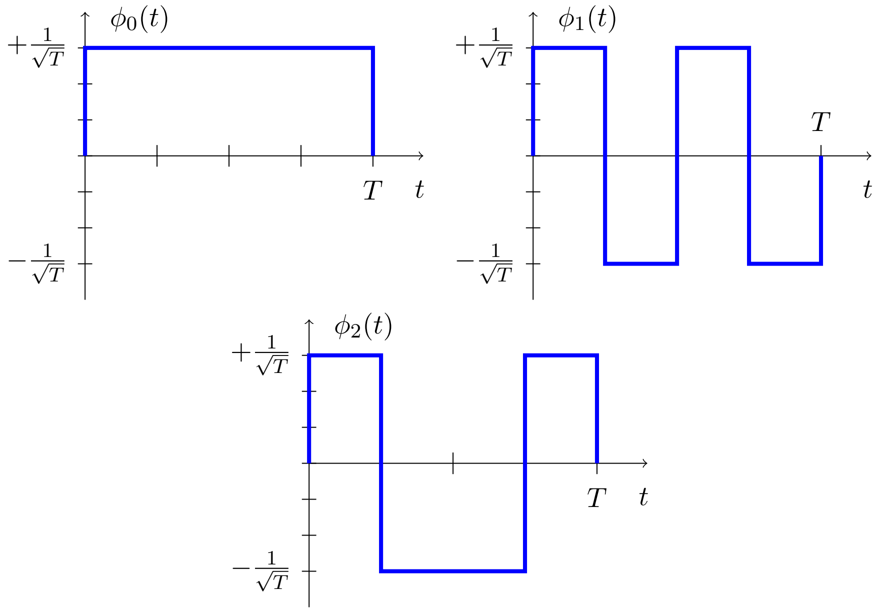
4.9. Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 4.1 *Solución*

a) Resultado de la aplicación del Procedimiento de Gram-Schmidt siguiendo el orden dado por los índices de las señales

  I) La dimensión del espacion de señales es $N = 3$, y los tres elementos que forman la base ortonormal son los de la figura



  II) La representación vectorial de las señales es

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 2\sqrt{T} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{T} \\ 2\sqrt{T} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{T} \\ -2\sqrt{T} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{T} \\ 0 \\ \sqrt{T} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{T} \\ 0 \\ -\sqrt{T} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} \sqrt{T} \\ \sqrt{T} \\ \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

b)
$$\mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_0\} = 4T,\ \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_1\} = 5T,\ \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_2\} = 5T,\ \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_3\} = 2T,\ \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_4\} = 2T,\ \mathcal{E}\{\boldsymbol{a}_5\} = 3T$$

c) La energía de la diferencia entre cada par de señales

$$\mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_0(t)\right\} = 0,\ \mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_1(t)\right\} = 13T,\ \mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_2(t)\right\} = 13T$$

$$\mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_3(t)\right\} = 2T,\ \mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_4(t)\right\} = 2T,\ \mathcal{E}\left\{s_0(t) - s_5(t)\right\} = 3T$$

Ejercicio 4.2 *Solución*

En este caso, al ser el sistema binario, la probabilidad de error de símbolo y de bit coinciden

a) $A = 2{,}6163$

b) $A = 3{,}3588$

Ejercicio 4.3 *Solución*

a) El umbral que define el decisor óptimo y las regiones de decisión son

$$q_u = \frac{A^2 - N_0 \ln 2}{2A}, \; I_0 = \{q : q \geq q_u\}, \; I_1 = \{q : q < q_u\}$$

b)

$$P_e = \frac{1}{3} Q\left(\frac{A - q_u}{\sqrt{N_0/2}}\right) + \frac{2}{3} Q\left(\frac{q_u}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Ejercicio 4.4 *Solución*

a) $E_s = 1$ J.

b) La constelación alternativa, que tiene energía $E'_s = \frac{8}{9}$ J, es

$$\boldsymbol{a}'_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{a}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{a}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c) La cota de la unión es

$$P_e \leq \frac{4}{3} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{2}{3} Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

