2.7. Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 2.1 *Solución*

a) La probabilidad se calcula integrando la función densidad de probabilidad de X en el intervalo correspondiente, obteniéndose para la distribución uniforme

$$P(X>1)=\frac{1}{4},\ P(X>-1)=\frac{3}{4},\ P(X<-1)=\frac{1}{4},\ P(-1\leq X\leq 1)=\frac{1}{2}.$$

b) Para la distribución gausiana

$$P(X>1)=Q\left(0\right)=\frac{1}{2},\ P(X>-1)=1-Q(1)=0{,}8414,$$
$$P(X<-1)=Q(1)=0{,}1586,\ P(-1\leq X\leq 1)=1-Q(1)-Q(0)=0{,}3414.$$

Ejercicio 2.2 *Solución*

a) Las expresiones analíticas son

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{x+1}{2}, & -1\leq x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2},\qquad -1\leq x\leq 1.$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ y+1, & -1\leq y\leq 0\\ 1-y, & 0\leq y\leq 1\\ 0, & y>1\end{cases}.$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \left[\frac{u^2}{2}+u\right]_{-1}^{y}=\frac{y^2}{2}+y-\frac{1}{2}, & -1\leq y\leq 0\\ \int_{-1}^{0}f_Y(y)+\left[u-\frac{u^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}+y-\frac{y^2}{2}, & 0\leq y\leq 1\\ 1, & y>1\end{cases}.$$

b) Las varianzas resultantes son

$$\sigma_X^2=\frac{1}{3},\ \sigma_Y^2=\frac{1}{6}.$$

c) Las probabilidades requeridas valen

$$P(Y>0)=\frac{1}{2},\ P\left(Y>-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8},\ P\left(Y<-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8},\ P\left(Y>-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{32}$$

Ejercicio 2.3 *Solución*

a) La función de densidad de probabilidad de la nueva variable aleatoria es

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty \leq x \leq \infty.$$

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\left(x - \text{atan}(x)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

b) En este caso

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{2x}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^2 f_X(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{2x^2}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\left(x - \text{atan}(x)\right)\Big|_{-1}^{1} = 0{,}2732.$$

Ejercicio 2.4 *Solución*

a) $m_X(t) = \frac{2}{3}$

b) $R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{2} + \frac{t_1 \cdot t_2}{3}$

c) Este proceso no es un proceso estacionario en sentido ámplio. Pese a que la media no depende del tiempo t, la función de autocorrelación $R_X(t_1,t_2)$ depende explícitamente del valor de cada uno de los instantes t_1 y t_2 y no únicamente de su diferencia $\tau = t_1 - t_2$.

Ejercicio 2.5 *Solución*

La respuesta es NO. En primer lugar, porque la definición se limita a instantes temporales mayores que cero, con lo que la función densidad de probabilidad para instantes negativos va a cambiar y ya no se cumple la condición de estacionariedad.

En cualquier caso, aunque no existiera esta restricción, tampoco sería WSS.

$$\text{Cov}(X(t_1)X(t_2)) = E[X(t_1)X(t_2)] - m_X(t_1)m_X(t_2).$$

Teniendo en cuenta que la media es nula,

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \sigma^2 \text{mín}(t_i,t_j),$$

depende de los instantes precisos t_i y t_j y no de su diferencia $\tau = t_i - t_j$.

Ejercicio 2.6 *Solución*

a) $m_Y[n] = (1+a)\cdot m_X$

b) $R_Y(n+k,n) = (1+a^2)R_X[k] + aR_X[k+1] + aR_X[k-1]$

c) $S_Y(e^{j\omega}) = S_X(e^{j\omega})\left((1+a^2) + ae^{j\omega} + ae^{-j\omega}\right)$

Ejercicio 2.7 *Solución*

a) $m_Z(t) = 0$

b) La función de autocorrelación $R_X(t+\tau, t)$ vale

$$R_Z(t+\tau,t) = \frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}{2}\cos(\omega_0(2t+\tau)).$$

c) El proceso no es estacionario, pues la autocorrelación depende del valor concreto de t y no sólo de τ. Pero el proceso es cicloestacionario pues $R_Z(t+\tau+T_0, t+T_0) = R_Z(t+\tau, t)$ para $T_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$.

d) La densidad espectral de potencia vale

$$S_Z(j\omega) = TF\{\widetilde{R}_X(\tau)\} = \pi\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

e) En el caso $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ la media no cambia, sigue valiendo $m_Z(t) = 0$. En cambio, la función de autocorrelación vale ahora

$$R_Z(t+\tau,t) = \sigma^2\cos(\omega_0\tau) = R_Z(\tau).$$

Lo que significa que el proceso es estacionario en sentido amplio (WSS). Esto implica que la densidad espectral de potencia es

$$S_Z(j\omega) = TF\{R_Z(\tau)\} = \sigma^2\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

