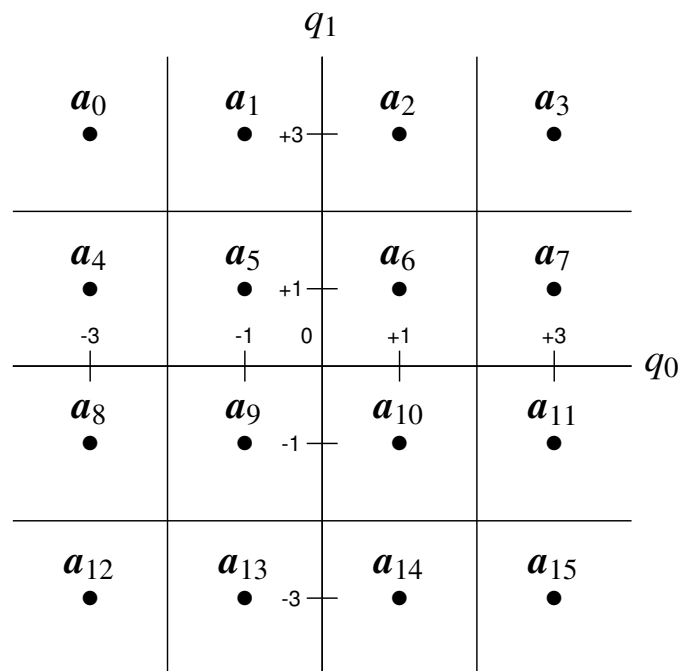
$$d(\mathbf{a}_0, \mathbf{q}_u) = d(\mathbf{a}_1, \mathbf{q}_u) = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2}$$

- Probabilidad de error

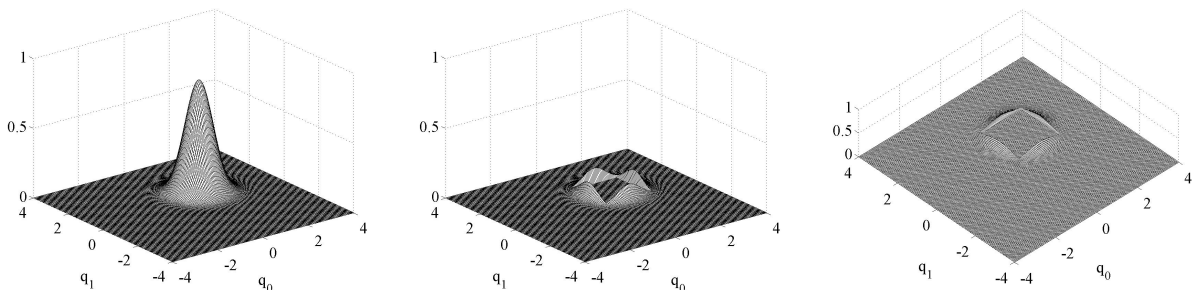
$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional

- Ejemplo: constelación de 16 símbolos con regiones formando una retícula alineada con los ejes q_0 y q_1



Cálculo de la probabilidad de error para a_6



- Coordenadas del símbolo: $\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$

- ▶ Distribución $f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6)$: gaussiana 2D en \mathbf{a}_6 ($\sigma^2 = N_0/2$)

$$f_{\mathbf{q}|A}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_6) = \mathcal{N}^2\left(\mathbf{a}_6, \frac{N_0}{2}\right) = \mathcal{N}^2\left(\begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \frac{N_0}{2}\right)$$

- Cálculo de la probabilidad de error condicional $P_{e|\mathbf{a}_6}$
 - ▶ Región de decisión - Cuadrado $0 \leq q_0 < 2$ y $0 \leq q_1 < 2$
 - ★ No hay expresiones analíticas para calcular directamente la integral de una gaussiana fuera de este cuadrado

Espacio 2D - Regiones de decisión forman una rejilla

- En este caso las regiones de decisión se pueden describir mediante dos condiciones independientes sobre q_0 y sobre q_1 que han de cumplirse de forma simultánea

- ▶ Ejemplos

$$I_6 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 0 \leq q_1 < 2$$

$$I_2 \equiv 0 \leq q_0 < 2 \text{ y } 2 \leq q_1 < \infty$$

- ▶ Se puede descomponer el problema 2D en 2 problemas 1D acoplados

$$P_{e|a_i} = 1 - P_{a|a_i} = 1 - P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}} = 1 - [(1 - P_{e|a_{i,0}}) (1 - P_{e|a_{i,1}})]$$

- ★ La probabilidad de acierto $P_{a|a_i}$ se puede escribir como el producto de la probabilidad de acertar en cada una de las dos direcciones del espacio $P_{a|a_{i,0}} \times P_{a|a_{i,1}}$
- ★ La probabilidad de acierto en una de las direcciones del espacio ($P_{a|a_{i,0}}$ ó $P_{a|a_{i,1}}$) se puede escribir como 1 menos la probabilidad de error en esa dirección ($P_{e|a_{i,0}}$ ó $P_{e|a_{i,1}}$)

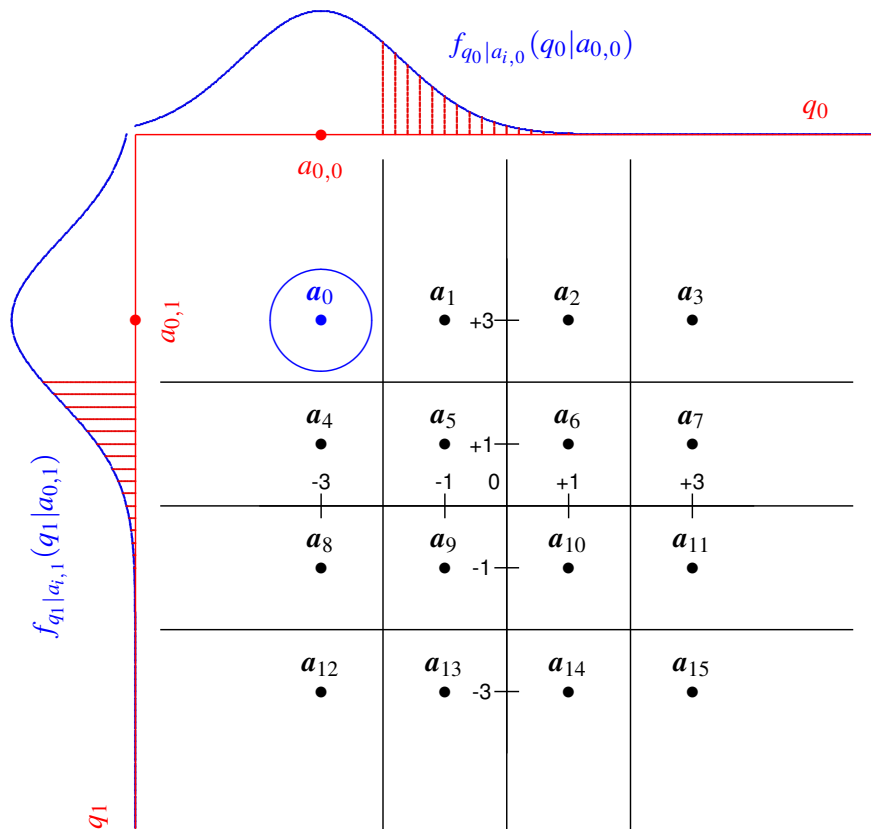
Tres tipos de regiones de decisión

- Tipo 1: $\{I_0, I_3, I_{12}, I_{15}\}$
 - ▶ Una única frontera de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 2: $\{I_5, I_6, I_9, I_{10}\}$
 - ▶ Dos fronteras de decisión en cada dirección del espacio
- Tipo 3: $\{I_1, I_2, I_4, I_7, I_8, I_{11}, I_{13}, I_{14}\}$
 - ▶ Una frontera en una de las direcciones del espacio
 - ▶ Dos fronteras en la otra dirección
- Cálculo de la probabilidad de error para símbolos equiprobables
 - ▶ Todos los símbolos de un mismo tipo tienen la misma probabilidad de error condicional
 - ★ Ejemplos de cada tipo: a_0 (Tipo 1), a_5 (Tipo 2), a_7 (Tipo 3)

$$P_e = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot P_{e|a_i} = 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_0} + 4 \times \frac{1}{16} P_{e|a_5} + 8 \times \frac{1}{16} P_{e|a_7}$$

$$= 3Q \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right) - \frac{9}{4} Q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}} \right)$$

Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)



Regiones de Tipo 1 (ejemplo a_0)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,0} = -3$
 - ▶ Región de decisión : $-\infty < q_0 < -2$

$$P_{a|a_{0,0}} = 1 - P_{e|a_{0,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

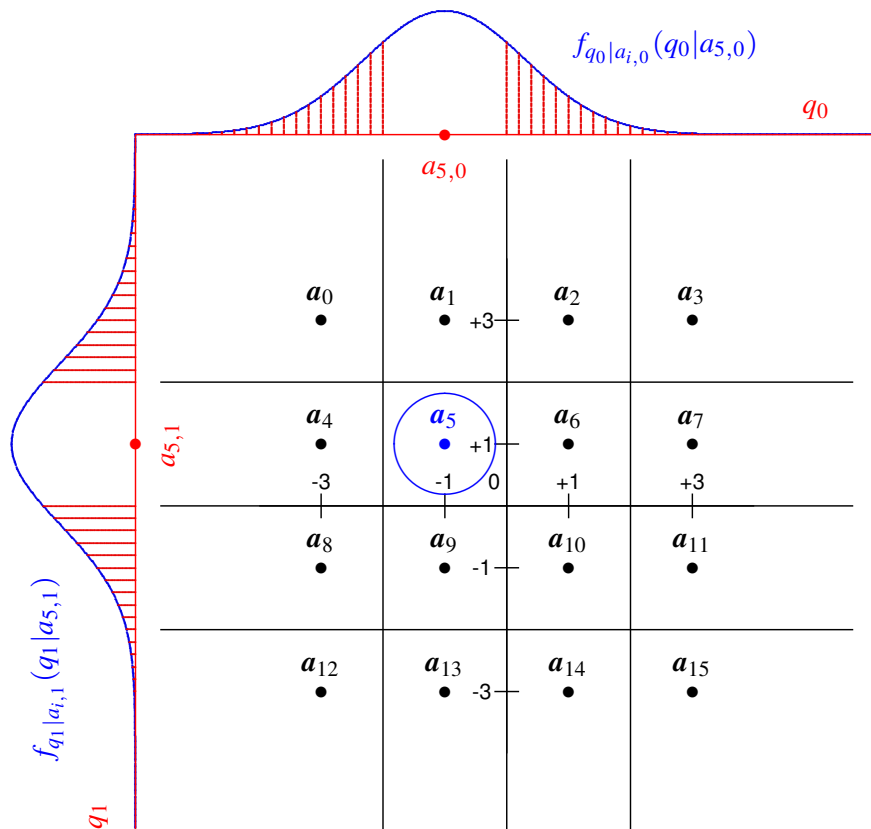
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{0,1} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_1 < +\infty$

$$P_{a|a_{0,1}} = 1 - P_{e|a_{0,1}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_0} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 2 (ejemplo a_5)



Regiones de Tipo 2 (ejemplo a_5)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,0} = -1$
 - ▶ Región de decisión : $-2 \leq q_0 < 0$

$$P_{a|a_{5,0}} = 1 - P_{e|a_{5,0}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

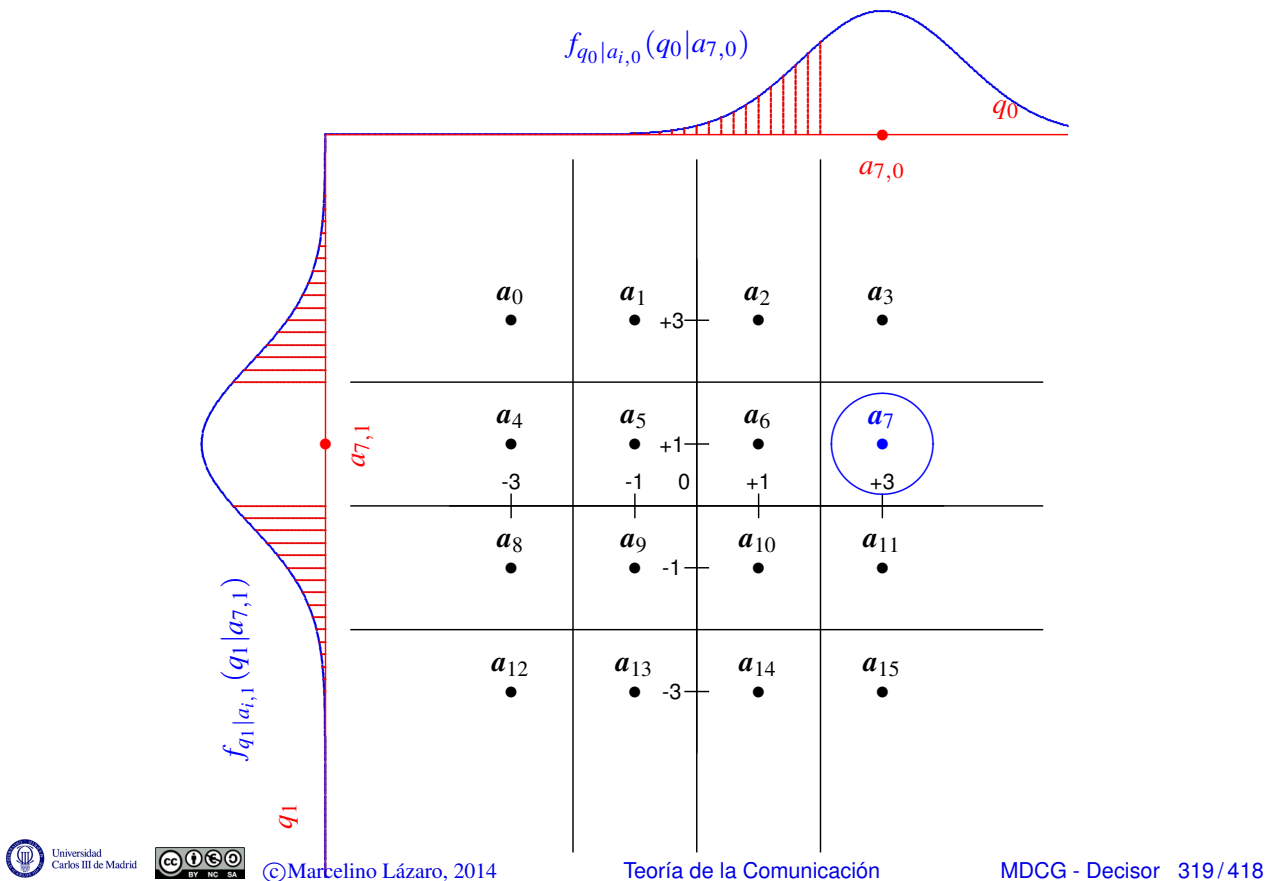
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{5,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{5,1}} = 1 - P_{e|a_{5,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_5} = 1 - \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2 = 4Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 4Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)



Regiones de Tipo 3 (ejemplo a_7)

- Dirección del espacio q_0
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,0} = +3$
 - ▶ Región de decisión : $+2 \leq q_0 < +\infty$

$$P_{a|a_{7,0}} = 1 - P_{e|a_{7,0}} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

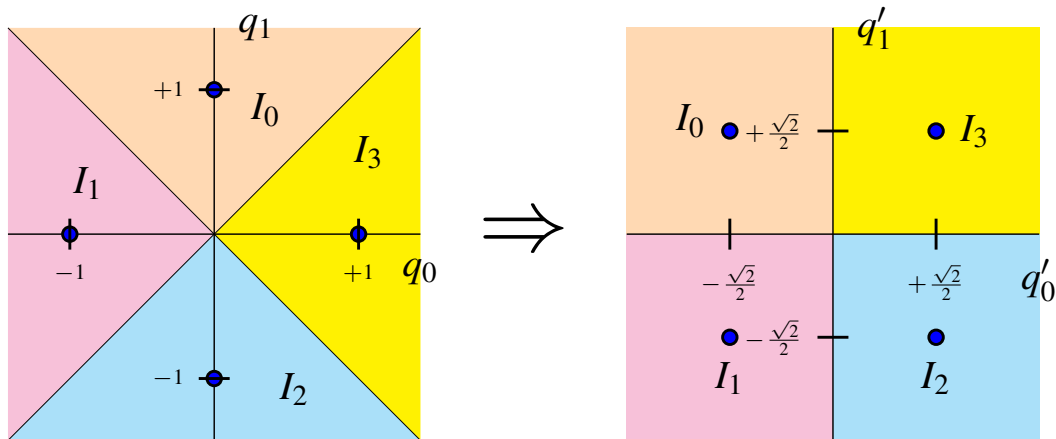
- Dirección del espacio q_1
 - ▶ Media de la distribución gaussiana 1-D: $a_{7,1} = +1$
 - ▶ Región de decisión : $0 \leq q_1 < +2$

$$P_{a|a_{7,1}} = 1 - P_{e|a_{7,1}} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Probabilidad de error condicional

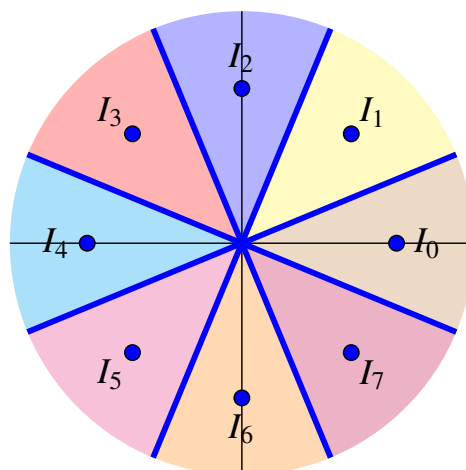
$$P_{e|a_7} = 1 - \left[1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] \cdot \left[1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right] = 3Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - 2Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Decisor M -ario en espacio multidimensional (II)



