2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.1 Se tiene una variable aleatoria X.

a) Si X es una variable aleatoria con una distribución uniforme en el intervalo $[-2, 2]$, calcule las probabilidades

   I) $P(X > 1)$
   II) $P(X > -1)$
   III) $P(X < -1)$
   IV) $P(-1 \leq X \leq 1)$

b) Repita el apartado anterior si X tiene una distribución gausiana de media 1 y varianza 4.

Ejercicio 2.2 Dos variables aleatorias, X e Y, tienen la función de distribución $F_X(x)$ y la función de probabilidad $f_Y(y)$, respectivamente, que se representan en la Figura 2.20.

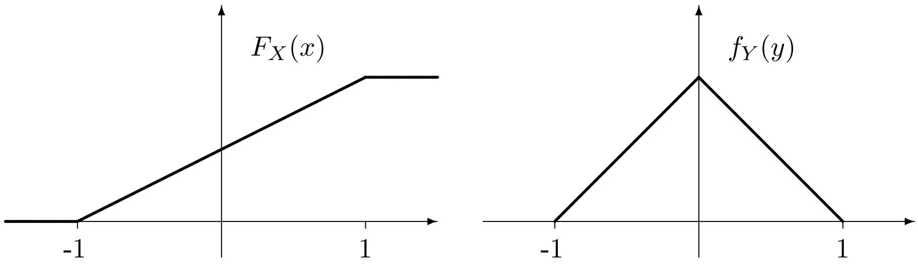

Figura 2.20: Función de distribución $F_X(x)$ y función de probabilidad $f_Y(y)$ del Ejercicio 2.2.

a) Escriba las expresiones analíticas de las funciones de distribución y de densidad de probabilidad para cada una de las variables aleatorias ($F_X(x)$,$f_X(x)$,$F_Y(y)$,$f_Y(y)$).

b) Calcule la varianza de las dos variables aleatorias.

c) Calcule las siguientes probabilidades sobre la variable aleatoria Y: $P(Y > 0)$, $P\left(Y > -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(Y < -\frac{1}{2}\right)$, $P\left(Y > \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 2.3 La variable aleatoria Θ se utiliza para modelar una fase aleatoria. Calcule la función densidad de probabilidad, la media y la varianza de la variable aleatoria

$$X = \tan(\Theta),$$

en los siguientes casos:

a) La variable aleatoria Θ está uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) La variable aleatoria Θ está uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Ejercicio 2.4 Un proceso aleatorio $X(t)$ se define como

$$X(t) = A + B \cdot t,$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes, la primera con una función de densidad de probabilidad $f_A(a)$ como la mostrada en la Figura 2.21, y la segunda con una función densidad de probabilidad uniforme en el intervalo $[-1, +1]$, i.e. $f_B(b) = \mathcal{U}(-1, +1)$.

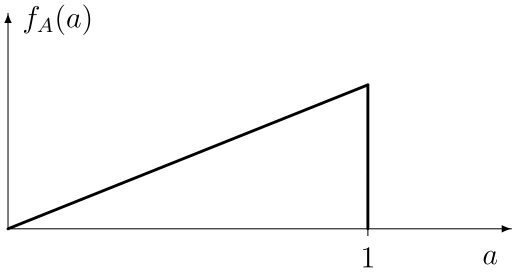

Figura 2.21: Función densidad de probabilidad de la variable aleatoria A.

a) Calcule la media, $m_X(t)$, del proceso $X(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación, $R_X(t+\tau,t)$, del proceso $X(t)$.

c) ¿Es este proceso estacionario en sentido amplio?

Ejercicio 2.5 Se describe un proceso $X(t)$ que para $t \geq 0$ tiene la propiedad de que para todo n y todo conjunto de n instantes de tiempo, $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, la función densidad de probabilidad conjunta de $\{X(t_i)\}_{i=1}^n$ es una probabilidad conjuntamente gaussiana de media nula y matriz de covarianza dada por

$$C_{i,j} = \mathrm{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = \sigma^2 \min(t_i, t_j)$$

¿Es este proceso estacionario en sentido amplio?

Ejercicio 2.6 Sea $X[n]$ un proceso aleatorio en tiempo discreto, estacionario, de media m_X, y función de autocorrelación $R_X[k]$. Considere el proceso

$$Y[n] = X[n] + a \cdot X[n-1],$$

donde a es una constante.

a) Calcule la media, $m_Y[n]$, del proceso $Y[n]$.

b) Calcule la función de autocorrelación, $R_Y[n+k,n]$, del proceso $Y[n]$.

c) Obtenga la densidad espectral de potencia, $S_Y(e^{j\omega})$, del proceso $Y[n]$.