Ejercicio 2.8 *Solución*

a) $m_Z(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$

b) $R_X(t+\tau,t) = \frac{1}{3}\cos(\omega_0\tau)$

c) El proceso aleatorio no es estacionario, pero sí cicloestacionari, ya que aunque la función de autocorrelación sólo depende de τ, y no de t, la media sí depende de t, y además $m_Z(t+T_0) = m_Z(t)$ y $R_Z(t+\tau+T_0, t+T_0) = R_Z(t+\tau,t)$ para $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

d) $S_z(j\omega) = \frac{\pi}{3}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

Ejercicio 2.9 *Solución*

a) $m_X(t) == m_A\sum_n g(t-nT)$

b) $R_X(t+\tau,t) = \sum_n\sum_k R_A[n-k]g(t+\tau-nT)g(t-kT)$

c) El proceso aleatorio es cicloestacionario, ya que

$$m_X(t+T) = m_A\sum_n g(t+T-nT) = m_A\sum_n g(t-(n-1)T)$$
$$\stackrel{k=n-1}{=} m_A\sum_k g(t-kT) = m_X(t)$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t+\tau+T,t+T) &= \sum_n \sum_k R_A[n-k]g(t+\tau+T-nT)g(t+T-kT)\\
&= \sum_n \sum_k R_A[n-k]g(t+\tau-(n-1)T)g(t-(k-1)T)\\
&\stackrel{m=n-1,j=k-1}{=} \sum_m \sum_j R_A[m+1-(j+1)]g(t+\tau-mT)g(t-jT)\\
&= \sum_m \sum_j R_A[m-j]g(t+\tau-mT)g(t-jT) = R_X(t+\tau,t)
\end{aligned}
$$

d) $S_X(j\omega) = \frac{1}{T}\cdot|G(j\omega)|^2\cdot S_A(e^{j\omega T})$

Ejercicio 2.10 *Solución*

a) Definiendo $W = 2\pi B$

$$S_Y(j\omega) = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2W}\Pi\left(\frac{\omega}{4\pi W}\right)\right)^2$$

b) $P_Y = 1$

c) La densidad espectral de potencia es

$$S_Y(j\omega) = \frac{N_0}{2}\cdot\Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = S_X(j\omega)$$

y la potencia es

$$P_Y = P_X = N_0 W$$

El proceso $Y(t)$ es el proceso reconstruido a partir de las muestras tomadas sobre $X(t)$. Como la tasa de muestreo cumple el criterio de Nyquist para el muestreo, ambos procesos son iguales.

Ejercicio 2.11 *Solución*

a)

$$m_X(t) = 0$$

$$R_X(t+\tau,t) = \frac{\sigma^2}{2}\left(\cos(\omega(2t+\tau)+2\theta)+\cos(\omega\tau)\right)$$

El proceso no es estacionario puesto que la autocorrelación depende del origen de tiempos. Sin embargo, es cicloestacionario con período $T = \frac{\pi}{\omega}$.

b)

$$m_X(t) = \cos(\omega t+\theta)$$

$$R_X(t+\tau,t) = (\sigma^2+1)\cos(\omega(t+\tau)+\theta)\cos(\omega t+\theta)$$

El proceso es cicloestacionario con período $T = 2\pi\omega$. Tanto la media como la autocorrelación son periódicas con dicho período. No es estacionario en sentido amplio.

c)

$$m_X(t) = A\frac{\operatorname{sen}(2\pi t+\theta)-\operatorname{sen}(\theta)}{2\pi t}$$

$$R_X(t+\tau,t) = \frac{A^2}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi\tau+4\pi t+2\theta)-\operatorname{sen}(2\theta)}{2\pi(\tau+2t)}+\frac{\operatorname{sen}(2\pi\tau)}{2\pi\tau}\right)$$

No es estacionario ni cicloestacionario.

d)

$$m_X(t) = 0$$

$$R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

El proceso es estacionario.

e)

$$m_X(t) = -\frac{2A}{\pi}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

El proceso es cicloestacionario con período $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

f)

$$m_X(t) = 0$$

$$R_X(t+\tau, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{sen}(2\,\pi\,\tau)}{\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(2\tau)$$

El proceso es estacionario.

Ejercicio 2.12 *Solución*

a) $m_Y(t) = 0$.

b)

$$R_Y(t+\tau, t) = \frac{A_c^2}{2}R_X(\tau)\left[\cos(\omega_c\tau) + \cos(\omega_c(2t+\tau))\right].$$

c) $S_Y(j\omega) = \frac{A_c^2}{4}\left[S_X(j\omega - j\omega_c) + S_X(j\omega + j\omega)\right]$.

d) $P_Y = \frac{A_c^2}{2} \cdot P_X$.