- Las regiones de decisión forman una rejilla, pero no alineada con las direcciones del espacio
 - ▶ Es posible hacer un cambio de coordenadas para girar 45° la constelación de forma que las regiones de decisión estén alineadas con los nuevos ejes
 - ★ Es posible calcular la probabilidad de error en ese caso

Decisor M -ario en espacio multidimensional (III)



- Las regiones de decisión no forman una rejilla
 - ▶ No es posible calcular de forma analítica la probabilidad de error, ni hacer transformaciones sencillas que lo permitan
 - ★ Se pueden calcular de forma exacta mediante cálculo numérico (ordenadores)
 - ★ Se puede recurrir a aproximaciones o cotas analíticas

Aproximaciones de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o resulta complicado calcular la probabilidad de error exacta
- Aproximación de la probabilidad de error
 - ▶ La probabilidad de error entre símbolos depende de la distancia ente los mismos
 - ★ Lo más probable, en caso de error, es decidir de forma errónea un símbolo que está a mínima distancia del transmitido
 - ▶ Aproximación más utilizada
 - ★ Se asume que sólo se cometerán errores con símbolos que están a mínima distancia

$$P_e \approx k \cdot Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- ★ d_{min} : mínima distancia entre dos símbolos de la constelación
- ★ k : máximo número de símbolos a mínima distancia de un símbolo de la constelación

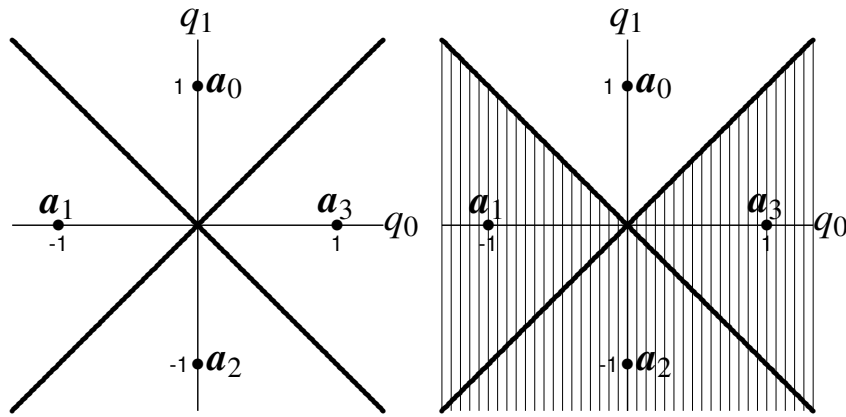
Cotas de la probabilidad de error

- Son útiles cuando no es posible o es complicado calcular la probabilidad de error exacta, y se quiere asegurar una prestación mínima (probabilidad de error máxima)
- Se obtiene una expresión que acota superiormente la probabilidad de error

$$P_e \leq \text{Cota}$$

- Cotas utilizadas con mayor frecuencia
 - ▶ Cota de la unión
 - ★ Acota la probabilidad de error de forma ajustada
 - La probabilidad de error no es lejana al valor de la cota
 - ★ Su cálculo se complica para constelaciones con muchos símbolos
 - ▶ Cota holgada
 - ★ Cota menos ajustada pero más fácil de calcular

Cota de la unión - Ejemplo



- Se va a tratar de acotar la probabilidad de error para esta constelación
- Probabilidad de error condicional $P_{e|a_0}$
 - ▶ Hay que integrar $f_{q|A}(q|a_0)$ fuera de I_0
 - ★ $f_{q|A}(q|a_0)$ es una gaussiana 2D centrada en a_0
 - ★ Integración de $f_{q|A}(q|a_0)$ en la zona rallada de la figura

Cota de la unión - Interpretación gráfica

- Probabilidades de error si sólo estuvieran a_0 y otro símbolo a_i

$$P_e(a_0, a_1) = Q\left(\frac{d(a_0, a_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$P_e(a_0, a_2) = Q\left(\frac{d(a_0, a_2)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{2}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right)$$

$$P_e(a_0, a_3) = Q\left(\frac{d(a_0, a_3)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

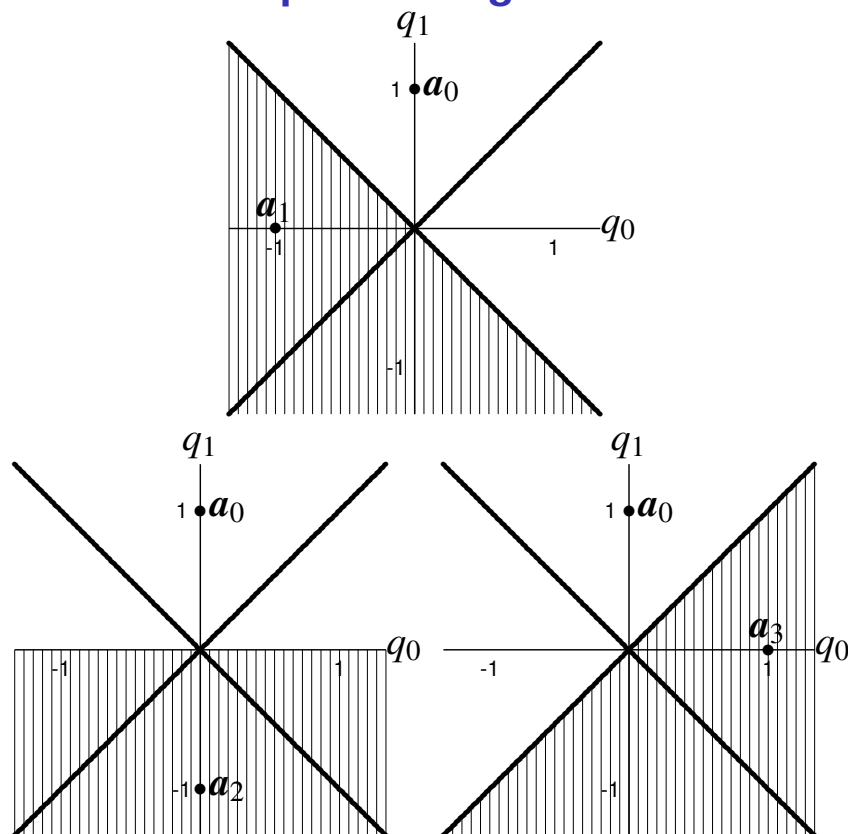
- ▶ Corresponden a integrales de la gaussiana centrada en a_0 en los semiplanos de la figura de la siguiente diapositiva
 - ★ Sumadas, forman una cota de la probabilidad de error
- Cota para la probabilidad de error condicional

$$P_{e|a_0} \leq \sum_{j=1}^{M-1} P_e(a_0, a_j) \rightarrow \text{En general } P_{e|a_i} \leq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(a_i, a_j)$$

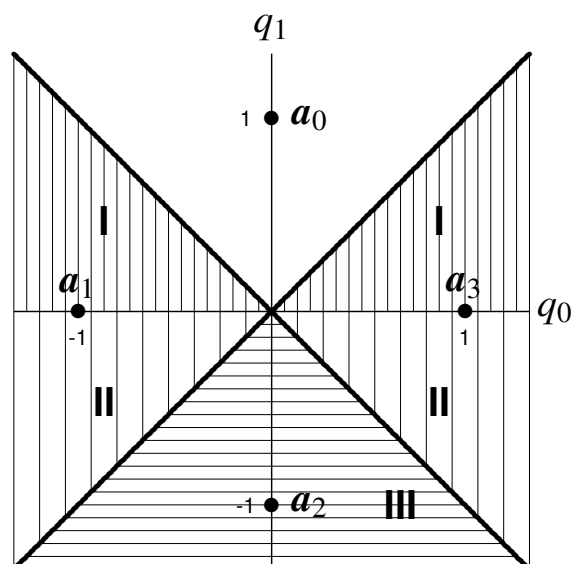
- Cota de la unión

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_e(a_i, a_j) = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d(a_i, a_j)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Cota de la unión - Interpretación gráfica

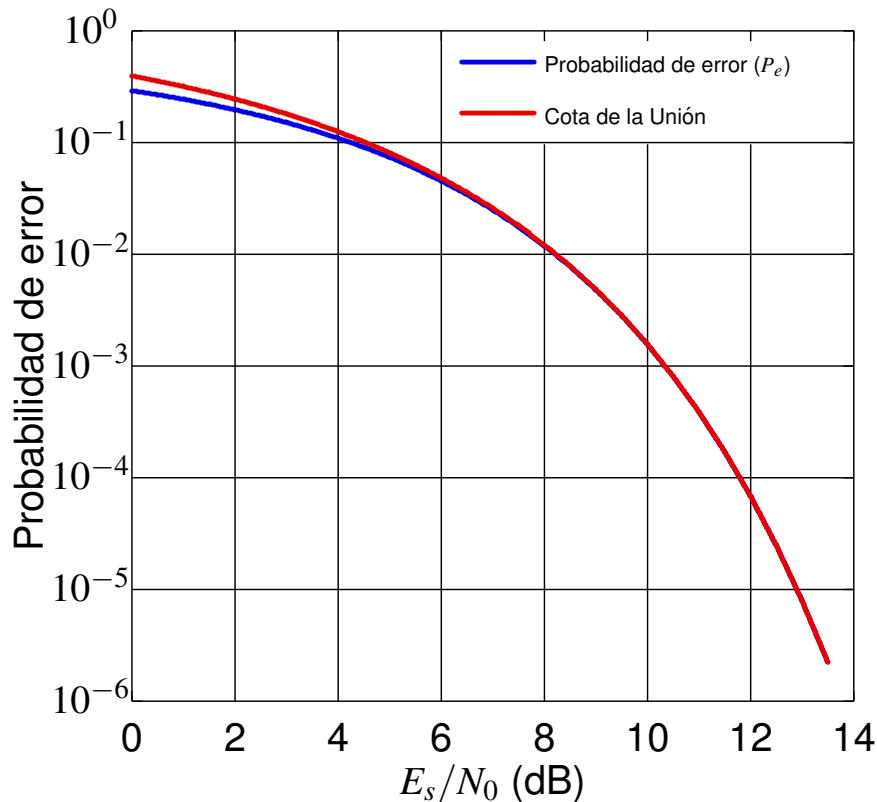


Cota de la Unión - Límite Superior



- La suma de los tres términos integra la gaussiana en toda la región deseada
 - ▶ Una única vez en las zonas marcadas con **I**
 - ▶ Dos veces en las zonas marcadas con **II**
 - ▶ Tres veces en la zona marcada con **III**

Cota de la Unión - Prestaciones



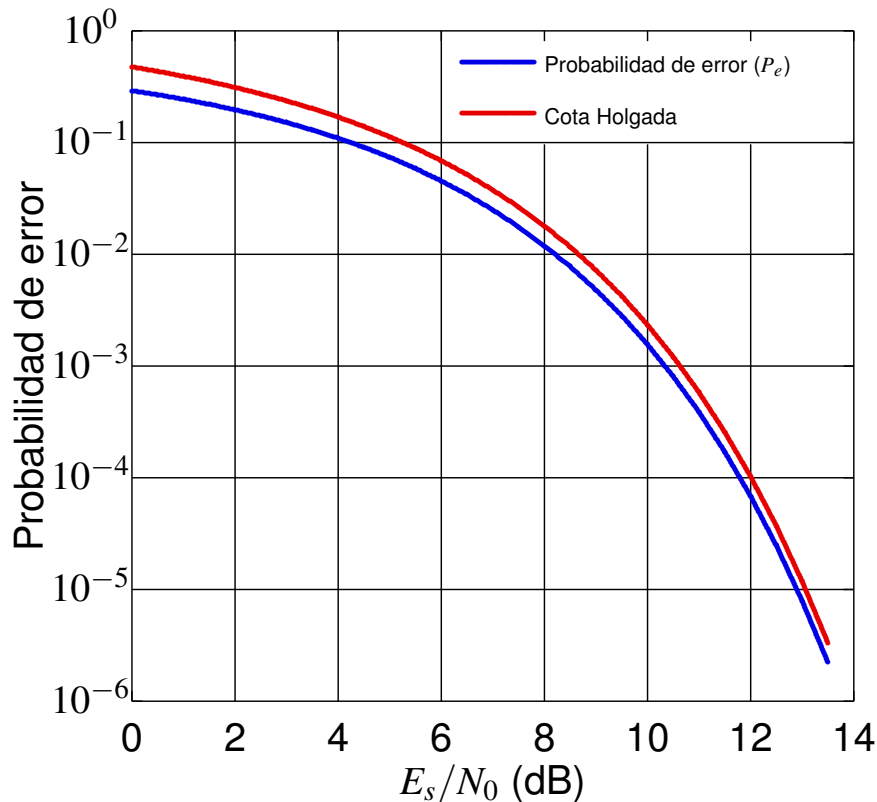
Cota holgada

- La cota de la unión requiere computar las distancias entre cada par de símbolos y evaluar la función $Q(x)$ para cada término
 - ▶ Número de distancias mínimo (incluso considerando la simetría $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = d(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_i)$) es $N_{distancias} = \sum_{k=1}^{M-1} k$
 - ★ $M = 4$ significa $N_{distancias} = 6$
 - ★ $M = 8$ significa $N_{distancias} = 28$
 - ★ $M = 16$ significa $N_{distancias} = 120$
 - ★ $M = 64$ significa $N_{distancias} = 2016$
- Cota holgada
 - ▶ Se asume que todos los símbolos están a d_{min} de los $M - 1$ símbolos restantes y se usa la cota de la unión para este caso

$$P_e \leq (M - 1) \cdot Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- ★ Como siempre habrá símbolos a distancias mayores, esta expresión es una cota para la cota de la unión, y por tanto, es una cota para la probabilidad de error

Cota Holgada - Prestaciones



Expresiones de P_e en función de E_s/N_0

- Las prestaciones se representan a menudo como una función de la relación E_s/N_0
- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

$$Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \text{ ó } Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden reescribir como

$$Q\left(v \cdot \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ donde } Q\left(\underbrace{\frac{d_{min}}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ ó } Q\left(\underbrace{\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}}_v \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ Factor v : valor constante, que depende de la constelación
 - ★ Cuanto más alto es v , más eficiente es la constelación

Ejemplos - Constelaciones binarias equiprobables

- En este caso, para cualquier dimensión N

$$P_e = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Se compararán dos casos

- ▶ Caso (a): Constelación binaria simétrica ($N = 1$)

$$\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$$

- ▶ Caso (b): Constelación ortogonal ($N = 2$)

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Cálculo de distancias y energías

- ▶ Caso (a): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = 2 \cdot A$
- ▶ Caso (b): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{2} \cdot A$

- Cálculo del factor de eficiencia ν

- ▶ Caso (a):

$$\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = \sqrt{2} \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ Caso (b):

$$\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = 1 \rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Codificador

- Convierte la secuencia de símbolos $B[n]$, (obtenida a partir de la secuencia de bits $B_b[\ell]$), en una secuencia de vectores con la representación discreta de las señales, $\mathbf{A}[n]$

- ▶ Posible valores de $\mathbf{A}[n]$: Constelación: $\{\mathbf{a}_i\}_{i=0}^{M-1}, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^N$
- ▶ $M = 2^m$ símbolos - $m = \log_2 M$ bits por símbolo
- ▶ Tasa binaria: R_b - Tasa de símbolo: R_s

$$R_b = \frac{1}{T_b} \text{ bits/s} - R_s = \frac{1}{T} \text{ symbols/s (bauds)} - R_b = m \cdot R_s$$

- Restricciones en el diseño de la constelación: P_e, BER, E_s

- ▶ Prestaciones: distancia entre símbolos (distancia mínima)
- ▶ Energía por símbolo: norma al cuadrado

$$d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k} - a_{j,k}|^2}, d_{\min} = \min_{i \neq j} d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j), \mathcal{E}\{\mathbf{a}_i\} = \|\mathbf{a}_i\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |a_{i,k}|^2$$

- ▶ Compromiso: garantizar una mínima distancia, con los símbolos lo más cercanos posibles al origen de coordenadas

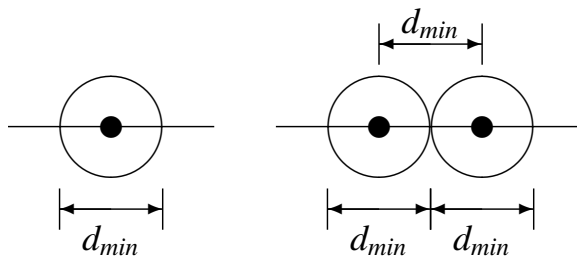
★ Media de la constelación nula: $E[\mathbf{a}_i] = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$

Codificador - Empaquetado de esferas

- El compromiso entre distancia y energía se puede entender como un problema de empaquetado de esferas de un diámetro constante
 - ▶ Garantizar unas prestaciones mínimas equivale a garantizar una distancia mínima

$$P_e \approx k \cdot Q \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}} \right)$$

- ▶ Símbolo: esfera centrada en \mathbf{a}_i con diámetro d_{min}
 - ★ Dos esferas en contacto están a distancia d_{min}

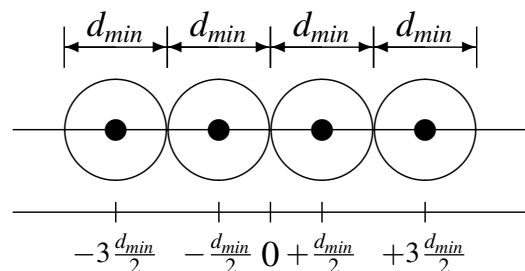


- ▶ El problema de diseño se puede plantear como
 - ★ Colocar M esferas de diámetro d_{min} en el menor espacio posible (espacio N -D) y centradas en el origen (media nula)