La cota hogada es

$$P_e \leq 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Ejercicio 4.5 *Solución*

a) $E_s = \frac{17}{9}$ J.

b) La cota holgada vale

$$P_e \leq 2Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Ejercicio 4.6 *Solución*

a) Si $\Lambda(x)$ denota la función triangular, con soporte entre -1 y $+1$ y altura unidad

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

las expresiones de las funciones densidad de probabilidad condicionales son las siguientes

$$f_{q|A}(q|a_0) = \Lambda(x), \; f_{q|A}(q|a_1) = \Lambda(x-1), \; f_{q|A}(q|a_2) = \Lambda(x-2), \; f_{q|A}(q|a_3) = \Lambda(x-3)$$

b) Regiones de decisión para símbolos equiprobables

$$I_0 = \left\{q : q < \frac{1}{2}\right\}, \; I_1 = \left\{q : \frac{1}{2} \leq q < \frac{3}{2}\right\}, \; I_2 = \left\{q : \frac{3}{2} \leq q < \frac{8}{3}\right\}, \; I_3 = \left\{q : q \geq \frac{8}{3}\right\}$$

c) Probabilidad de error para símbolos equiprobables

$$P_e = \frac{3}{16}.$$

d) Regiones de decisión para símbolos no equiprobables

$$I_0 = \left\{ q : q < \frac{1}{3} \right\},\ I_1 = \left\{ q : \frac{1}{3} \leq q < \frac{3}{2} \right\},\ I_2 = \left\{ q : \frac{3}{2} \leq q < \frac{5}{2} \right\},\ I_3 = \left\{ q : q \geq \frac{5}{2} \right\}$$

e) Probabilidad de error para símbolos no equiprobables

$$P_e = \frac{7}{36}.$$

Ejercicio 4.7 *Solución*

$$\left.\frac{S}{N}\right|_q = \frac{2E_b}{N_0}$$

Ejercicio 4.8 *Solución*

a) $P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{N_0/2v}}\right)$

b)

$$P_e = pQ\left(\frac{A\sqrt{T} - q_u}{\sqrt{N_0/2}}\right) + (1-p)Q\left(\frac{A\sqrt{T} + q_u}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

donde

$$q_u = \frac{N_0 \ln \frac{1-p}{p}}{4A\sqrt{T}}$$

Ejercicio 4.9 *Solución*

a) $\frac{E_b}{N_0} \approx 9{,}68$ ($\frac{E_b}{N_0}$(dB) $\approx 9{,}85$ dB)

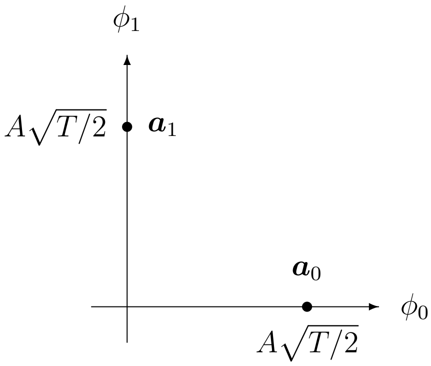
b) $\frac{E_b}{N_0} \approx 25{,}31$ ($\frac{E_b}{N_0}$(dB) $\approx 14{,}03$ dB)

c) $\frac{E_b}{N_0} \approx 439{,}928$ ($\frac{E_b}{N_0}$(dB) $\approx 26{,}43$ dB)

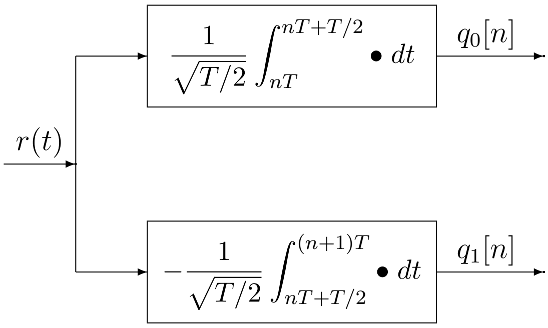
d) Transmitir a una mayor velocidad binaria para la misma tasa de símbolo supone utilizar constelaciones más densas, y con constelaciones más densas es necesaria una mayor energía para obtener las mismas prestaciones.