Ejercicio 2.13 *Solución*

a) $m_S(t) = 0$

b) $R_S(t+\tau, t) = R_M(\tau)\cdot\cos(\omega_c\tau)$. Como la media es una constante, y la función de autocorrelación es una función que no depende del tiempo, sino de la diferencia entre instantes temporales τ, el proceso aleatorio $S(t)$ es un proceso estacionario (en sentido amplio).

c)

$$S_S(j\omega) = \frac{1}{2}\cdot S_M(j\omega - j\omega_c) + \frac{1}{2}\cdot S_M(j\omega + j\omega_c).$$

$$P_S = P_M.$$

Ejercicio 2.14 *Solución*

a) $R_Y(\tau) = N_0 B\mathrm{sinc}(2B\tau)$.

b) La función densidad de probabilidad conjunta es una distribución conjuntamente gausiana, definida por el vector de medias $\boldsymbol{\mu} = [0, 0]$ y por la matriz de covarianza

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} N_0 B & 0 \\ 0 & N_0 B \end{bmatrix},$$

Las variables son independientes, al ser nula su covarianza y ser conjuntamente gausianas.

Para $\tau = \frac{1}{4B}$, la función densidad de probabilidad conjunta está ahora definida por el vector de medias $\boldsymbol{\mu} = [0, 0]$ y por la matríz de covarianza

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} N_0 B & N_0 B \text{ sinc}\left(\frac{1}{2}\right) \\ N_0 B \text{ sinc}\left(\frac{1}{2}\right) & N_0 B \end{bmatrix}.$$

Ahora, no son independientes, ya que al no ser nula la covarianza entre ambas variables aleatorias, la matriz de covarianza ya no es una matriz diagonal.

Ejercicio 2.15 *Solución*

a) La respuesta es SÍ. Si un proceso estacionario $X(t)$ pasa por un sistema lineal e invariante, no sólo el proceso de salida $Y(t)$ es estacionario, sino que además $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios. Y en este caso, el sistema completo es un sistema lineal e invariante (SLI). Un retardador es lineal, un sumador también , y la operación derivada, que tiene como respuesta impulsiva $h(t) = \delta'(t)$, es un SLI.

b) $S_Y(j\omega) = S_X(j\omega) 2\omega^2 \left[1 + \cos(\omega T)\right]$.

Ejercicio 2.16 *Solución*

$$\frac{S}{N} = \underbrace{2\frac{P_0}{N_0}}_{cte} \frac{\text{tg}^{-1}(B/f_0)}{(B/f_0)}.$$

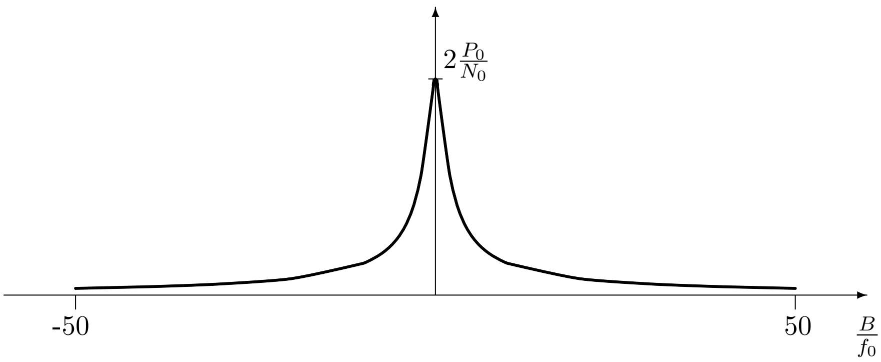

Figura 2.23: Representación de la relación señal a ruido para el Ejercicio 2.16.

El máximo de $\frac{S}{N}$ se obtiene para $\frac{B}{f_0} \to 0$ (para cero no habría ni señal ni ruido), donde tiende al valor

$$\frac{S}{N} \to 2\frac{P_0}{N_0}.$$

Una aspecto a tener en cuenta es que aunque un valor lo más bajo posible de B mejora la relación S/N, cuando B está por debajo de f_0 la señal se degrada al perder componentes frecuenciales importantes. Por eso, un valor de compromiso apropiado en este caso es $B = f_0$, donde la relación señal a ruido vale

$$\frac{S}{N} = 2\frac{P_0}{N_0}0{,}785 = 1{,}57\frac{P_0}{N_0}.$$

Ejercicio 2.17 *Solución*

$$B_{eq} = \frac{\frac{1}{2\tau}}{2\times 1} = \frac{1}{4\tau} = \frac{1}{4RC}.$$