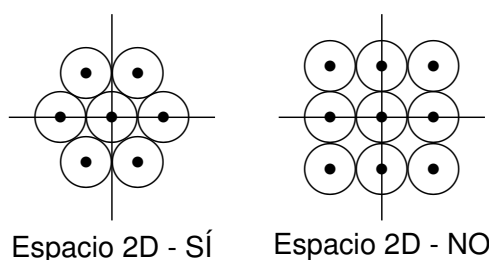
Empaquetado de esferas

- Diseño en espacio 1-D
 - ▶ M puntos equiespaciados en una recta - Coordenadas

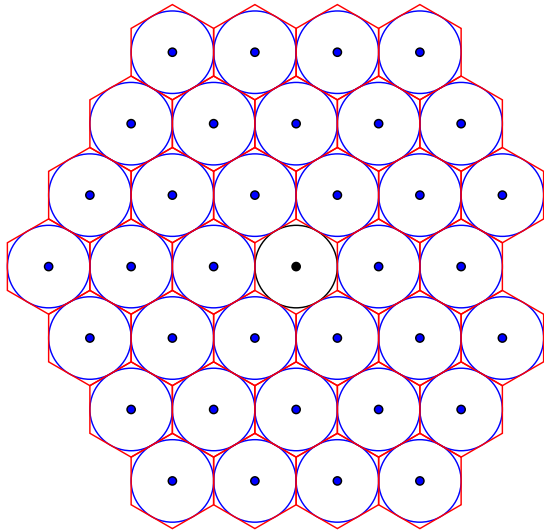
$$\left\{ \pm \frac{d_{min}}{2}, \pm 3 \cdot \frac{d_{min}}{2}, \dots, \pm (M-1) \cdot \frac{d_{min}}{2} \right\}$$



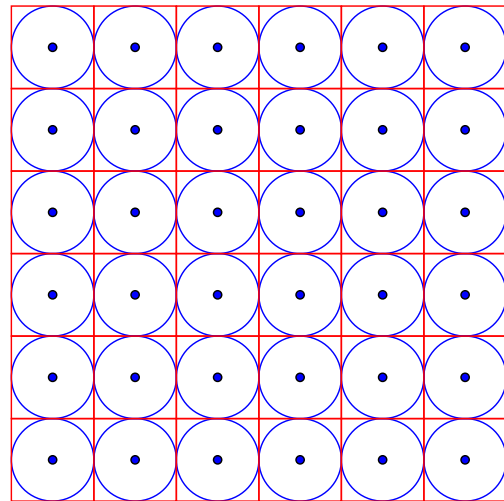
- Diseño en espacio 2-D
 - ▶ Se forman círculos a partir de una esfera central
 - ▶ Se recolocan para que la media sea nula



Constelaciones Hexagonales vs. Reticulares



Empaquetado 2D - Sí



Empaquetado 2D - No

Comparación de empaquetado de 36 esferas

Constelación equivalente con media nula

- La probabilidad de error depende de las posiciones relativas entre símbolos
 - ▶ Estas posiciones relativas definen las distancias $d(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$
- Para unas distancias dadas, la mínima E_s se obtiene si la constelación tiene media nula
- Transformación en constelación equivalente con media nula
 - ▶ Cálculo de la media de la constelación

$$E[\mathbf{a}_i] = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(\mathbf{a}_i) \cdot \mathbf{a}_i$$

- ★ Vector N dimensional (un valor por cada coordenada de \mathbf{a}_i)
- ▶ Se le resta a cada símbolo de la constelación inicial esta media

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$$

- ★ La media de la nueva constelación es nula

$$E[\mathbf{a}'_i] = \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{p_{A'}(\mathbf{a}'_i)}_{p_A(\mathbf{a}_i)} \cdot \mathbf{a}'_i = [0, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$$

Constelación equivalente con media nula - Ejemplo

- Constelación con $M = 4$ símbolos, $p_A(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4} \forall i$

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

$$E_s = \frac{1}{4} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 \right] + \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 \right] = \frac{13}{4} = 3,25$$

- Media de la constelación

$$E[\mathbf{a}_i] = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} \\ +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +1 \end{bmatrix}$$

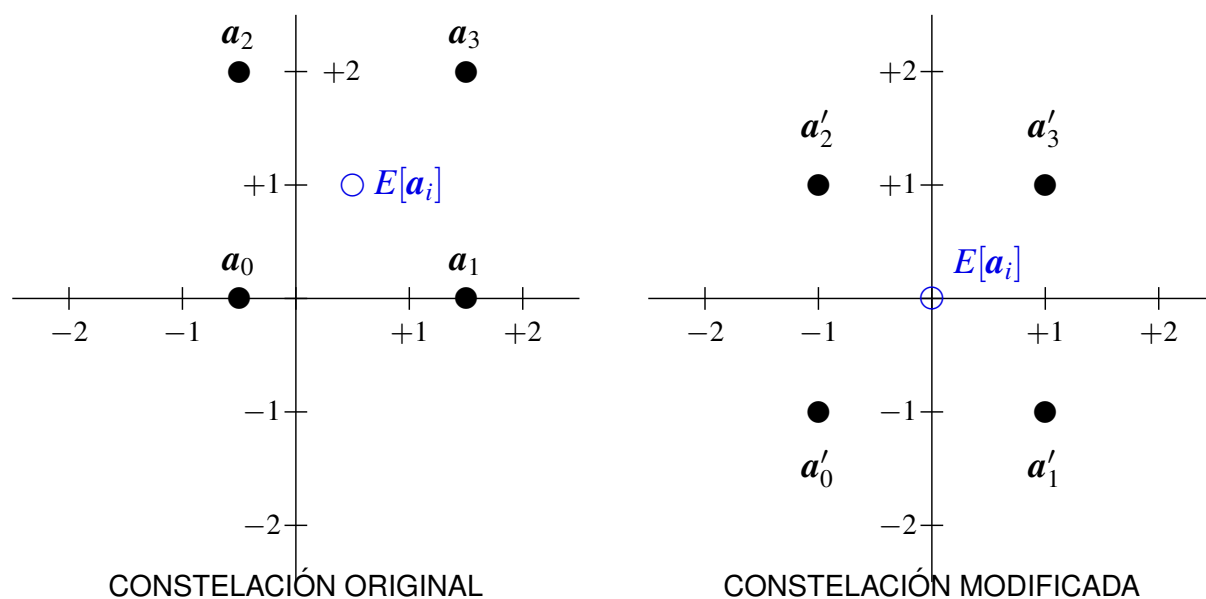
- Constelación modificada: $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - E[\mathbf{a}_i]$

$$\mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}_0 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - E[\mathbf{a}_i] = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Energía media por símbolo

$$E'_s = \frac{1}{4} \cdot [(-1)^2 + (-1)^2] + \frac{1}{4} \cdot [(+1)^2 + (-1)^2] + \frac{1}{4} \cdot [(-1)^2 + (+1)^2] + \frac{1}{4} \cdot [(+1)^2 + (+1)^2] = 2$$

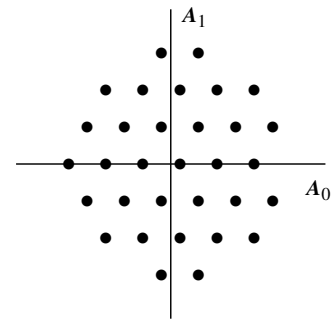
Constelación equivalente con media nula - Ejemplo (II)



Diseño del codificador

- Empaquetado de esferas

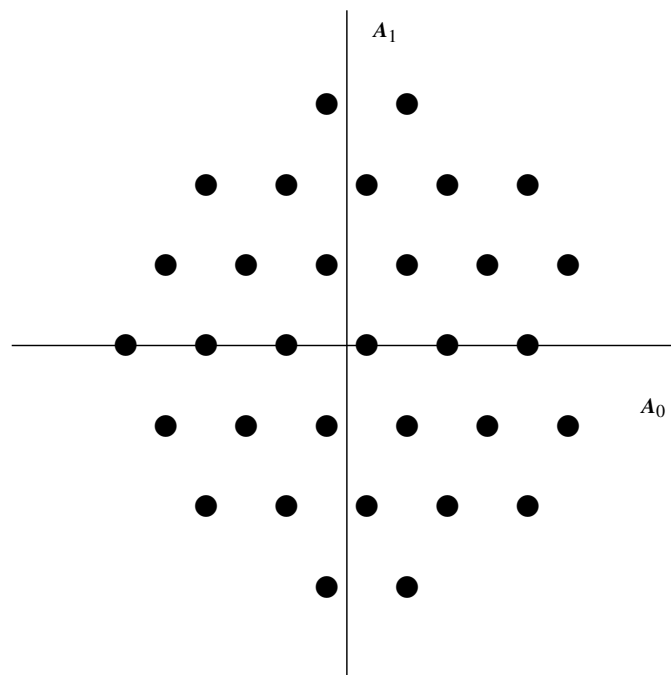
- ▶ Óptimo: mínima P_e para una E_s dada
- ▶ Constelaciones hexagonales
- ▶ Regiones de decisión hexagonales



- Consideraciones prácticas

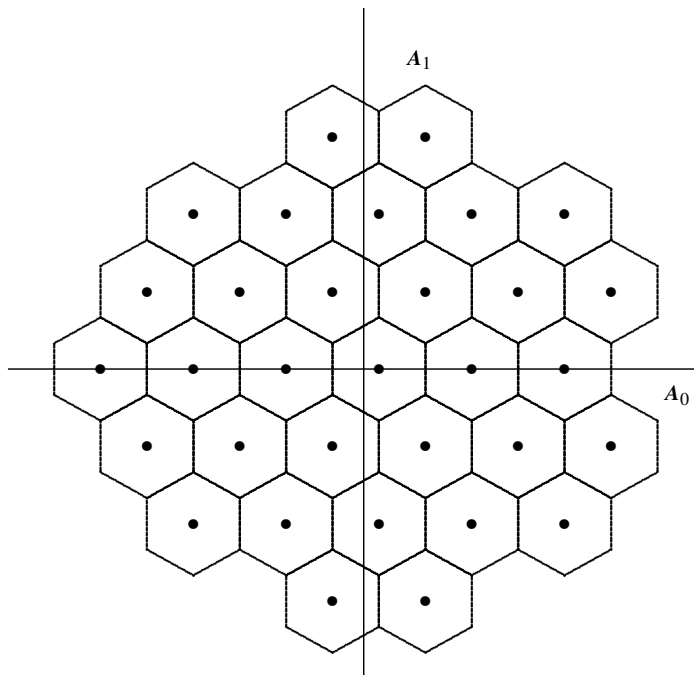
- ▶ Simplicidad de implementación del transmisor
 - ▶ Limitación de la energía de pico
 - ▶ Relación potencia de pico / potencia media
 - ▶ Simplicity of the receiver - Regiones de decisión
- ⇒ Otras constelaciones: QAM, PSK, unipolar, ortogonal, ...

Constelaciones Hexagonales



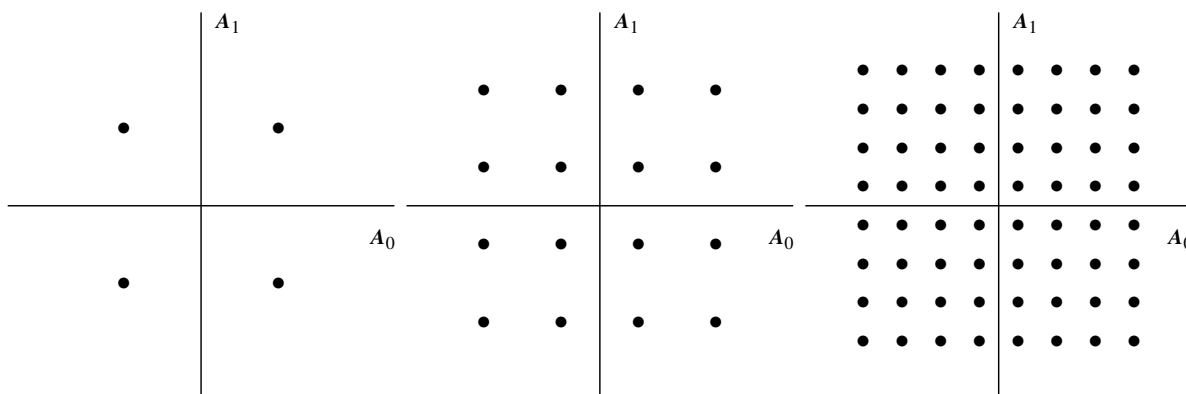
Constelación Hexagonal de 32 símbolos

Constelaciones Hexagonales - Regiones de decisión



Constelación Hexagonal de 32 símbolos

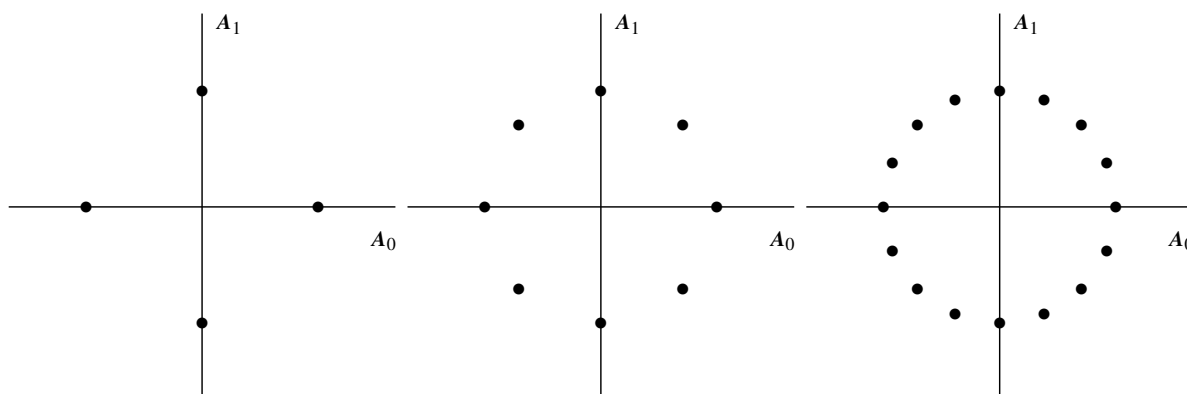
Constelaciones QAM



Constelaciones 4-QAM (QPSK), 16-QAM y 64-QAM

- Puntos en una retícula
 - ▶ Facilidad de implementación de transmisor / receptor
 - ★ Generación / procesado de forma independiente para cada coordenada

Constelaciones PSK



Constelaciones 4-PSK (QPSK), 8-PSK y 16-PSK

- Puntos en un círculo de radio constante
 - ▶ Energía constante para todos los símbolos

Asignación binaria

- Asignación binaria - Conversión $B_b[\ell] \rightarrow B[n]$
 - ▶ m bits se transmiten en cada símbolo b_i (a_i)
 - ▶ $M = 2^m$ símbolos $\rightarrow m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Objetivo de la asignación binaria (valores de los m bits) a cada símbolo
 - ▶ Minimización de la probabilidad de error de bit (BER)
- Técnica de asignación binaria óptima
 - ▶ Codificación de Gray

Cálculo de la probabilidad de error de bit (BER)

- BER: *Bit Error Rate*
- Se promedia la BER condicional para a_i

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot BER_{a_i}$$

- Cálculo de las BER condicionales

$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \rightarrow a_j} \cdot \frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$$

- ▶ $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$: probabilidad de transmitiendo $A = a_i$, decidir $\hat{A} = a_j$

$$P_{e|a_i \rightarrow a_j} = \int_{q_0 \in I_j} f_{q|A}(q_0|a_i) dq_0$$

- ▶ $m_{e|a_i \rightarrow a_j}$: número de errores de bit que conlleva esa decisión
- ▶ m : número de bits por símbolo de la constelación

Ejemplo - Espacio 1-D M -ario

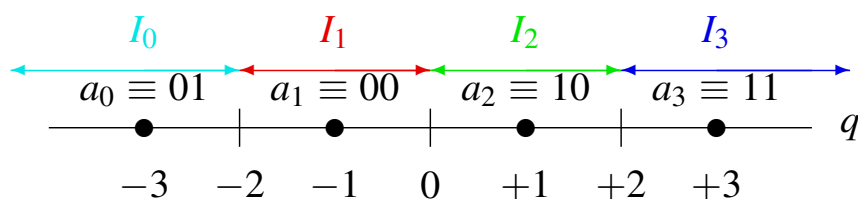
- Ejemplo:

- ▶ $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(a_i) = \frac{1}{4}$
- ▶ Constelación: $a_0 = -3$, $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, $a_3 = +3$
- ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$

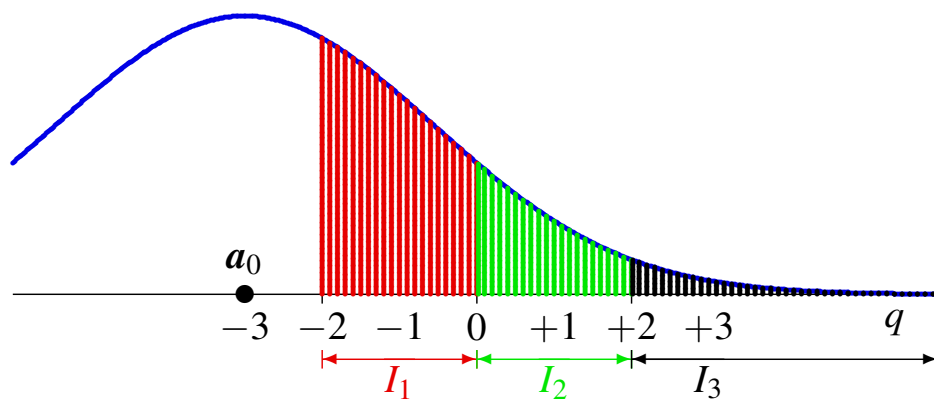
$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$