Ejercicio 4.10 *Solución*

a) La constelación es la de la figura



El demodulador, mediante correladores es equivalente al dado en la figura



El decisor sigue la regla

$$q_0[n] \underset{\hat{A}[n]=a_1}{\overset{\hat{A}[n]=a_0}{\gtrless}} q_1[n].$$

O lo que es lo mismo, las regiones de decisión son

$$I_0 = \{\boldsymbol{q} : q_0 > q_1\},\ I_1 = \{\boldsymbol{q} : q_0 \leq q_1\}$$

La probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\frac{d(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1)}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

b) El decisor viene dado por las siguientes regiones de decisión

$$I_0 = \{\boldsymbol{q} : q_0 + 2\alpha A\sqrt{T/2} > q_1\},\ I_1 = \{\boldsymbol{q} : q_0 + 2\alpha A\sqrt{T/2} \leq q_1\}$$

La probabilidad de error es ahora

$$P_e = Q\left(\frac{\alpha A\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0/2}}\right),$$

c) El decisor óptimo es en este caso sigue la regla

$$q' \underset{a_1}{\overset{a_0}{\gtrless}} 0$$

o lo que es lo mismo, las regiones de decisión son

$$I_0 = \{q' : q' > 0\}, \; I_1 = \{q' : q' \leq 0\}$$

La probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T}}{2\sqrt{N_0/2}}\right).$$

Esta probabilidad de error coincide con la del apartado a). Esto es así porque el nuevo demodulador lo que hace es girar la constelación para alinearla sobre el nuevo eje q', y tiene un factor de escala $\sqrt{T}$ que afecta tanto a la señal como al ruido.

Ejercicio 4.11 *Solución*

a) El modulador está dado por las dos funciones base

$$\phi_0(t) = \frac{s_0(t)}{A}, \; \phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{A}$$

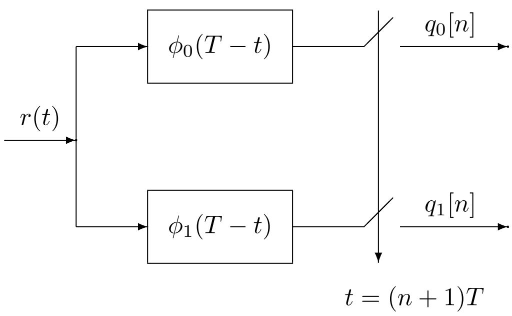
y la constelación es

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2A}{3} \\ \frac{A}{3} \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{A}{3} \\ \frac{2A}{3} \end{bmatrix}$$

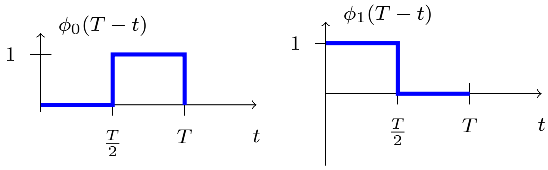
b) $E_s = \frac{7}{9}A^2$ J. La asignación de bits debe seguir la regla de codificación de Gray. En ejemplo (no es el único posible) sería

$$\boldsymbol{a}_0 \equiv 10, \; \boldsymbol{a}_1 \equiv 00, \; \boldsymbol{a}_2 \equiv 11, \; \boldsymbol{a}_3 \equiv 01$$

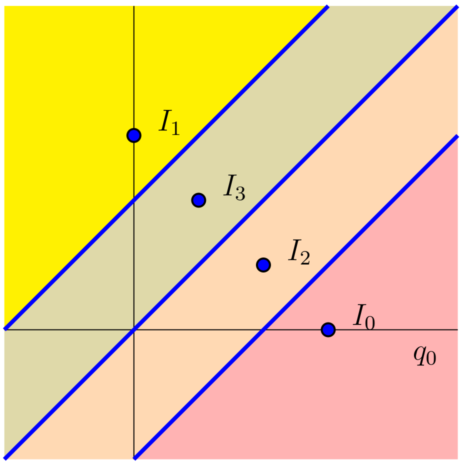
c) Demodulador



FILTROS ADAPTADOS (CAUSALES)