Ejercicio 2.7 El proceso aleatorio $Z(t)$ se define como

$$Z(t) = X \cdot \cos(\omega_0 t) + Y \cdot \mathrm{sen}(\omega_0 t),$$

donde X e Y son variables aleatorias gaussianas independientes, de media cero y varianzas σ_X^2 y σ_Y^2.

a) Calcule la media $m_Z(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación $R_Z(t+\tau,t)$.

c) ¿Es $Z(t)$ estacionario o cicloestacionario?

d) Calcule la densidad espectral de potencia $S_Z(j\omega)$.

e) Repita las cuestiones anteriores para $\sigma_X = \sigma_Y$.

Ejercicio 2.8 El proceso aleatorio $Z(t)$ tiene la siguiente descripción analítica

$$Z(t) = X \cdot \cos(\omega_0 t) + Y \cdot \operatorname{sen}(\omega_0 t),$$

donde X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (-1,1), e Y es una variable aleatoria uniforme en el intervalo (0,1). Además, X e Y son independientes.

a) Calcule la media $m_Z(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación $R_Z(t+\tau, t)$.

c) ¿Es $Z(t)$ estacionario o cicloestacionario?

d) Calcule la densidad espectral de potencia $S_Z(j\omega)$.

Ejercicio 2.9 Las modulaciones digitales de modulación de pulsos en amplitud (PAM, del inglés *pulse amplitude modulation*), se modelan mediante un proceso aleatorio con la siguiente descripción analítica

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A[n] \cdot g(t - nT).$$

En esta expresión T es una constante que define el tiempo de símbolo, $g(t)$ es una señal determinista que define el pulso conformador del transmisor, con una transformada de Fourier $P(j\omega)$, y $A[n]$ es un proceso aleatorio en tiempo discreto que modela la secuencia de símbolos transmitidos. Este proceso es estacionario, y se conocen su media, y su función de autocorrelación (y por tanto, también su densidad espectral de potencia)

$$m_A = E[A[n]],\ R_A[k] = E\left[A[n+k] \cdot A[n]\right],\ S_A(e^{j\omega}) = \mathcal{TF}\{R_A[k]\}.$$

a) Calcule la media del proceso aleatorio $X(t)$, $m_X(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación del proceso aleatorio $X(t)$, $R_X(t+\tau, t)$.

c) Demuestre si el proceso es estacionario o cicloestacionario.

d) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio $X(t)$, $S_X(j\omega)$.

Ejercicio 2.10 El proceso de reconstrucción de una señal a partir de sus muestras definido en el Teorema de Nyquist para el muestreo se puede modelar a través del siguiente proceso aleatorio

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \cdot \operatorname{sinc}(2B(t - nT))$$

donde para el proceso que modela las muestras, $X[n]$, se va a asumir que cada una de las variables aleatorias que lo forman son variables aleatorias independientes de media zero y varianza σ_X^2. T y B son dos constantes que modelan en este caso el período de muestreo y el ancho de banda, respectivamente. Tenga en cuenta que la expresión analítica de este proceso es equivalente a la del Ejercicio 2.9, por lo que si lo ha resuelto puede utilizar los resultados obtenidos como ayuda para la resolución de este ejercicio.

a) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso que modela la señal reconstruida, $Y(t)$.

b) Para el caso de que $T = \frac{1}{2B}$, relación definida por el Teorema de Nyquist, calcule la potencia del proceso.

c) Sea ahora $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario con densidad espectral de potencia

$$S_X(j\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right),$$

donde $W = 2\pi B$ rad/s. La secuencia de muestras $X[n]$ se obtiene ahora muestreando el proceso $X(t)$, es decir, $X[n] = X(nT)$, siendo $T = \frac{1}{2B}$. Determine para este caso la densidad espectral de potencia y la potencia del proceso reconstruido $Y(t)$. ¿Cuál es la relación entre $X(t)$ e $Y(t)$?