- ▶ Asignación binaria

$$a_0 \equiv 01, a_1 \equiv 00, a_2 \equiv 10, a_3 \equiv 11$$



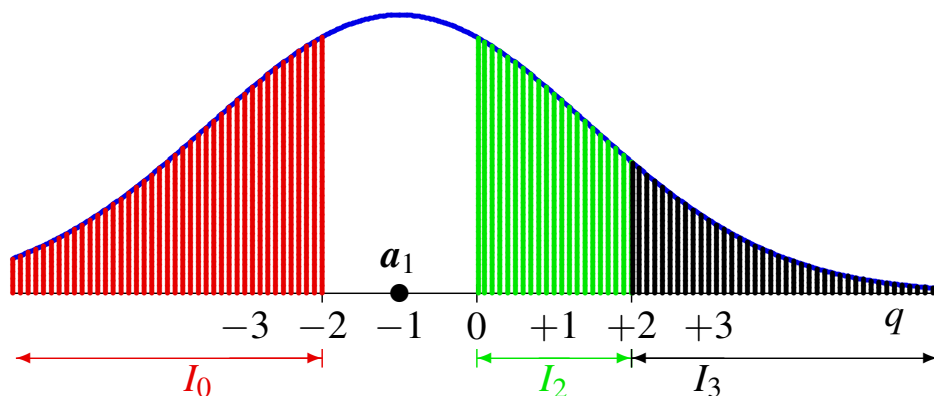
Cálculo de BER_{a_0}



- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$: gaussiana de media a_0 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_0} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_1}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_0 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_0 \rightarrow a_3}}{m}}$$

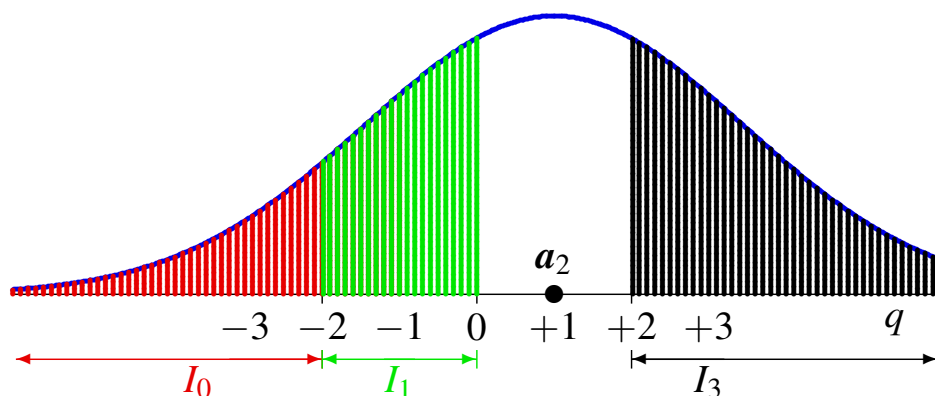
Cálculo de BER_{a_1}



- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$: gaussiana de media a_1 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_1} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_2}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_1 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_1 \rightarrow a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_2}

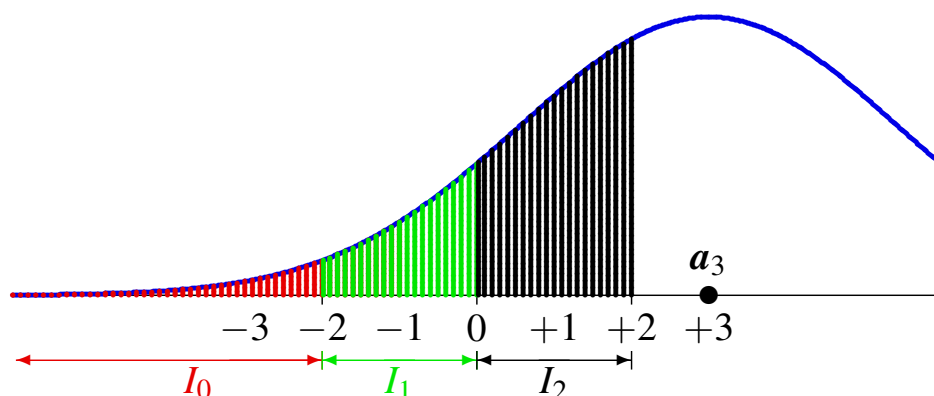


- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$: gaussiana de media a_2 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_2} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_1}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_2 \rightarrow a_3}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_2 \rightarrow a_3}}{m}}$$

Cálculo de BER_{a_3}



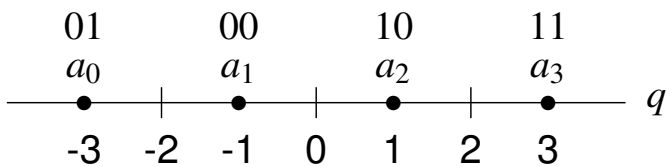
- Asignación binaria: $a_0 \equiv 01$, $a_1 \equiv 00$, $a_2 \equiv 10$, $a_3 \equiv 11$
- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$: gaussiana de media a_3 y varianza $N_0/2$

$$BER_{a_3} = \underbrace{\left[Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_0}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_0}}{m}} + \underbrace{\left[Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_1}} \times \underbrace{\frac{2}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_1}}{m}}$$

$$+ \underbrace{\left[Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \right]}_{P_{e|a_3 \rightarrow a_2}} \times \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{m_{e|a_3 \rightarrow a_2}}{m}}$$

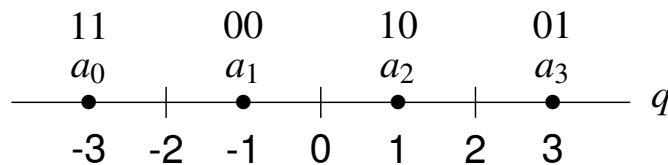
Cambio en la asignación binaria

- Resultado final para constelación anterior



$$BER = \frac{3}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

- Si se cambia la asignación binaria

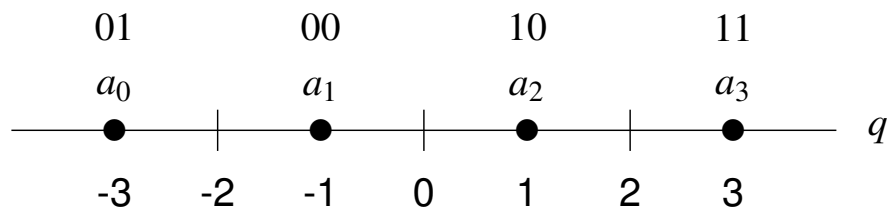


- ▶ No varían los términos $P_{e|a_i \rightarrow a_j}$
- ▶ Sí varían los términos $m_{e|a_i \rightarrow a_j} \Rightarrow$ Varía la BER !!!

$$BER = \frac{5}{4}Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_o/2}}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_o/2}}\right)$$

Codificación de Gray

- Los bloques de m bits asignados a símbolos que están a mínima distancia difieren sólo en 1 bit

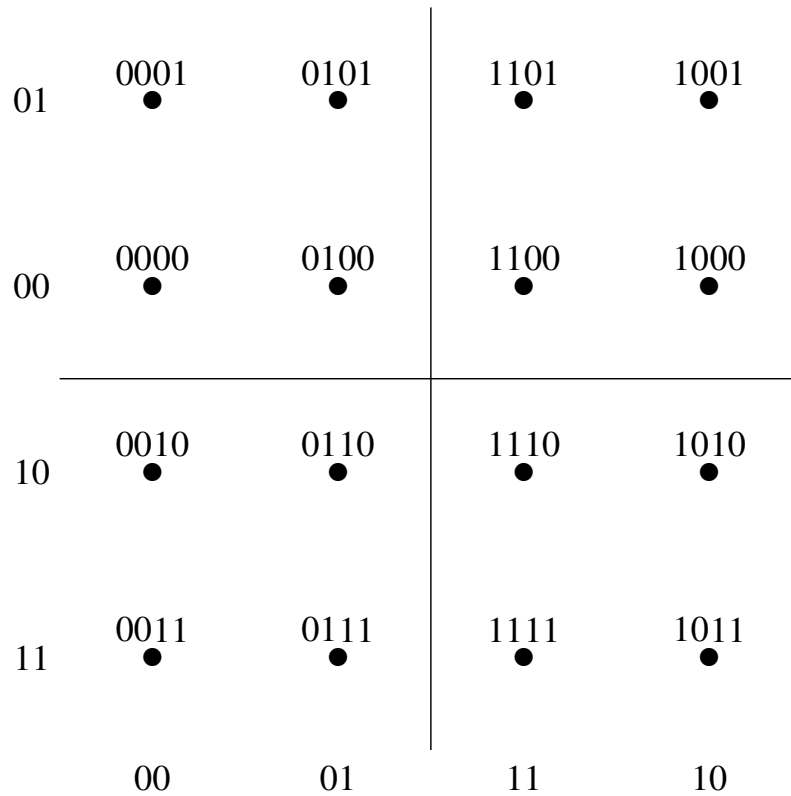


- ▶ Para relaciones señal a ruido altas

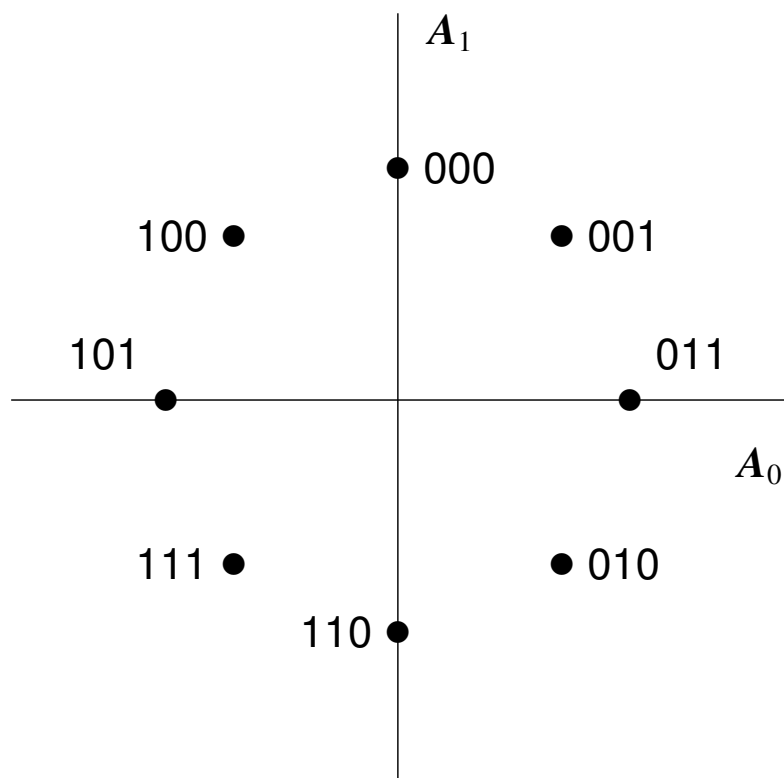
$$BER \approx \frac{1}{m} \cdot P_e$$

$m = \log_2(M)$: número de bits por símbolo

Codificación Gray QAM



Codificación Gray PSK

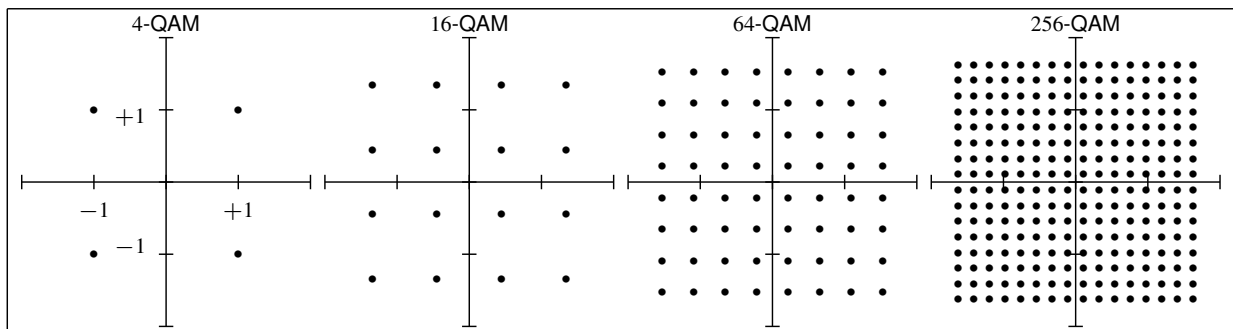


Densidad de las constelaciones

- Aumento del tamaño de la constelación (M símbolos):
 - ▶ Aumento en la tasa binaria
 - ★ Aumenta el número de bits por símbolo $m = \log_2 M$
 - ▶ Reducción de prestaciones para una E_s dada
 - ★ Reducción de la distancia entre puntos de la constelación

Ejemplo para constelaciones M -QAM

M (símbolos)	m (bits/símbolo)	E_s con niveles normalizados ($d_{min} = 2$)	d_{min} con $E_s = 2$
4	2	2	2
16	4	10	0,8944
64	8	42	0,4364
256	16	170	0,2169



P_e o BER en función de E_s/N_0 (o de E_b/N_0)

- Las prestaciones se representan a menudo como una función de la relación E_s/N_0 o de la relación E_b/N_0
 - ▶ E_b : Energía media por bit de información

$$E_b = \frac{E_s}{m}$$

- Términos habituales en las probabilidades de error se suelen escribir como

$$Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) \text{ ó } Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- En cualquier caso se pueden escribir como

$$Q\left(v \cdot \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right), \text{ donde } Q\left(\underbrace{\frac{d_{min}}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}}}_{v} \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \text{ ó } Q\left(\underbrace{\frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{E_s}}}_{v} \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- ▶ En este caso v es un entero, que depende de la constelación

Ejemplos - Constelaciones binarias equiprobables

- En este caso, para cualquier dimensión N

$$P_e = BER = Q\left(\frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Se compararán dos casos

- ▶ Caso (a): Constelación binaria simétrica ($N = 1$)

$$\mathbf{a}_0 = +A, \mathbf{a}_1 = -A$$

- ▶ Caso (b): Constelación ortogonal ($N = 2$)

$$\mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

- Cálculo de distancias y energías

- ▶ Caso (a): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = 2 \cdot A$

- ▶ Caso (b): $E_s = A^2, d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1) = \sqrt{2} \cdot A$

- Cálculo de la constante ν

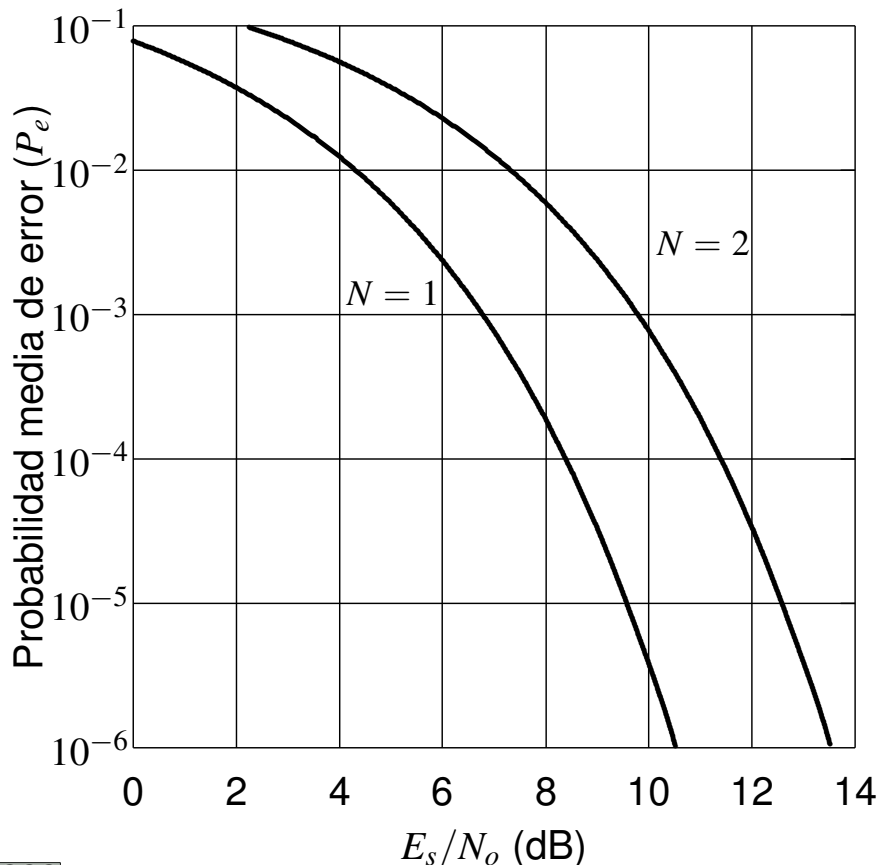
- ▶ Caso (a):

$$\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = \sqrt{2} \rightarrow P_e = BER = Q\left(\sqrt{2\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

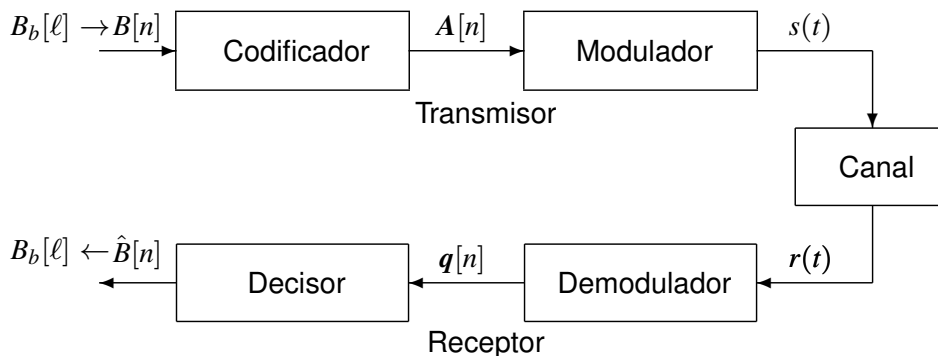
- ▶ Caso (b):

$$\nu = \frac{d(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1)}{\sqrt{2}\sqrt{E_s}} = 1 \rightarrow P_e = BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Ejemplos - Gráfica de P_e en función de E_s/N_0 (en dB)