Decisor



Expresiones de la distribución condicional de la observación (general)

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_i) = \mathcal{N}^N\left(\boldsymbol{a}_i, \frac{N_0}{2}\right) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}_i||^2}{N_0}}$$

Expresiones particularizadas

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_0) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(q_0-A)^2+q_1^2}{N_0}},\ f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_1) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{q_0^2+(q_1-A)^2}{N_0}}$$

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(q_0-2A/3)^2+(q_1-A/3)^2}{N_0}},\ f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}|\boldsymbol{a}_3) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(q_0-A/3)^2+(q_1-2A/3)^2}{N_0}}$$

Probabilidad de error

$$P_e = \frac{3}{2} Q\left(\frac{A}{3\sqrt{N_0}}\right)$$

d) Decisor

$$I_0 = \left\{q : q > A\frac{\sqrt{2}}{3}\right\},\ I_1 = \left\{q : q < -A\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$$

$$I_2 = \left\{q : 0 < q \leq A\frac{\sqrt{2}}{3}\right\},\ I_3 = \left\{q : -A\frac{\sqrt{2}}{3} \leq 0\right\}$$

Distribuciones condicionales de la observación

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|\boldsymbol{a}_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-A/\sqrt{2})^2}{N_0}},\ f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|\boldsymbol{a}_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A/\sqrt{2})^2}{N_0}}$$

$$f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|\boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q-A/(3\sqrt{2}))^2}{N_0}},\ f_{\boldsymbol{q}|\boldsymbol{A}}(q|\boldsymbol{a}_3) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(q+A/(3\sqrt{2}))^2}{N_0}}$$

Ejercicio 4.12 *Solución*

a) En el primer apartado:

i) El codificador está dado por cuatro símbolos con coordenadas

$$\boldsymbol{a}_0 = -1{,}05,\ \boldsymbol{a}_1 = -0{,}35,\ \boldsymbol{a}_2 = +0{,}35,\ \boldsymbol{a}_3 = +1{,}05.$$

II) La asignación tiene que seguir la regla de la codificación de Gray, es decir, entre símbolos a mínima distancia la asignación binaria debe diferir únicamente en un bit. En ejemplo (no el único posible) de tal asignación sería

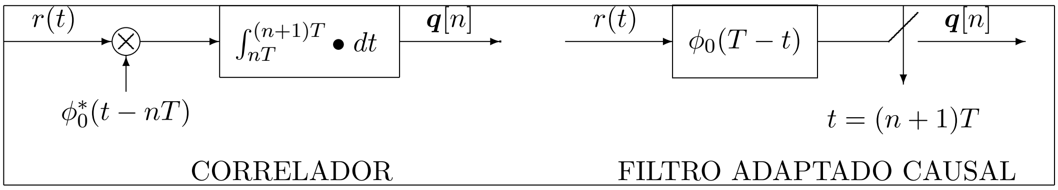
$$\boldsymbol{a}_0 \equiv 00,\ \boldsymbol{a}_1 \equiv 01,\ \boldsymbol{a}_2 \equiv 11,\ \boldsymbol{a}_3 \equiv 10.$$

La probabilidad de error de bit aproximada, para relaciones señal a ruido suficientemente altas es

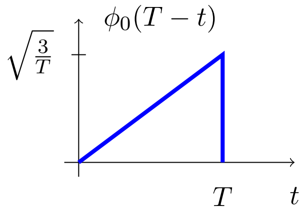
$$BER \approx 10^{-4}.$$

b) En el segundo apartado

I) Estructura de los demoduladores por correlación y mediante filtros adaptados



La respuesta del filtro adaptado es



II) El decisor viene dado por las regiones

$$I_0 = \{q : q < -2T\}\,,\ I_1 = \{q : -2T \leq q < 0\}\,,\ I_2 = \{q : 0 \leq q < +2T\}\,,\ I_3 = \{q : q \geq +2T\}$$