Ejercicio 2.18 *Solución*

a)

$$\frac{S}{N}\ (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{10^{-11}}{2\cdot 10^{-14}} = 27\ \text{dB}.$$

b)

$$\frac{S}{N}\ (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{10^{-11}}{4\cdot 10^{-14}} = 24\ \text{dB},$$

c)

$$\frac{S}{N}\ (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{5\cdot 10^{-12}}{10^{-14}} = 27\ \text{dB}.$$

d)

$$\frac{S}{N}\ (\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{8\cdot 10^{-12}}{3{,}33\cdot 10^{-14}} = 23{,}8\ \text{dB}.$$

-o-O-o-

Ejercicio 2.19 *Solución*

a)

$$\frac{S}{N}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{10^{-11}}{2{,}001\times 10^{-14}} = 26{,}97 \approx 27\ \text{dB}.$$

b)

$$\frac{S}{N}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{10^{-11}}{4{,}002\times 10^{-14}} = 23{,}97 \approx 24\ \text{dB}.$$

c)

$$\frac{S}{N}(\text{dB}) = 10\log_{10}\frac{P_Y}{P_Z} = 10\log_{10}\frac{0{,}818\times 10^{-11}}{1{,}0005\times 10^{-14}} = 29{,}12\ \text{dB}.$$

Ejercicio 2.20 *Solución*

a)

$$m_Y(t) = 1 + a$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) =& (1+a^2)\cdot[\cos(\omega_A\tau) + \cos(\omega_B\tau)] \\ &+ a\cdot[\cos(\omega_A(\tau-b)) + \cos(\omega_B(\tau-b)) + \cos(\omega_A(\tau+b)) + \cos(\omega_B(\tau+b))]\,. \end{aligned}$$

Como la media es una constante, y la función de autocorrelación depende únicamente de la diferencia entre instantes de tiempo, τ, el proceso aleatorio es estacionario.

$$S_Y(j\omega) = \pi \cdot (1 + 2 \cdot a \cdot \cos(\omega b) + a^2) \cdot [\delta(\omega - \omega_A) + \delta(\omega + \omega_A) + \delta(\omega - \omega_B) + \delta(\omega + \omega_B)] \,.$$

<u>NOTA</u>: Como tanto ω_A como ω_B son múltiplos enteros pares de π, al ser b un entero, ωb es un múltiplo par de π tanto para $\omega = \omega_A$ como para $\omega = \omega_B$, por lo que $\cos(\omega(\tau \pm b)) = \cos(\omega\tau)$ y $\cos(\omega b) = 1$ para esas dos frecuencias, por lo que las expresiones anteriores se pueden simplificar, y teniendo también en cuenta que $1 + 2 \cdot a + a^2 = (1 + a)^2$, quedarían como

$$R_Y(\tau) = (1 + a)^2 \cdot [\cos(\omega_A \tau) + \cos(\omega_B \tau)] \,.$$

$$S_Y(j\omega) = \pi \cdot (1 + a)^2 \cdot [\delta(\omega - \omega_A) + \delta(\omega + \omega_A) + \delta(\omega - \omega_B) + \delta(\omega + \omega_B)] \,.$$

La potencia del proceso es

$$P_Y = 2 \cdot (1 + a^2) + 2 \cdot a \cdot [\cos(\omega_A b) + \cos(\omega_B b)] = 2 \cdot (1 + a^2) + 4 \cdot a = 2 \cdot (1 + a)^2 \text{ Watt}$$

b)

$$m_Z = 2 \cdot m_Y = 2 \cdot (1 + a)$$

$$R_Z(\tau) = (1 + a^2) \cdot [\cos(\omega_A \tau)] \,.$$

El proceso es estationario, al no depender del tiempo ni la media ni la función de autocorrelación.

$$S_Z(j\omega) = \pi \cdot (1 + a)^2 \cdot [\delta(\omega - \omega_A) + \delta(\omega + \omega_A)] \,.$$

$$P_Z = (1 + a)^2 \text{ Watt.}$$

<u>NOTA</u>: En caso de no haberse dado cuenta de las simplificaciones al considerar que ω_A y ω_B son múltiplos pares de π, las expresiones quedarían

$$R_Z(\tau) = TF^{-1}[S_Z(j\omega)] = (1 + a^2) \cdot [\cos(\omega_A \tau)] + a \cdot [\cos(\omega_A(\tau - b)) + \cos(\omega_A(\tau + b))] \,.$$

$$S_Z(j\omega) = \pi \cdot (1 + 2 \cdot a \cdot \cos(\omega b) + a^2) \cdot [\delta(\omega - \omega_A) + \delta(\omega + \omega_A)] \,.$$

$$P_Z = 1 + a^2 + 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_A b) \text{ Watt.}$$