Transmisión digital - Tasas de transmisión



- Codificador: constelación de M símbolos
 - ▶ $m = \log_2 M$ bits/símbolo
- Transmisión de 1 símbolo (m bits) cada T segundos
- Relación entre tasa de bit y tasa de símbolo
 - ▶ Tasa de símbolo

$$R_s = \frac{1}{T} \text{ símbolos/s (baudios)}$$

- ▶ Tasa de bit

$$R_b = m \times R_s \text{ bits/s}$$

$$\text{Tiempo de bit: } T_b = \frac{T}{m} \text{ segundos}$$

Generación de señales

- Codificador: constelación de M símbolos (dimensión N)
 - ▶ Asignación binaria de m bits por símbolo
 - ★ Codificación de Gray
- Modulador: base ortonormal de dimensión N
 - ▶ Asociación de una señal (de T segundos) a cada símbolo

$$s_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} \times \phi_j(t)$$

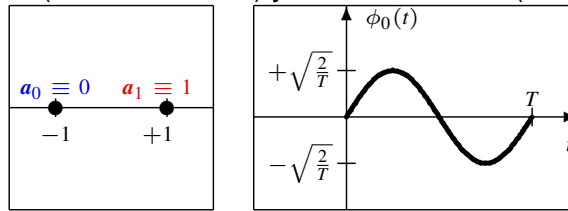
- Generación de la señal por bloques de tamaño T segundos (intervalos de símbolo)
 - ▶ Si $A[n] = a_k$ entonces $s(t) = s_k(t - nT)$ en $nT \leq (n+1)T$
 - ★ En el intervalo de símbolo asociado a $A[n]$ ($nT \leq (n+1)T$) se pone la forma de onda asociada al símbolo correspondiente
 - ▶ Expresión analítica de la señal completa

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \times \phi_j(t - nT)$$

$A_j[n]$: coordenada de índice j del símbolo $A[n]$

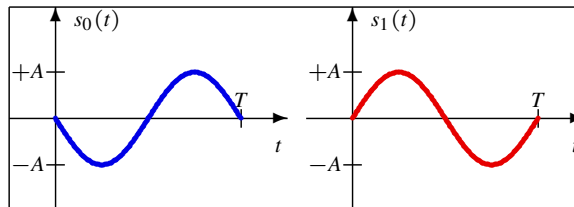
Generación de señales - Ejemplo A

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



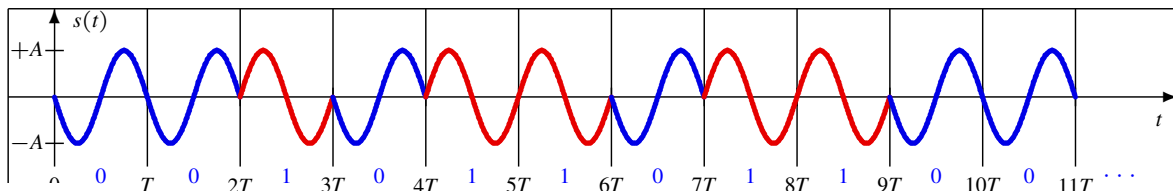
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t), s_1(t) = +1 \times \phi_0(t)$$



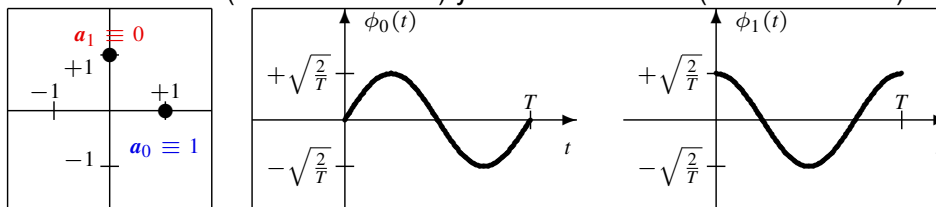
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00101101100 \dots$$



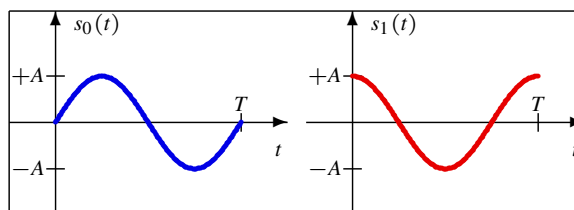
Generación de señales - Ejemplo B

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



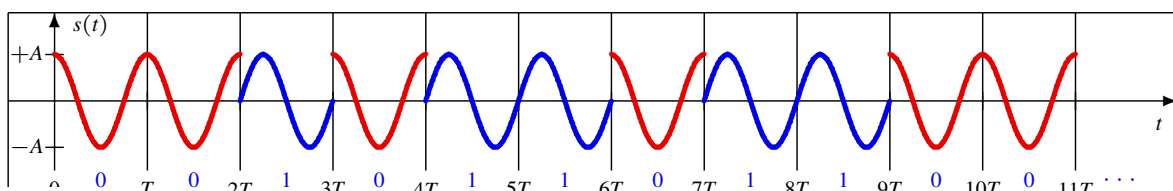
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = +1 \times \phi_0(t) + 0 \times \phi_1(t), s_1(t) = 0 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



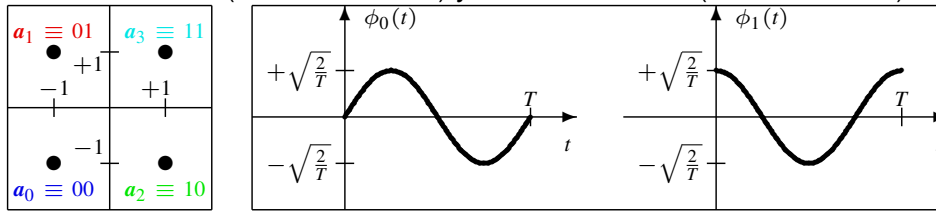
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00101101100 \dots$$



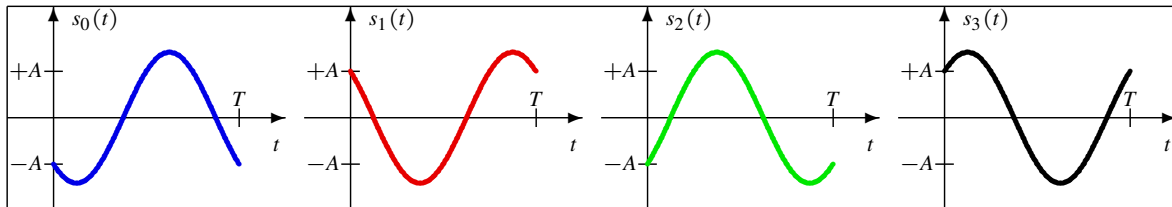
Generación de señales - Ejemplo C

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



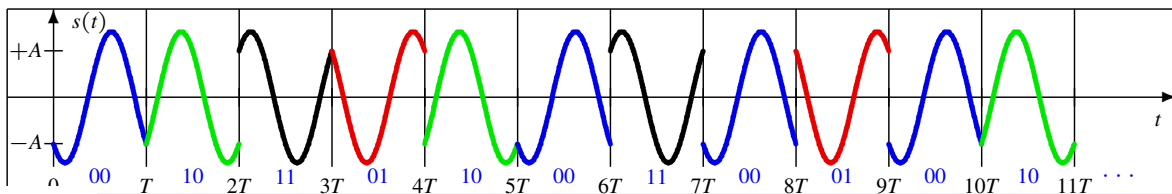
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



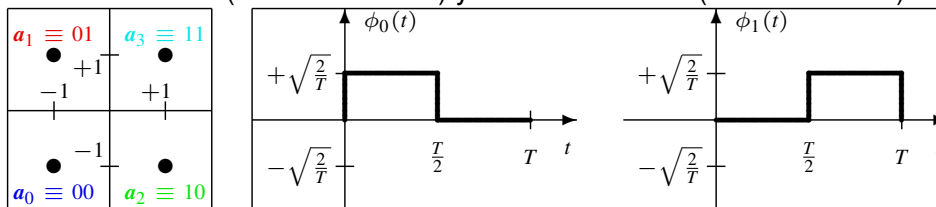
Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \dots$$



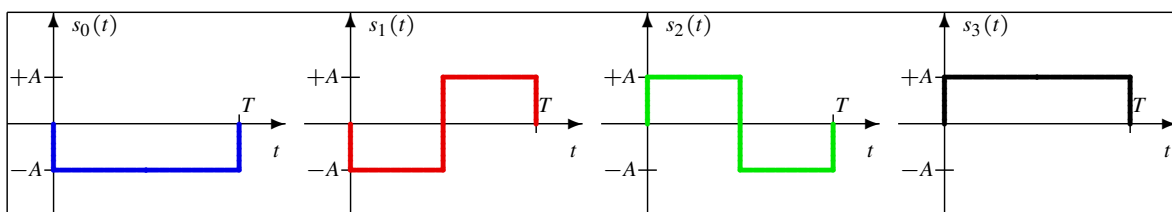
Generación de señales - Ejemplo D

Constelación (CODIFICADOR) y base ortonormal (MODULADOR)



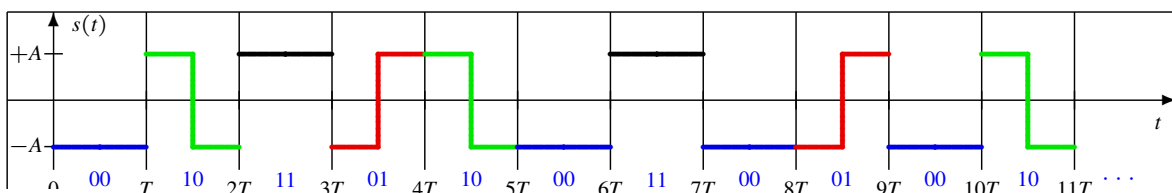
Señales asociadas a cada uno de los símbolos

$$s_0(t) = -1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_1(t) = -1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t), s_2(t) = +1 \times \phi_0(t) - 1 \times \phi_1(t), s_3(t) = +1 \times \phi_0(t) + 1 \times \phi_1(t)$$



Señal modulada para la siguiente secuencia binaria

$$B_b[\ell] = 00\ 10\ 11\ 01\ 10\ 00\ 11\ 00\ 01\ 00\ 10\ \dots$$



Elección del modulador

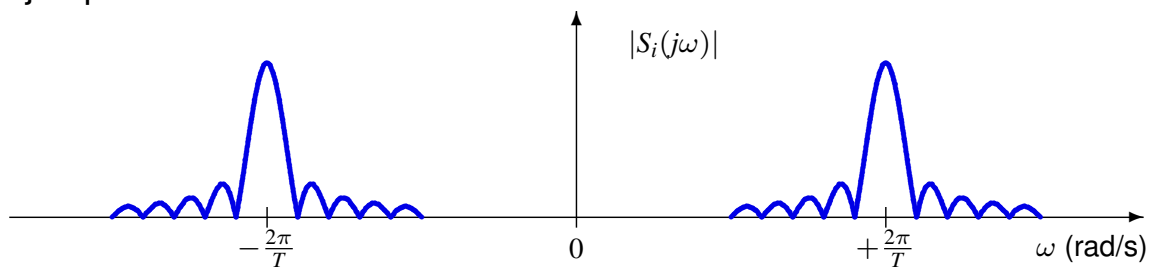
- Se ha visto que un mismo codificador se puede combinar con múltiples moduladores (conjuntos de N funciones formando una base ortonormal)
- Un codificador (constelación+asignación binaria) determina
 - ▶ Energía de las señales a transmitir
 - ▶ Prestaciones
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de símbolo P_e
 - ★ Probabilidad (tasa) de error de bit BER
- Elección del modulador
 - ▶ **Adecuación al canal de transmisión**
 - ★ Adecuación perfecta:

$$\phi_i(t) * h(t) = \phi_i(t) \Leftrightarrow \Phi_i(j\omega) \times H(j\omega) = \Phi_i(j\omega)$$

- ★ Difícil de conseguir de forma exacta en la práctica
- ★ Búsqueda de señales cuya respuesta en frecuencia esté en la banda de paso del canal de transmisión
 - Distinción entre canales en banda base y paso banda

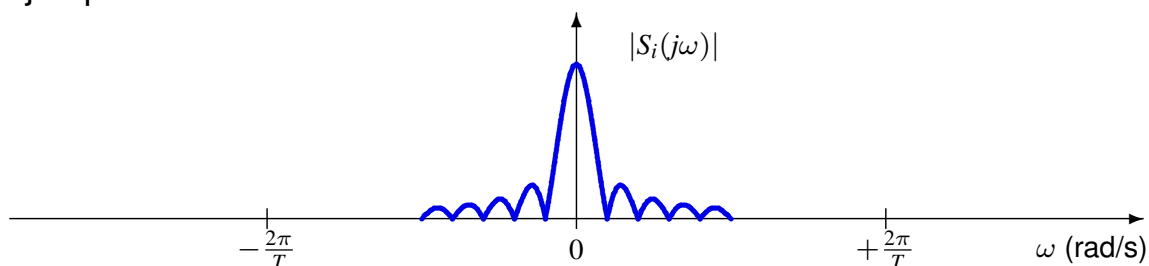
Respuesta en frecuencia de las señales

- Depende de la respuesta en frecuencia de los elementos de la base
- Ejemplo C



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en torno a la frecuencia $\frac{2\pi}{T}$ radianes/s

- Ejemplo D



- ▶ Señales apropiadas para transmisión en canales con “buena respuesta” en bajas frecuencias



Teoría de la Comunicación
Grado en Ingeniería en Tecnologías de Telecomunicación

CAPÍTULO 5

LÍMITES FUNDAMENTALES EN LOS SISTEMAS DE COMUNICACIONES DIGITALES

Marcelino Lázaro

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Carlos III de Madrid

Creative Commons License



369 / 418

Índice de contenidos

- Modelado de fuentes de información
- Modelos probabilísticos de canal
- Medidas cuantitativas de información
- Capacidad de canal
 - ▶ Capacidad de un canal digital
 - ▶ Capacidad de un canal gaussiano
- Límites en un sistema digital de comunicaciones

Definición de un sistema de comunicaciones

- Finalidad de un sistema de comunicaciones:

- ▶ Transmisión de información



- Cuantificación de la información

- ▶ Medidas cuantitativas de información
- ▶ Análisis de un sistema de comunicaciones
 - ★ Cantidad de información generada
 - ★ Límites fundamentales en la transmisión de información

- Organización del capítulo:

- ▶ Modelos (probabilísticos) para las fuentes de información
- ▶ Modelos (probabilísticos) del sistema (de canal)
- ▶ Medidas cuantitativas de información
- ▶ Límites fundamentales en los sistemas de comunicación

Modelado de fuentes de información

- Salida de la fuente: flujo de información

- ▶ En tiempo continuo: señal $x(t)$
- ▶ En tiempo discreto: señal $x[n]$

- Modelo de la salida de la fuente (información)

- ▶ Proceso aleatorio, $X(t)$, ó $X[n]$

- Modelo para fuentes en tiempo continuo (analógicas)

- ▶ Proceso aleatorio en tiempo continuo $X(t)$
 - ★ Caracterización: densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$
 - Normalmente son procesos limitados en banda
 - Refleja el comportamiento espectral medio de la fuente

- Modelo para fuente en tiempo discreto

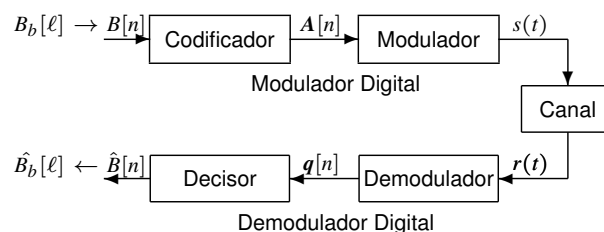
- ▶ Proceso aleatorio en tiempo discreto $X[n]$
- ▶ Tipos de alfabeto de la fuente
 - ★ Continuo (e.g., señales muestreadas)
 - ★ Discreto (fuentes digitales)
 - Modelo más simple: fente discreta sin memoria