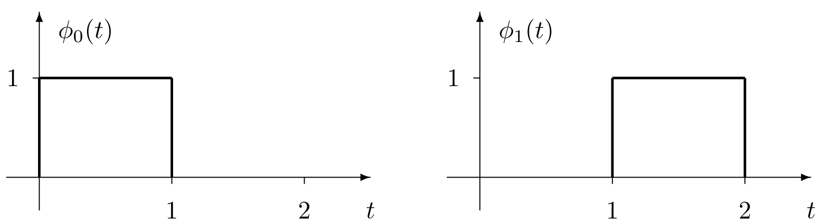
La probabilidad de error es

$$P_e = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{T}{2N_0}}\right).$$

Las prestaciones obtenidas con este receptor nunca podrán ser mejores que las del receptor óptimo, que por definición es el que proporciona la mínima probabilidad de error de símbolo. Por tanto, si se utiliza un demodulador diferente de los habituales basados en correladores o filtros adaptados, como en este caso, las prestaciones serán en el mejor de los casos iguales (si el receptor hace una operación equivalente) y en general serán peores (si la operación que realiza no es la equivalente a un demodulador óptimo).

Ejercicio 4.13 *Solución*

La base y la constelación del sistema son

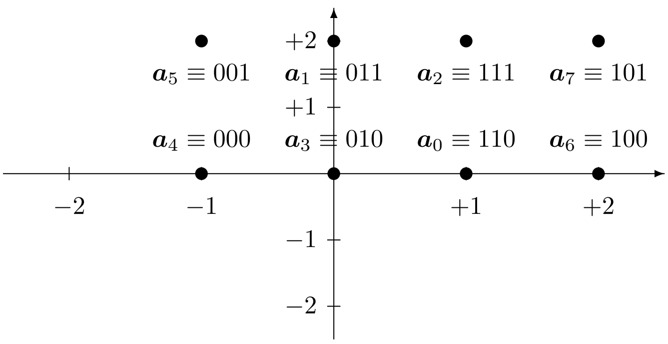


$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) La asignación binaria tiene que seguir una codificación de Gray, ya que esta es la que minimiza la probabilidad de error de bit para una constelación. Un ejemplo de este tipo de codificación, en la que símbolos a mínima distancia difieren en un único bit en la asignación, sería

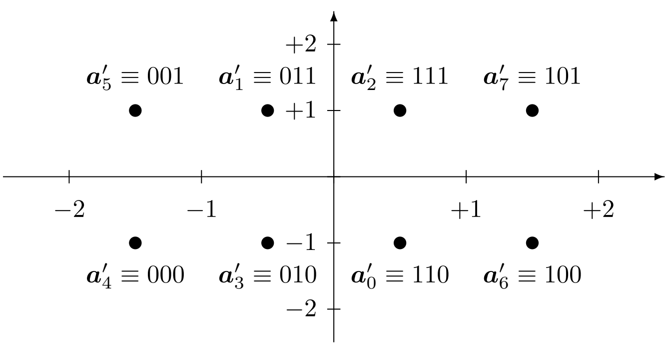
$$\boldsymbol{a}_0 \equiv 110, \ \boldsymbol{a}_1 \equiv 011, \ \boldsymbol{a}_2 \equiv 111, \ \boldsymbol{a}_3 \equiv 010, \ \boldsymbol{a}_4 \equiv 000, \ \boldsymbol{a}_5 \equiv 001, \ \boldsymbol{a}_6 \equiv 100, \ \boldsymbol{a}_7 \equiv 101$$



b) Los símbolos de la constelación modificada serían:

$$\boldsymbol{a}'_0 = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ +1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_2 = \begin{bmatrix} +1/2 \\ +1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