Ejercicio 2.11 Calcule la media y autocorrelación del proceso

$$X(t) = A \cdot \cos(\omega t + \theta) \tag{2.1}$$

y determine si es estacionario o cicloestacionario (si es así, determine el periodo) en los siguientes casos:

a) A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas.

b) A es una variable aleatoria gausiana real de media igual a 1 y varianza unidad y ω y θ son constantes reales no nulas. reales no nulas.

c) ω es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y θ son constantes reales no nulas.

d) θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.

e) θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, \pi]$ y A y ω son constantes reales no nulas.

f) A es una variable aleatoria gausiana real de media nula y varianza unidad, ω y θ son variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi]$, y las tres estadísticamente independientes.

Ejercicio 2.12 El proceso aleatorio $Y(t)$ viene dado por

$$Y(t) = A_c \cdot \cos(\omega_c t) \cdot X(t),$$

donde A_c y ω_c son dos constantes que determinan la amplitud y frecuencia de la sinusoide, respectivamente, y $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario, de media nula, función de autocorrelación $R_X(\tau)$, densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$, y potencia P_X.

a) Calcule la media del proceso $Y(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación del proceso $Y(t)$.

c) Calcule la densidad espectral de potencia de $Y(t)$.

d) Calcule la potencia del proceso $Y(t)$.

Ejercicio 2.13 Una determinada modulación analógica que modula simultáneamente dos señales moduladoras se puede definir mediante el siguiente proceso aleatorio

$$S(t) = M_A(t) \cdot \cos(\omega_c t) + M_B(t) \cdot \operatorname{sen}(\omega_c t),$$

donde $M_A(t)$ y $M_B(t)$ son dos procesos aleatorios que modelan las dos señales moduladoras. Se supone que ambos son procesos aleatorios independientes, estacionarios, de media nula, e idénticas función de autocorrelación $R_{M_A}(\tau) = R_{M_B}(\tau) = R_M(\tau)$, densidad espectral de potencia $S_{M_A}(j\omega) = S_{M_B}(j\omega) = S_M(j\omega)$, y potencia $P_{M_A} = P_{M_B} = P_M$.

a) Calcule la media del proceso aleatorio $S(t)$, $m_S(t)$.

b) Calcule la función de autocorrelación del proceso $S(t)$, $R_S(t+\tau, t)$, y diga si el proceso es estacionario o cicloestacionario.

c) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso, $S_S(j\omega)$, y obtenga su potencia, P_S.

Ejercicio 2.14 Una señal de ruido que se modela como un proceso aleatorio estacionario, blanco, gausiano, de media nula y con densidad espectral de potencia $N_0/2$ pasa por un filtro paso bajo ideal con ancho de banda B Hz.

a) Calcule la función de autocorrelación del proceso de salida, $Y(t)$.

b) Asumiendo que $\tau = \frac{1}{2B}$, calcule la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $Y(t)$ e $Y(t+\tau)$. ¿Son estas variables aleatorias independientes? ¿Y para $\tau = \frac{1}{4B}$?

Ejercicio 2.15 $X(t)$ es un proceso estacionario con densidad espectral de potencia $S_X(j\omega)$. Este proceso atraviesa el sistema que se muestra en la Figura 2.22

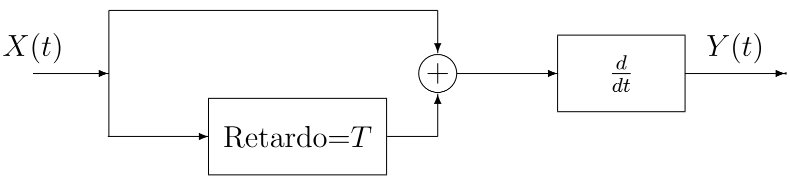

Figura 2.22: Sistema para el Problema 2.15.

a) ¿Es el proceso $Y(t)$ estacionario? Razone la respuesta.

b) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso $Y(t)$.

Ejercicio 2.16 La señal recibida en un sistema de comunicaciones se obtiene como la suma de dos componentes, uno de señal y otro de ruido

$$r(t) = s(t) + n(t).$$

La señal $s(t)$ se modela con un proceso aleatorio con una densidad espectral de potencia

$$S_s(j\omega) = \frac{P_0}{1 + (\omega/\omega_0)^2},$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ y f_0 es el ancho de banda a 3 dB (en Hz) de la señal. El término de ruido, $n(t)$ se modela con un proceso aleatorio blanco que tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2$ para todas las frecuencias. La señal recibida se filtra con un filtro paso bajo ideal con ancho de banda B Hz y ganancia unidad. Calcule y dibuje la relación señal a ruido que se tiene a la salida del filtro en función de la relación B/f_0. ¿Para qué ancho de banda del filtro, B, se obtiene la máxima relación señal a ruido?