Fuente discreta sin memoria

DMS : *Discrete Memoryless Source*

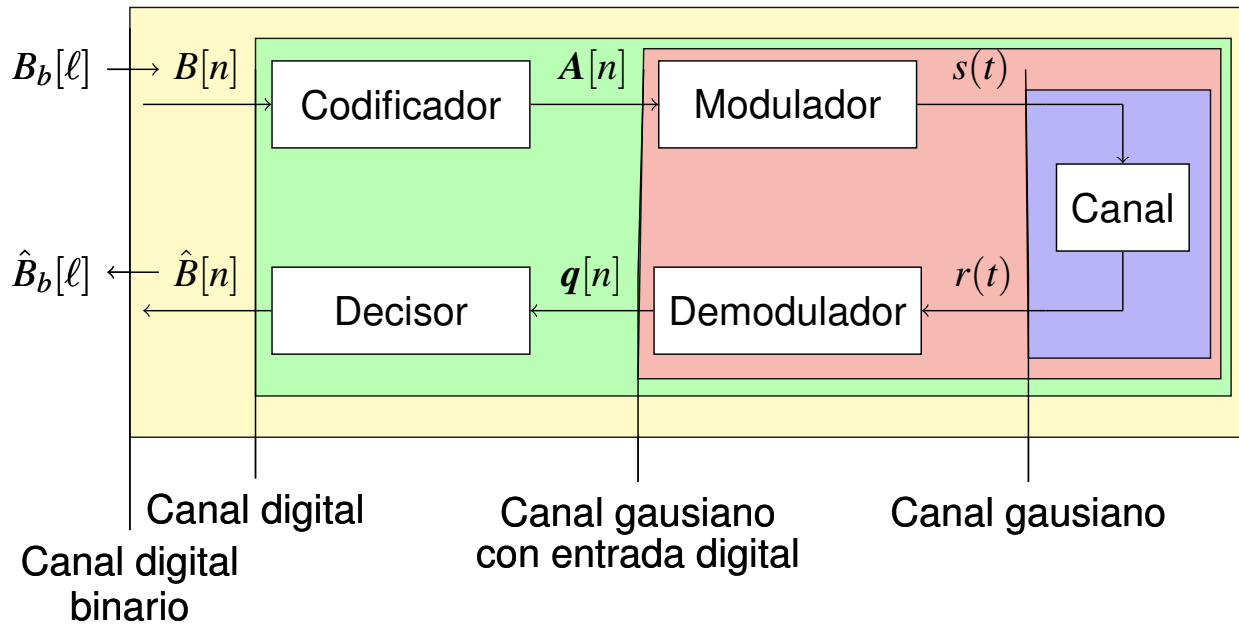
- Proceso aleatorio en tiempo discreto $X[n]$
 - ▶ Alfabeto discreto de M_X valores
 - ▶ Sin memoria: $\{X[n]\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)
- Descripción del proceso (caracterización estadística)
 - ▶ Variable aleatoria X (al ser $X[n]$ i.i.d., la estadística es la misma para todo n)
 - ★ Alfabeto $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M_X-1}\}$
 - ★ Probabilidades $p_X(x_i) = P(X = x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, M_X - 1$
- Ejemplo: fuente binaria simétrica
BSS: *Binary Symmetric Source*
 - ▶ Alfabeto $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1\}$, típicamente $x_0 = 0, x_1 = 1$
 - ▶ Probabilidades $p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1}{2}$

Modelos probabilísticos de canal



- Modelos probabilísticos de canal
 - ▶ Establecen la relación probabilística entre la información recibida y la transmitida en distintos puntos de este modelo general del sistema de comunicaciones
 - ★ Distintos niveles de abstracción en la definición de canal
 - ★ Modelo probabilístico: Entrada X , salida Y , distribución $f_{Y|X}(y|x)$
- Modelos definidos
 - ▶ Canal gaussiano
 - ★ Representa el canal físico: $Y \equiv r(t) \mid X \equiv s(t)$
 - ▶ Canal gaussiano con entrada digital
 - ★ Representa el canal discreto equivalente: $Y \equiv q[n] \mid X \equiv A[n]$
 - ▶ Canal digital
 - ★ Representa la transmisión de símbolos: $Y \equiv \hat{B}[n] \mid X \equiv B[n]$ (ó $\hat{A}[n] \mid A[n]$)
 - ▶ Canal digital binario
 - ★ Representa la transmisión de bits: $Y \equiv \hat{B}_b[l] \mid X \equiv B_b[l]$

Modelos probabilísticos de canal - Representación

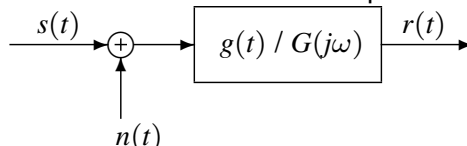


Canal gaussiano

- Relación entrada / salida
 - ▶ Entrada: $X \equiv s(t)$, para un instante dado t
 - ▶ Salida: $Y \equiv r(t)$, para el mismo instante dado t
- Modelo canal gaussiano

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- ▶ $n(t)$: proceso aleatorio blanco y gaussiano con $S_n(j\omega) = \frac{N_0}{2}$, $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(\tau)$
- Limitación de la potencia de ruido - Filtrado a la entrada del receptor
 - ▶ Señal de ancho de banda B Hz ($W = 2\pi B$ rad/s)
 - ★ Filtro $g(t)$ ideal de ancho de banda B Hz: potencia de ruido $N_0 \cdot B$



- Distribución de los valores de la señal $r(t)$ dada la señal $s(t)$ en un cierto instante t (distribución $Y|X$ cuando $Y \equiv r(t)$ y $X \equiv s(t)$)
 - ▶ Distribución de Y cuando $X = x = s(t)$
 - ▶ Gaussiana, de media $s(t)$ en el instante dado y varianza $\sigma^2 = N_0 \cdot B$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Canal gaussiano con entrada digital

- Es el equivalente al canal discreto equivalente
- Relación entrada / salida
 - ▶ Entrada: $X \equiv A[n]$, para un instante dado n
 - ★ Vector de N variables aleatorias discretas
 - ★ Si $A[n] = a_i \rightarrow X = x_i$
 - ▶ Salida: $Y \equiv q[n]$, para el mismo instante dado n
 - ★ Vector de N variables aleatorias continuas
- Modelo del canal gaussiano con entrada digital

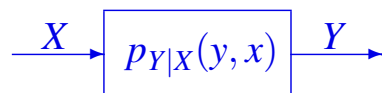
$$q = A + z$$

- ▶ Distribución de los N elementos del vector de ruido
 - ★ V.A.'s Independientes, gaussianas, media nula, varianza $N_0/2$
- Distribución de la salida dada la entrada
 - ▶ Gaussiana de media el símbolo transmitido ($x_i \equiv a_i$)

$$f_{q|A}(q|a_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|q-a_i\|^2}{N_0}} \rightarrow f_{Y|X}(y|x_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|y-x_i\|^2}{N_0}}$$

Canal digital

- Relación entrada / salida
 - ▶ Entrada: $X \equiv B[n]$, para un instante dado n
 - ▶ Salida: $Y \equiv \hat{B}[n]$, para el mismo instante dado n
 - ★ Alfabeto de X e Y
 - M elementos del alfabeto de $B[n]: \{x_i = y_i \equiv b_i\}_{i=0}^{M-1}$
- Modelo probabilístico: canal discreto sin memoria
DMC: *Discrete Memoryless Channel*



- ▶ Definición estadística del canal discreto sin memoria
 - 1 Alfabeto de entrada

$$\mathcal{A}_X = \{x_i\}, i = 0, \dots, M_X - 1$$

- 2 Alfabeto de salida

$$\mathcal{A}_Y = \{y_j\}, j = 0, \dots, M_Y - 1$$

- 3 Conjunto de probabilidades condicionales (de transición)

$$p_{Y|X}(y_j|x_i), \forall i, j$$

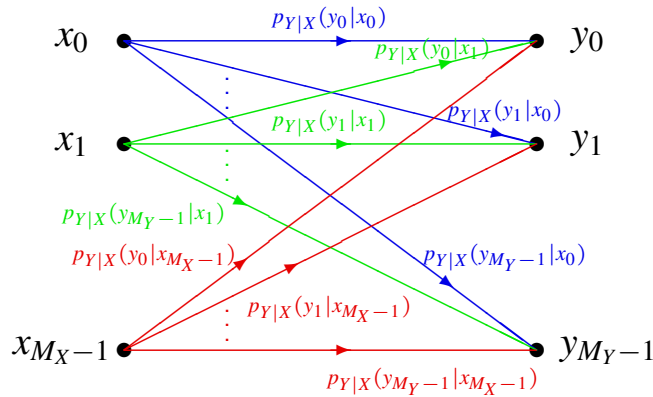
Representación de las probabilidades de transición

- Matriz de canal

$$P = \begin{bmatrix} p_{Y|X}(y_0|x_0) & p_{Y|X}(y_1|x_0) & \cdots & p_{Y|X}(y_{M_Y-1}|x_0) \\ p_{Y|X}(y_0|x_1) & p_{Y|X}(y_1|x_1) & \cdots & p_{Y|X}(y_{M_Y-1}|x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{Y|X}(y_0|x_{M_X-1}) & p_{Y|X}(y_1|x_{M_X-1}) & \cdots & p_{Y|X}(y_{M_Y-1}|x_{M_X-1}) \end{bmatrix}$$

- ▶ Elementos de una fila suman 1

- Diagrama de flechas



- ▶ Flechas que salen de un mismo nodo suman 1



Aplicación del DMC al canal digital

- Alfabetos de X e Y

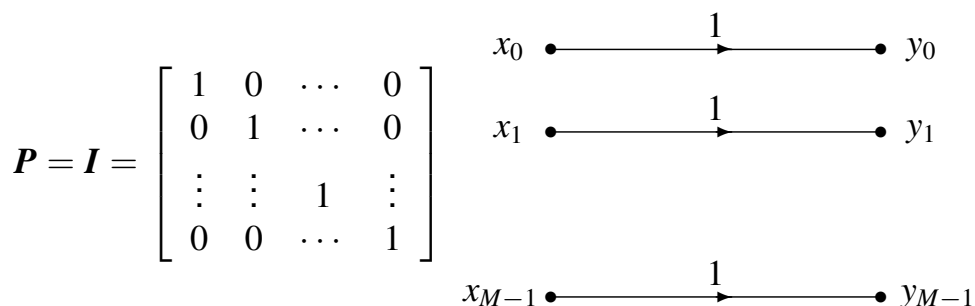
- ▶ M símbolos del alfabeto de $B[n]$, $\{b_0, b_1, \dots, b_{M-1}\}$

$$x_i \equiv b_i, y_j \equiv b_j, M_X = M_Y = M, i, j \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

- Probabilidades de transición

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) \equiv p_{\hat{B}|B}(b_j|b_i) = p_{\hat{A}|A}(a_j|a_i)$$

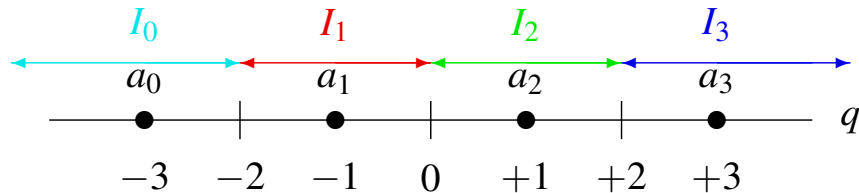
- ▶ Valores ideales: matriz de transición / diagrama de flechas



Cálculo de las probabilidades de transición - Ejemplo

- $M = 4$, símbolos equiprobables $p_A(a_i) = \frac{1}{4}$
 - ▶ Constelación: $a_0 = -3$, $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, $a_3 = +3$
 - ▶ Regiones de decisión: umbrales $q_{u1} = -2$, $q_{u2} = 0$, $q_{u3} = +2$

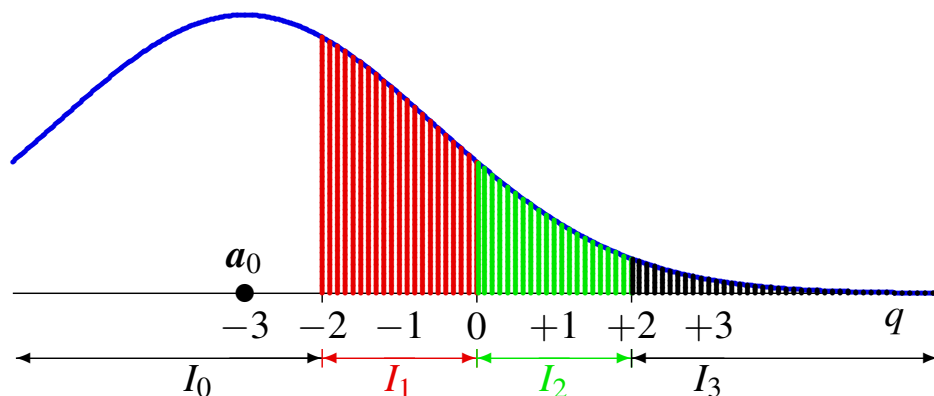
$$I_0 = (-\infty, -2], I_1 = (-2, 0], I_2 = (0, +2], I_3 = (+2, +\infty)$$



- Probabilidades de transición (matriz de canal)

$$P = \begin{bmatrix} 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \end{bmatrix}$$

Elementos de la primera fila: $p_{Y|X}(y_j|x_0), \forall j$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_0)$: gaussiana de media a_0 y varianza $N_0/2$

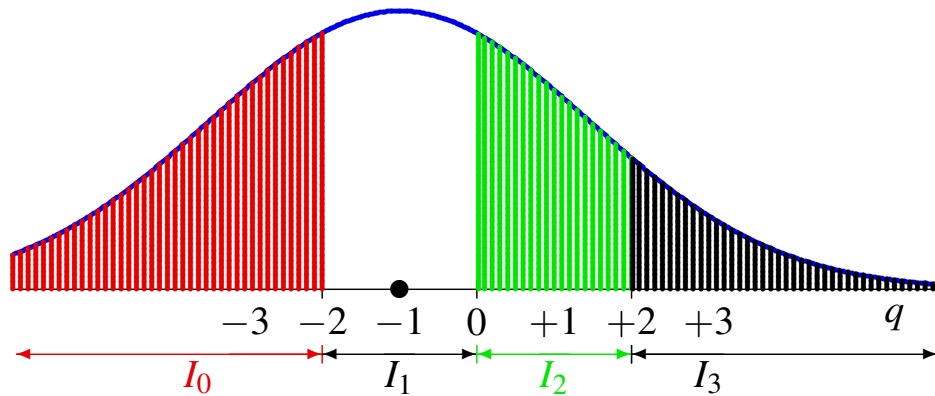
$$p_{Y|X}(y_0|x_0) = 1 - P_{e|a_0} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_1|x_0) = P_{e|a_0 \rightarrow a_1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_2|x_0) = P_{e|a_0 \rightarrow a_2} = Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_3|x_0) = P_{e|a_0 \rightarrow a_3} = Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Elementos de la segunda fila: $p_{Y|X}(y_j|x_1), \forall j$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_1)$: gaussiana de media a_1 y varianza $N_0/2$

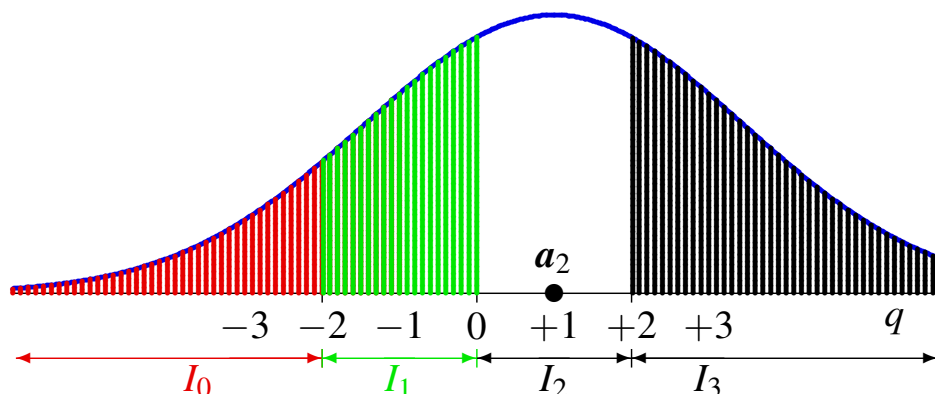
$$p_{Y|X}(y_0|x_1) = P_{e|a_1 \rightarrow a_0} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_1|x_1) = 1 - P_{e|a_1} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_2|x_1) = P_{e|a_1 \rightarrow a_2} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_3|x_1) = P_{e|a_1 \rightarrow a_3} = Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Elementos de la tercera fila: $p_{Y|X}(y_j|x_2), \forall j$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_2)$: gaussiana de media a_2 y varianza $N_0/2$

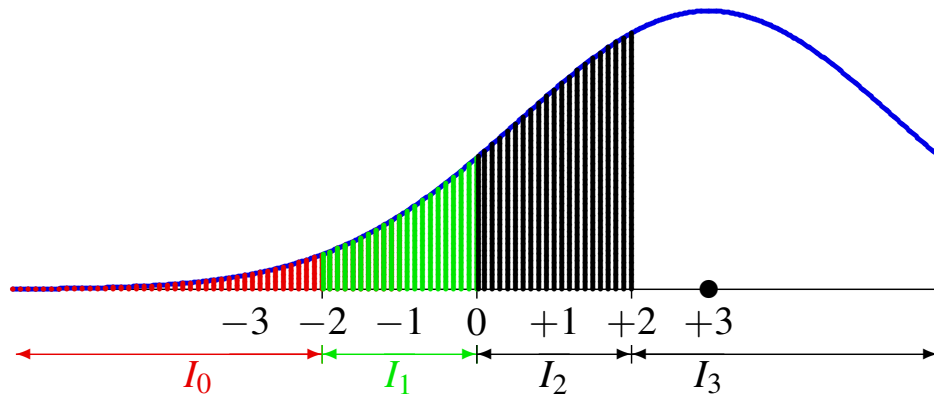
$$p_{Y|X}(y_0|x_2) = P_{e|a_2 \rightarrow a_0} = Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_1|x_2) = P_{e|a_2 \rightarrow a_1} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_2|x_2) = 1 - P_{e|a_2} = 1 - 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_3|x_2) = P_{e|a_2 \rightarrow a_3} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Elementos de la cuarta fila: $p_{Y|X}(y_j|x_3), \forall j$



- Distribución $f_{q|A}(q|a_3)$: gaussiana de media a_3 y varianza $N_0/2$

$$p_{Y|X}(y_0|x_3) = P_{e|a_3 \rightarrow a_0} = Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

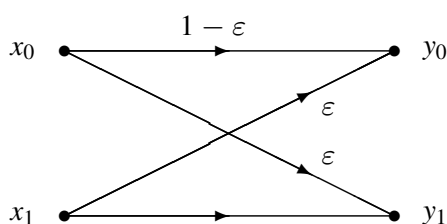
$$p_{Y|X}(y_1|x_3) = P_{e|a_3 \rightarrow a_1} = Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_2|x_3) = P_{e|a_3 \rightarrow a_2} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

$$p_{Y|X}(y_3|x_3) = 1 - P_{e|a_3} = 1 - Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Canal digital binario