Ejercicio 2.17 Calcule el ancho de banda equivalente de ruido de un filtro RC paso bajo, teniendo en cuenta que la respuesta en frecuencia de este tipo de filtros es

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

donde la constante de tiempo τ toma el valor $\tau = R \cdot C$.

Ejercicio 2.18 La señal de información que se recibe a la entrada de un receptor de comunicaciones se modela mediante un proceso aleatorio $X(t)$ cuya densidad espectral de potencia es

$$S_X(j\omega) = 10^{-18} \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2W_X}\right),$$

donde W_X es el ancho de banda de la señal en rad/s, que se puede escribir como $W = 2\pi B_X$, y B_X es el ancho de banda en Hz, que en este caso es de $B_X = 5$ MHz. Durante la transmisión, a la señal se le suma ruido blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, con $N_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ Watt/Hz. En el receptor, la señal recibida se filtra con un filtro con respuesta al impulso $h(t)$. Calcule la relación señal a ruido en dB que se tiene a la salida del filtro receptor, si este filtro es:

a) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = B_X = 5$ MHz.

b) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = 2B_X = 10$ MHz.

c) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = B_X/2 = 2,5$ MHz.

d) Un filtro RC paso bajo con constante de tiempo $\tau = R \cdot C = 3 \cdot 10^{-8}$.

Ejercicio 2.19 La señal de información que se recibe a la entrada de un receptor de comunicaciones se modela mediante un proceso aleatorio $X(t)$ cuya densidad espectral de potencia es

$$S_X(j\omega) = \begin{cases} 10^{-18} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{\omega}{2B_X}\right)\right], & \text{si } |\omega| \leq W_X = 2\pi B_X \\ 0, & \text{si } |\omega| > W_X = 2\pi B_X. \end{cases}$$

donde W_X es el ancho de banda de la señal en rad/s, que se puede escribir como $W_X = 2\pi B_X$, y B_X es el ancho de banda en Hz, que en este caso es de $B_X = 5$ MHz. Durante la transmisión, a la señal se le suma ruido térmico, siendo la temperatura $T = 290$ °K. En el receptor, la señal recibida se filtra con un filtro con respuesta al impulso $h(t)$. Calcule la relación señal a ruido en dB que se tiene a la salida del filtro receptor, cuando este filtro es:

a) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = B_X = 5$ MHz.

b) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = 2B_X = 10$ MHz.

c) Un filtro paso bajo ideal con ancho de banda $B = B_X/2 = 2{,}5$ MHz.

Ejercicio 2.20 Sea $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario, de media $m_X = 1$, y función de autocorrelación $R_X(\tau) = \cos(\omega_A \tau) + \cos(\omega_B \tau)$. A partir del mismo, se obtiene el proceso $Y(t)$ como

$$Y(t) = X(t) + a \cdot X(t-b),$$

donde a y b son dos valores enteros y constantes. Este proceso pasa por un sistema lineal e invariante con la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = 2 \cdot \Lambda\left(\frac{\omega}{W}\right) = \begin{cases} 2 \cdot \left(1 - \frac{|\omega|}{W}\right), & \text{si } |\omega| \leq W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases},$$

dando lugar al proceso $Z(t)$. Considere que $\omega_A = 4\pi$, $\omega_B = 10\pi$ y $W = 8\pi$.

a) Calcule la media, $m_Y(t)$, la función de autocorrelación, $R_Y(t+\tau, t)$, la densidad espectral de potencia, $S_Y(j\omega)$, y la potencia, P_Y, del proceso $Y(t)$, y diga si este proceso es o no estacionario y por qué.

b) Calcule la media, $m_Z(t)$, la función de autocorrelación, $R_Z(t+\tau, t)$, la densidad espectral de potencia, $S_Z(j\omega)$, y la potencia, P_Z, del proceso $Z(t)$, y diga si este proceso es o no estacionario y por qué, y si los procesos aleatorios $Y(t)$ y $Z(t)$ son conjuntamente estacionarios y por qué.

NOTA: Algunas constantes y relaciones trigonométricas de interés

Constante de Planck: $h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J·s, Constante de Boltzmann: $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/°K.

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b), \qquad \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b),$$

$$\operatorname{sen}(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a-b) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(a+b)$$