- Relación entrada / salida
 - ▶ Entrada: $X \equiv B_b[\ell]$, para un instante dado ℓ
 - ▶ Salida: $Y \equiv \hat{B}_b[\ell]$, para el mismo instante dado n
 - ★ Alfabeto de X e Y : Bits $x_0 = y_0 \equiv 0, x_1 = y_1 \equiv 1$
- Modelo probabilístico
 - ▶ Particularización del DMC para $M = 2$
 - ▶ Probabilidades condicionales $p_{Y|X}(y_j|x_i)$
 - ★ Probabilidades de acierto de bit ($j = i$)
 - ★ Probabilidades de error de bit ($j \neq i$)
 - ▶ Habitualmente, se asume que la probabilidad de error de bit es igual para los dos bits (0, 1)
 - ★ Canal binario simétrico (BSC: *Binary Symmetric Channel*)
 - ★ Probabilidad de error de bit (BER): $BER = \varepsilon$



$$P = \begin{bmatrix} p_{Y|X}(y_0|x_0) & p_{Y|X}(y_1|x_0) \\ p_{Y|X}(y_0|x_1) & p_{Y|X}(y_1|x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 - \varepsilon \end{bmatrix}$$

MEDIDAS CUANTITATIVAS

DE

INFORMACIÓN

Autoinformación

- Medida de la información contenida en un suceso aislado de una variable aleatoria discreta ($X = x_i$)
- Requerimientos para esta medida

- 1 $I_X(x_i)$ depende de la probabilidad del suceso

$$I_X(x_i) = f(p_X(x_i))$$

- 2 Debe ser una función decreciente de la probabilidad

$$p_X(x_i) > p_X(x_j) \rightarrow I_X(x_i) < I_X(x_j)$$

- 3 Debe ser una función continua de la probabilidad

★ Sucesos con probabilidades similares tienen una información similar

- 4 Para sucesos independientes $X = x_i, Y = y_j$ ($p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$)

$$I_{X,Y}(x_i, y_j) = I_X(x_i) + I_Y(y_j)$$

- Función que cumple estas propiedades - Autoinformación

$$I_X(x_i) = -\log_b(p_X(x_i))$$

- ▶ La base del logaritmo define las unidades de la medida

★ Base 2 : bits

★ Base e (logaritmo natural o neperiano \ln): nats

NOTA: Relación $\log_b(x) = \ln(x) / \ln(b)$

Entropía

- Medida de la incertidumbre contenida en una variable aleatoria (discreta)

- ▶ Promedio de la autoinformación de cada suceso

- ★ Alfabeto: $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, \dots, x_{M_X-1}\}$
- ★ Probabilidades: $\{p_X(x_0), p_X(x_1), \dots, p_X(x_{M_X-1})\}$

$$H(X) = - \sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) \cdot \log p_X(x_i) = \sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) \cdot \log \left(\frac{1}{p_X(x_i)} \right)$$

NOTA: Por convención: $0 \times \log 0 = 0$

- ▶ Unidades: bits/símbolo ó nats/símbolo

- Valores límite de la entropía de variables aleatorias discretas

1 $H(X) \geq 0$

Ya que $0 \leq p_X(x_i) \leq 1$ y, consecuentemente, $\log(1/p_X(x_i)) \geq 0$

- ★ $H(X) = 0$ cuando no hay incertidumbre en X

$$p_X(x_i) = 1, p_X(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i$$

2 $H(X) \leq \log(M_X)$

La igualdad se produce únicamente si los símbolos son

equiprobables, $p_X(x_i) = \frac{1}{M_X}$

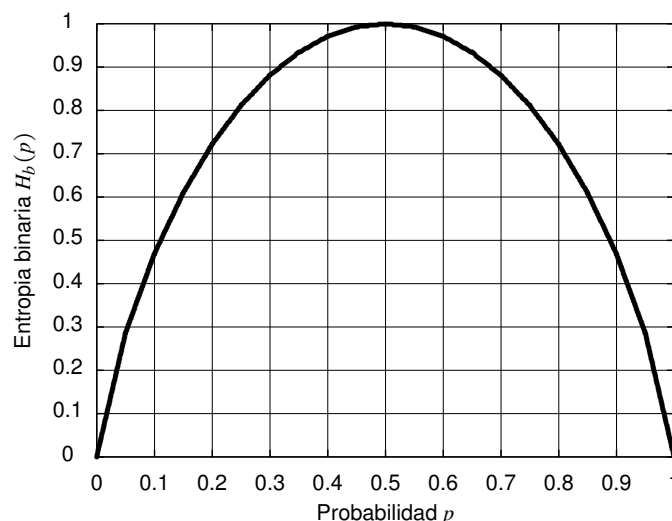
- ★ Máxima situación de incertidumbre

Ejemplo - Entropía binaria

- Variable aleatoria binaria

- ▶ Alfabeto: $\{x_0, x_1\}$
- ▶ Probabilidades: $\{p_X(x_0) = p, p_X(x_1) = 1 - p\}$

$$\begin{aligned} H(X) &= -p \cdot \log(p) - (1-p) \cdot \log(1-p) \\ &= p \cdot \log \left(\frac{1}{p} \right) + (1-p) \cdot \log \left(\frac{1}{1-p} \right) \equiv H_b(p) \end{aligned}$$



Entropía conjunta

- Medida de la información conjunta de dos (o más) variables aleatorias

$$H(X, Y) = \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \left(\frac{1}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \right)$$

- Variables aleatorias independientes

- ▶ Probabilidad conjunta: $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$
- ▶ Entropía conjunta

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)} \\ &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) \cdot \log \frac{1}{p_Y(y_j)} \\ &= \sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_Y(y_j) \cdot \log \frac{1}{p_Y(y_j)} \\ &= H(X) + H(Y) \end{aligned}$$

Entropía condicional

- Mide la incertidumbre en una variable aleatoria cuando se conoce el valor de la otra
 - ▶ Promedio de $H(X|Y = y_j)$ para cada valor del alfabeto de Y

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_Y(y_j) \cdot H(X|Y = y_j) \\ &= \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_Y(y_j) \sum_{i=0}^{M_X-1} p_{X|Y}(x_i|y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{X|Y}(x_i|y_j)} \\ &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{X|Y}(x_i|y_j)} \end{aligned}$$

- ▶ Para variables aleatorias independientes

$$H(X|Y) = H(X)$$

Relación entre entropía conjunta y condicional

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{X,Y}(x_i, y_j)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i) \cdot p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{Y|X}(y_j|x_i)} \\
 &= H(X) + H(Y|X)
 \end{aligned}$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

Información mutua

- Mide la información que aporta una variable aleatoria X sobre el conocimiento de otra variable aleatoria Y

$$I(X, Y) = \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)}$$

• Propiedades

- 1 $I(X, Y) = I(Y, X) \geq 0$
La igualdad se cumple en el caso de que X e Y sean independientes
- 2 $I(X, Y) \leq \min(H(X), H(Y))$
- 3 Se puede definir información mutua condicional

$$I(X, Y|Z) = \sum_{i=0}^{M_Z-1} p_Z(z_i) \cdot I(X, Y|Z = z_i)$$

$$I(X, Y|Z) = H(X|Z) - H(X|Y, Z)$$

- 4 La regla de la cadena para la información mutua es

$$I((X, Y), Z) = I(X, Z) + I(Y, Z|X)$$

$$I((X_1, X_2, \dots, X_N), Y) = I(X_1, Y) + I(X_2, Y|X_1) + \dots + I(X_N, Y|X_1, \dots, X_{N-1})$$

- 5 A partir de la definición de información mutua se obtiene la definición de entropía

$$I(X, X) = H(X)$$

Relaciones información mutua y entropía

$$\begin{aligned}
 I(X, Y) &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{p_{X,Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{p_{X|Y}(x_i, y_j)}{p_X(x_i)} \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} + \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log(p_{X|Y}(x_i, y_j)) \\
 &= \sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) \cdot \log \frac{1}{p_X(x_i)} - \sum_{i=0}^{M_X-1} \sum_{j=0}^{M_Y-1} p_{X,Y}(x_i, y_j) \cdot \log \frac{1}{p_{X|Y}(x_i, y_j)} = H(X) - H(X|Y)
 \end{aligned}$$

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

Relaciones información mutua y entropía (II)

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

- Representación en un diagrama de Venn
 - ▶ Entropías e información mutua representadas por áreas

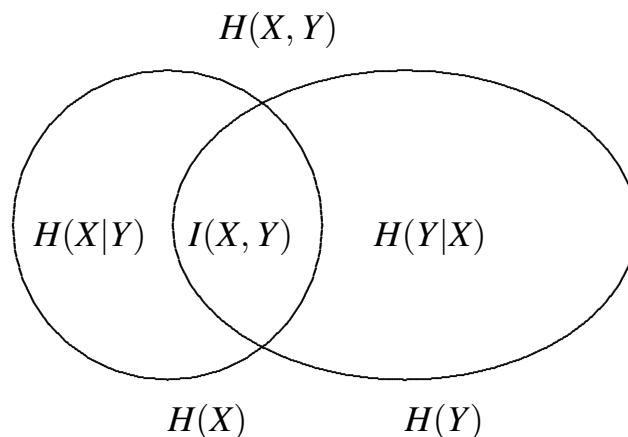
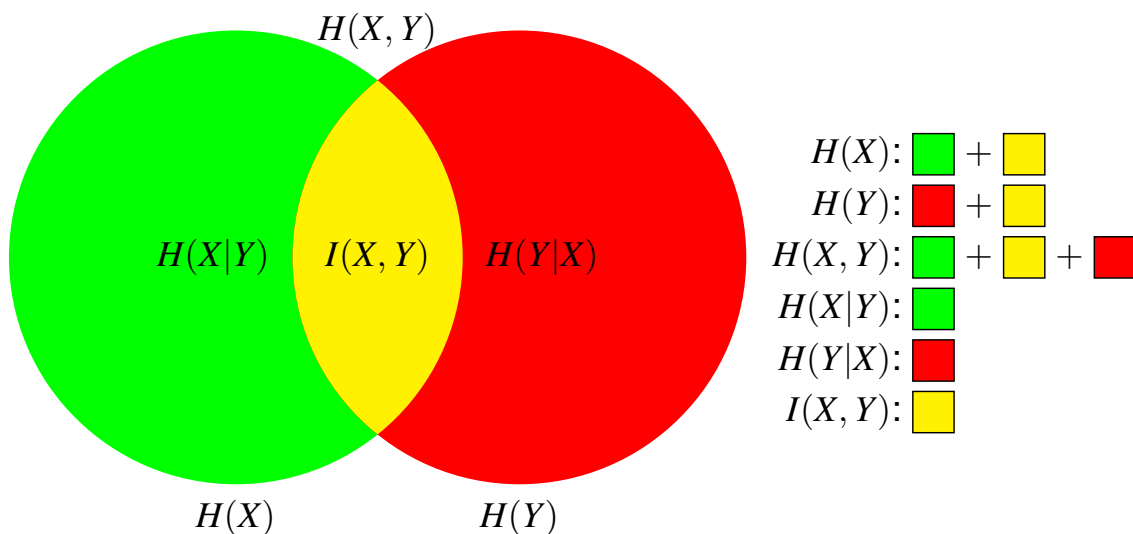


Diagrama de Venn - Entropías e información mutua



Entropía diferencial

- Extensión de las definiciones de entropía a variables aleatorias continuas

$$h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \log \frac{1}{f_X(x)} dx$$

Definición de *entropía diferencial conjunta*

$$h(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log \frac{1}{f_{X,Y}(x, y)} dx dy$$

Lo mismo se hace para la *entropía diferencial condicional*

$$h(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \log \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy$$

A menudo se utiliza la definición alternativa pero equivalente

$$h(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \log \frac{1}{f_{X|Y}(x|y)} dx dy$$

Entropía diferencia e información mutua - Relaciones

- Definición de la información mutua

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \cdot \log \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x) \cdot f_Y(y)} dx dy$$

- Se mantienen las mismas relaciones que para variables discretas

$$h(X, Y) = h(X) + h(Y|X) = h(Y) + h(X|Y)$$

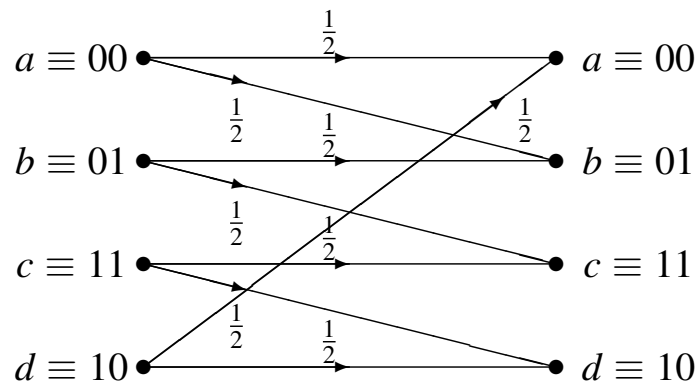
$$I(X, Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X) - h(X|Y) = h(X) + h(Y) - h(X, Y)$$

LÍMITES FUNDAMENTALES

EN

SISTEMAS DE COMUNICACIONES

Transmisión fiable sobre canales no fiables - Ejemplo



- 4 símbolos ≡ 2 bits de información por uso del canal
- El canal no es fiable - Se comenten errores
 - ▶ Probabilidad de error de símbolo es $P_e = 1/2$
 - ▶ Con asignación binaria de Gray $BER = 1/4$
 - ▶ Los errores se producen porque dada una salida no es posible identificar de forma unívoca el símbolo transmitido
 - ★ Por ejemplo: si se observa a , esto puede ser porque
 - Se ha transmitido a (sin error)
 - Se ha transmitido d (con error)

Transmisión fiable sobre canales no fiables - Ejemplo (II)

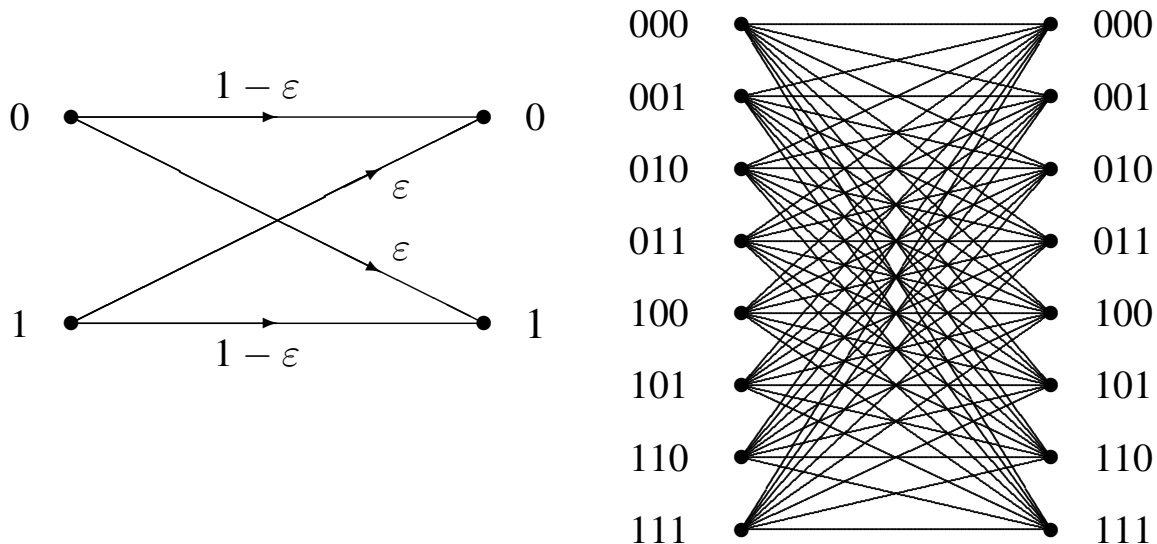
- Opción para transmitir información de forma fiable
 - ▶ Transmitir un subconjunto de los símbolos
 - ★ Símbolos que generen salidas “sin solapamiento”
 - ▶ Ejemplo: transmitir sólo a y c
 - ★ a puede dar como salidas a o b
 - ★ c puede dar como salidas c o d

Dada una salida no hay incertidumbre en el símbolo transmitido !!!

- Es posible transmitir información sobre este canal con probabilidad de error nula
 - ▶ Coste de la transmisión fiable
 - ★ Por cada uso del canal se transmite menos información
 - En este caso: 2 símbolos ≡ 1 bit por uso del canal
- Los canales habituales no permiten esto de forma directa
 - ▶ Alternativa: forzar un comportamiento similar - **Codificación**
 - ★ No se busca probabilidad de error nula (sin solapamientos)
 - ★ Se busca poder reducir la probabilidad de error de forma arbitraria
 - Solapamientos con probabilidad arbitrariamente baja

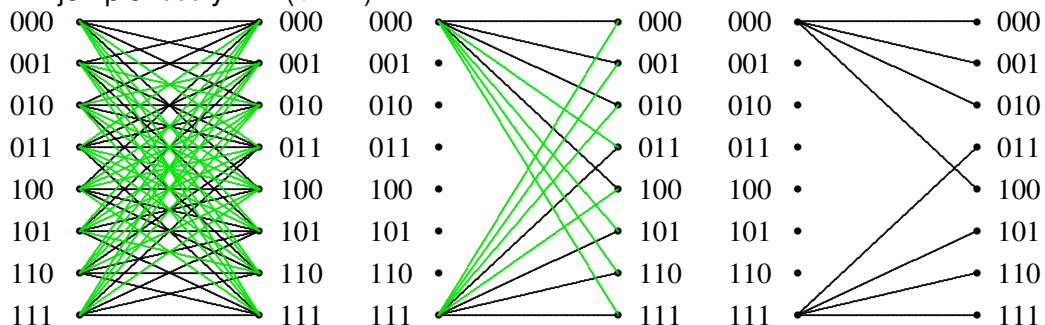
Codificación

- Se utiliza el canal n veces de forma conjunta
 - ▶ Definición de símbolos extendidos: grupo de n símbolos
- Se busca un subconjunto de símbolos (2^k) que produzcan “*bajo solapamiento*” en la salida
 - ▶ Se transportan k bits de información por cada n usos del canal
- Ejemplo: canal binario simétrico ($BER = \varepsilon$) con $n = 3$



Codificación (II)

- Situaciones más probables (para ε razonablemente bajo)
 - ▶ 0 errores o 1 error sobre 3 bits - 4 ramas/símbolo (en negro)
- Situaciones menos probables
 - ▶ 2 errores o 3 errores sobre 3 bits - 4 ramas/símbolo (en verde)
- Subconjunto de 2^k ($k < n$) elementos con “*bajo solapamiento*”
 - ▶ Ejemplo: 000 y 111 ($k = 1$)



- Despreciando los enlaces de “*baja probabilidad*” no hay solapamiento
 - ▶ Probabilidad de error: $P_e = 3 \times [\varepsilon^2 \cdot (1 - \varepsilon)] + \varepsilon^3$
 - ★ Ejemplo A: $\varepsilon = 0,1 \rightarrow P_e = 0,028$ | Ejemplo B: $\varepsilon = 0,01 \rightarrow P_e = 0,000298$
 - ▶ Información transmitida: 1 bit (k) de información por cada 3 (n) usos del canal
 - ★ Tasa $R = k/n = 1/3$
- Intuición: aumentando n y k (con k/n constante) se puede reducir más

- ▶ Existe un límite: Capacidad de canal

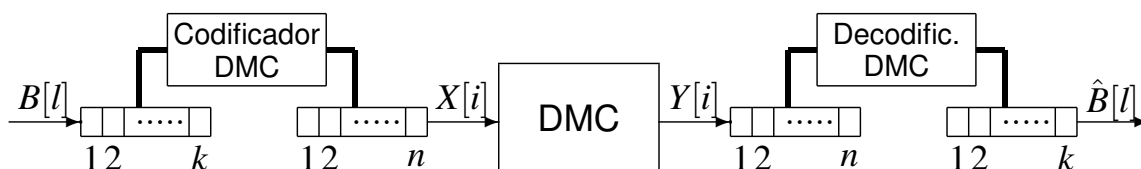
Codificación de canal para protección frente a errores

- Introducción de redundancia estructurada para reducir la probabilidad de error
 - ▶ Bloques de k símbolos de información (conjunto de índices) se transforman en bloques de n bits (palabras del código)
 - ★ Diccionario del código

Ejemplo de diccionario del código para dos códigos binarios

Conjunto de índices	Palabras código	Conjunto de índices	Palabras código
0	000	00	00000
1	111	01	10101
		10	01110
		11	11011

Código de ejemplo $C(1,3)$ Código de ejemplo $C(2,5)$

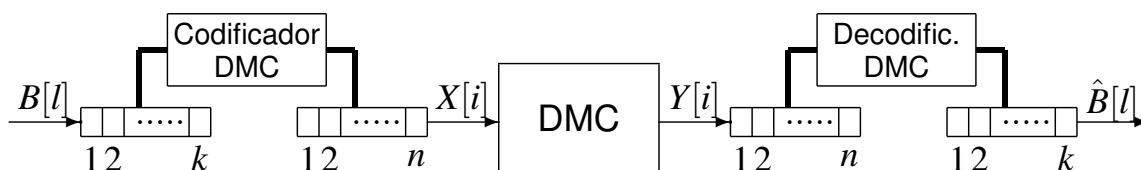


Teorema de codificación de canal

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X, Y)$$

Teorema de codificación de canal (Shannon 1948):

- 1 Si la tasa de transmisión R es menor que C , entonces para cualquier $\delta > 0$ existe un código con una longitud de bloque n suficientemente larga cuya probabilidad de error es menor que δ
- 2 Si $R > C$, la probabilidad de error de cualquier código con cualquier longitud de bloque está limitada por un valor no nulo
- 3 Existen códigos que permiten alcanzar la capacidad del canal $R = C$



$$\text{Tasa del código: } R = \frac{k}{n}$$

Capacidad de canal

- Máxima cantidad de información que se puede transmitir de forma fiable a través de un canal de comunicaciones en un sistema digital de comunicaciones
 - ▶ En la transmisión se produce una distorsión
 - ★ Potencial pérdida de información
 - ▶ Transmisión fiable - Definición
 - ★ Transmisión sin pérdida potencial de información
 - ★ En la práctica: capacidad para reducir la probabilidad de error tanto como sea necesario
 - ▶ Capacidad de canal
 - ★ Límite en el número de símbolos con solapamiento arbitrariamente bajo cuando el número de usos del canal tiende a infinito
 - ▶ Introducción al concepto de codificación de canal
 - ★ Mecanismo que permite una transmisión fiable
- Se estudiarán los siguientes casos:
 - ▶ Canal digital
 - ★ El canal digital binario se considera un caso particular
 - ▶ Canal gaussiano

Capacidad de canal a través de la información mutua

- Información mutua entre la entrada y la salida de un DMC

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y)$$

- Análisis para un BSC con $BER = \varepsilon$ en dos casos extremos
 - ▶ Caso óptimo: $\varepsilon = 0$
 - ★ $H(X|Y) = 0 \rightarrow I(X, Y) = H(X)$
 - ▶ Peor caso: $\varepsilon = 1/2$
 - ★ $H(X|Y) = H(X) \rightarrow I(X, Y) = 0 \rightarrow X$ e Y independientes
- Se pueden extraer las siguientes conclusiones

- 1 La información mutua entre entrada y salida del canal se puede ver como la cantidad de información que pasa de la entrada a la salida cuando el canal es utilizado. En el caso en que la probabilidad de error es nula, pasa toda la información ($I(X, Y) = H(X)$), y en el caso en que la entrada y la salida son estadísticamente independientes se “pierde” toda la información ($I(X, Y) = 0$).
- 2 $H(X|Y)$ puede interpretarse como la información que se “pierde” en el canal, y así la información que “atravesará” el canal, $I(X, Y)$, es igual a la información que hay a la entrada, $H(X)$, menos la que se pierde, $H(X|Y)$. Cuando la probabilidad de error es nula la pérdida es nula, y cuando la entrada y la salida son estadísticamente independientes, la pérdida es total, es decir, igual a la información a la entrada del canal.

Capacidad de canal para un canal digital

- Definición formal para un DMC

$$C = \max_{p_X(x_i)} I(X, Y)$$

Sus unidades son bits (o bits por uso de canal)

- ▶ La maximización es respecto de las probabilidades de los símbolos de entrada
 - ★ Hay que buscar las $p_X(x_i)$ que maximizan $I(X, Y)$

- Valores límite

- ▶ $C \geq 0$, ya que $I(X, Y) \geq 0$
- ▶ $C \leq \log M_X$, ya que $C = \max I(X, Y) \leq \max H(X) = \log M_X$
- ▶ $C \leq \log M_Y$, por la misma razón

Ejemplo - Canal binario simétrico

- Modelo para canal digital binario con $BER = \varepsilon$
- Cálculo de la información mutua entrada / salida

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - \sum_{i=0}^1 p_X(x_i) \cdot H(Y|X = x_i) \\ &= H(Y) - \sum_{i=0}^1 p_X(x_i) \cdot \left[- \sum_{j=0}^1 p_{Y|X}(y_j|x_i) \cdot \log p_{Y|X}(y_j|x_i) \right] \\ &= H(Y) - \sum_{i=0}^1 p_X(x_i) \cdot [-\varepsilon \cdot \log(\varepsilon) - (1 - \varepsilon) \cdot \log(1 - \varepsilon)] \\ &= H(Y) - \sum_{i=0}^1 p_X(x_i) \cdot H_b(\varepsilon) = H(Y) - H_b(\varepsilon) \end{aligned}$$

- Cálculo de la capacidad de canal
 - ▶ Se busca el máximo de la información mutua
 - ★ Para este canal, se obtiene cuando $H(Y)$ es máxima
 - ★ $H(Y)$ es máxima cuando los símbolos de salida son equiprobables
 - ★ Para este canal, ocurre cuando los símbolos de entrada son equiprobables

$$C = 1 - H_b(\varepsilon)$$

- ▶ Probabilidades de X que maximizan $I(X, Y)$: $p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1}{2}$

Capacidad: problema de maximización con restricciones

- El problema del cálculo de la capacidad de un canal digital se puede plantear como un problema de maximización de una función con restricciones
 - ▶ Función a maximizar
 - ★ Información mutua entre entrada y salida del canal $I(X, Y)$
 - ▶ Variables sobre las que se maximiza
 - ★ Probabilidades de los símbolos de entrada $\{p_X(x_i)\}_{i=0}^{M_X-1}$
 - ▶ Restricciones
 - ★ Valor de cada probabilidad

$$0 \leq p_X(x_i) \leq 1, \text{ para } i \in \{0, 1, \dots, M_X - 1\}$$

- ★ Suma de todas las probabilidades

$$\sum_{i=0}^{M_X-1} p_X(x_i) = 1$$

- En general encontrar una solución analítica puede ser difícil
 - ▶ Soluciones analíticas sólo para canales “*sencillos*”
 - ▶ Cálculo mediante métodos numéricos utilizando ordenadores

Límites para la transmisión en un canal digital

- Un canal digital tiene una capacidad C bits/uso
 - ▶ Si se utilizan códigos de canal, los códigos prácticos (aquellos que permiten reducir la probabilidad de error de forma arbitraria) deberán tener una tasa de codificación menor que dicha capacidad

$$R < C$$

- Limitación práctica en términos de velocidad de transmisión efectiva cuando se utiliza codificación para protección frente a errores
 - ▶ Sistema diseñado para transmitir a R_b bits/s

$$R_b^{\text{efectiva}} = R \times R_b \text{ bits de información/s}$$

- ★ Límite en la tasa de transmisión efectiva

$$R_b^{\text{efectiva}} < C \times R_b \text{ bits de información/s}$$

Capacidad de canal para el canal gaussiano

- Modelo de relación entrada salida en un canal gaussiano

$$Y = X + Z$$

Z es una variable aleatoria gaussiana, de media nula y varianza P_Z

- Capacidad de canal en las siguientes condiciones:
 - ▶ Potencia transmitida: P_X watt.
 - ▶ Ancho de banda: B Hz
 - ★ Potencia de ruido: $P_Z = N_0 B$ watt.

- Cálculo a través de la información mutua

$$C = \max_{f_X(x) \mid E[X^2] \leq P_X} I(X, Y)$$

Restricción $E[X^2] \leq P_X$ dada por la limitación en potencia

- Resultado

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{P_X}{N_0 B} \right) \text{ bits/s}$$

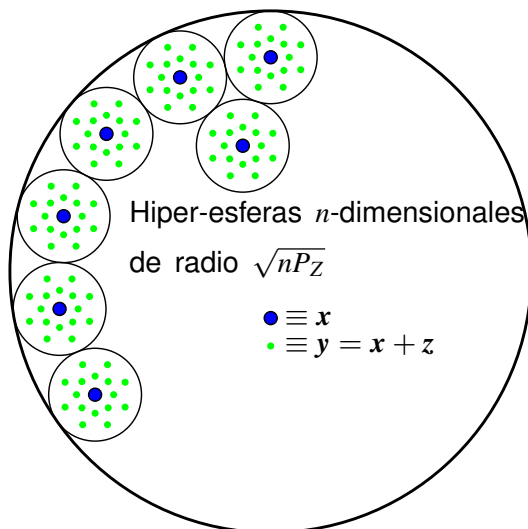
Se obtiene para $f_X(x)$ gaussiana

Capacidad de canal para canal gaussiano (II)

Capacidad sobre canal gaussiano en las siguientes condiciones:

- Potencia transmitida: P_X watt.
- Ancho de banda: B Hz
 - ▶ Potencia de ruido: $P_Z = N_0 B$ watt.

Capacidad obtenida a partir del número de secuencias sin solapamiento



Hiper-esfera n -dimensional de radio $\sqrt{n(P_X + P_Z)}$

$$M_{ss} = \left(1 + \frac{P_X}{P_Z} \right)^{n/2}$$

$$C = \frac{\log M_{ss}}{n} = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_X}{P_Z} \right)$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{P_X}{N_0 B} \right) \text{ bits/uso}$$

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{P_X}{N_0 B} \right) \text{ bits/s}$$

Evolución de la capacidad de canal

- Capacidad del canal gaussiano

$$C = B \cdot \log \left(1 + \frac{P_X}{N_0 B} \right) \text{ bits/s}$$

- Depende de dos parámetros
 - ▶ Potencia de la señal transmitida, P_X
 - ▶ Ancho de banda disponible en Hz, B
- Capacidad de canal en función de la potencia transmitida P_X

$$\lim_{P_X \rightarrow \infty} C = \infty$$

- ▶ Se puede aumentar C de forma arbitraria aumentando P_X
 - ▶ Aumento lineal de C requiere aumento exponencial de P_X
- Capacidad de canal en función del ancho de banda (B Hz)

$$\lim_{B \rightarrow \infty} C = \frac{P}{N_0} \log_2(e) = 1,44 \cdot \frac{P}{N_0}$$

- ▶ El incremento de B no permite un incremento arbitrario de C

Límites para la transmisión en un canal gaussiano

- Algunas definiciones
 - ▶ Tasa de transmisión binaria: R_b bits/s
 - ▶ Relación señal a ruido: $SNR = \frac{P_X}{P_Z} = \frac{P_X}{N_0 B}$
 - ▶ Tasa binaria (eficiencia) espectral: $\eta = \frac{R_b}{B}$ bits/s/Hz
 - ▶ Energía media por bit: $E_b = \frac{P_X}{R_b}$
 - ▶ Relación E_b/N_0 : $\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_X}{R_b N_0} = \frac{P_X}{N_0 B} \times \frac{B}{R_b} = \frac{SNR}{\eta}$
- Sistema de comunicaciones práctico

$$R_b < C \rightarrow R_b < B \cdot \log(1 + SNR) \text{ bits/s}$$

- ▶ Dividiendo por B en ambos lados y reordenando

$$\eta < \log(1 + SNR), \quad \eta < \log \left(1 + \eta \cdot \frac{E_b}{N_0} \right)$$

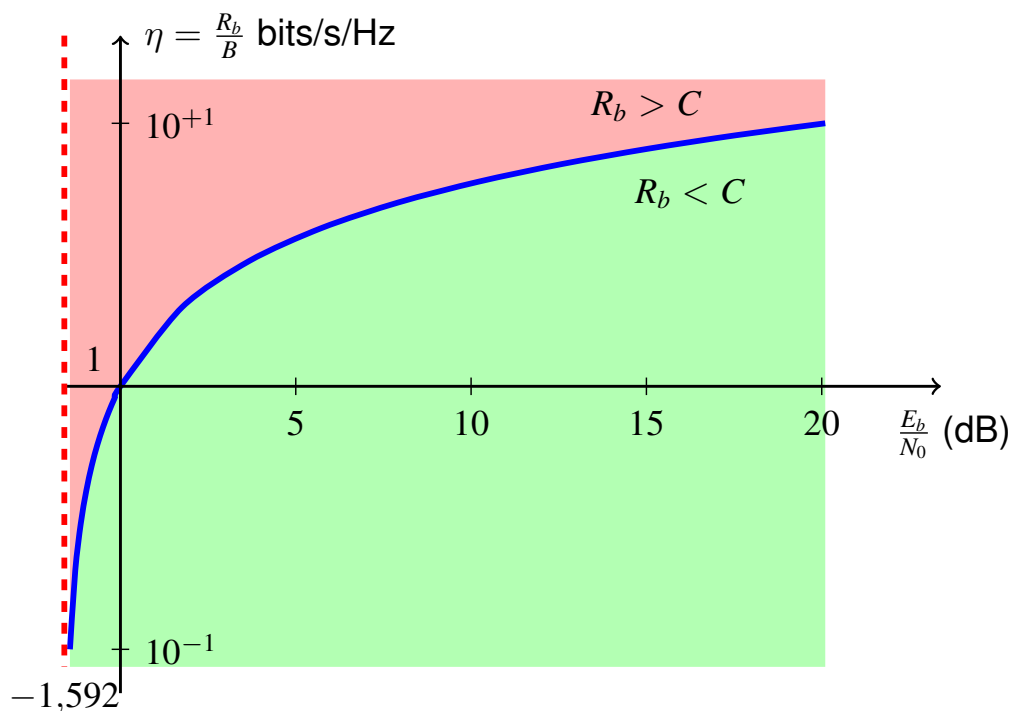
$$SNR > 2^\eta - 1, \quad \frac{E_b}{N_0} > \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

Cuando $\eta \rightarrow 0$

$$\frac{E_b}{N_0} = \ln 2 = 0,693 \approx -1,6 \text{ dB}$$

Tasa binaria espectral frente a E_b/N_0

- Se representa sobre el plano η vs $\frac{E_b}{N_0}$ la curva $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^\eta - 1}{\eta}$
 - ▶ Divide el plano en dos regiones: sistemas con $R_b > C$ (prácticos) y con $R_b < C$



Relación señal a ruido normalizada

- Cota inferior para SNR

$$SNR > 2^\eta - 1$$

- Definición de SNR normalizada

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^\eta - 1}$$

- Cota inferior sobre SNR_{norm}

$$SNR_{norm} > 1 \text{ (0 dB)}$$