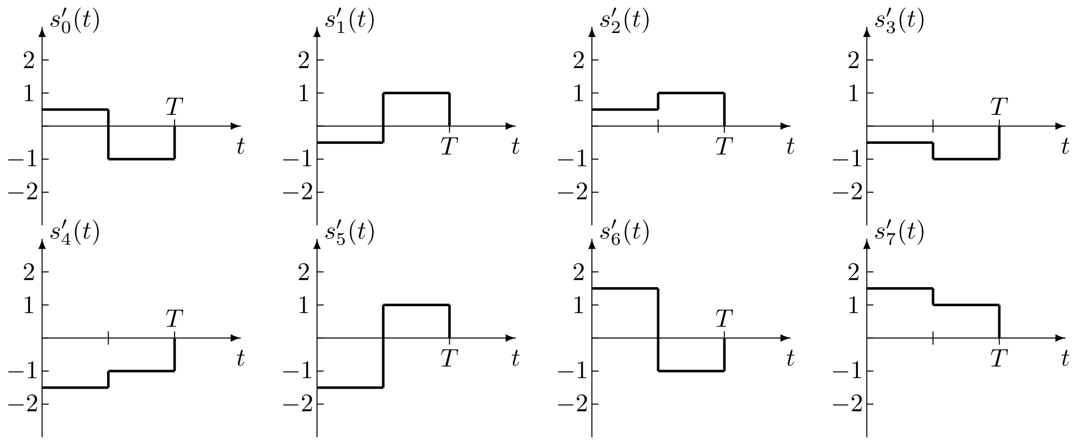
$$\boldsymbol{a}'_4 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_5 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ +1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_6 = \begin{bmatrix} +3/2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}'_7 = \begin{bmatrix} +3/2 \\ +1 \end{bmatrix}$$



Las nuevas señales tendrían como expresión analítica

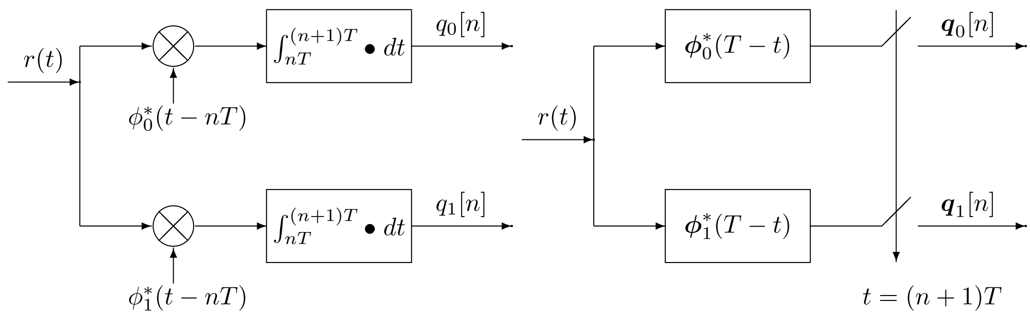
$$s'_i(t) = a'_{i,0} \cdot \phi_o(t) + a'_{i,1} \cdot \phi_1(t),$$

y se pueden ver representadas en la figura



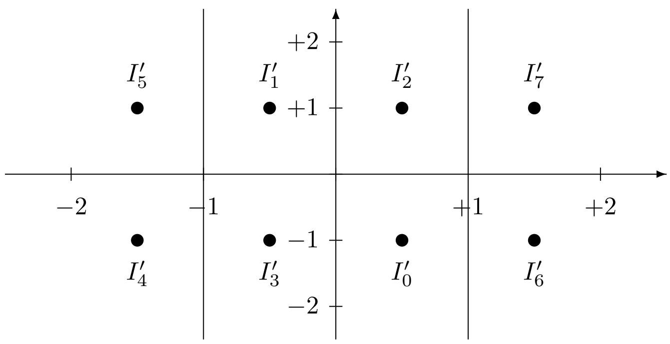
$$E_s = \frac{9}{4}.$$

c) El demodulador óptimo está basado en filtros adaptados o en correladores con las funciones que forman la base ortonormal, cualquiera de las dos opciones es válida.



CORRELADORES FILTROS ADAPTADOS (CAUSALES)

El decisor óptimo es

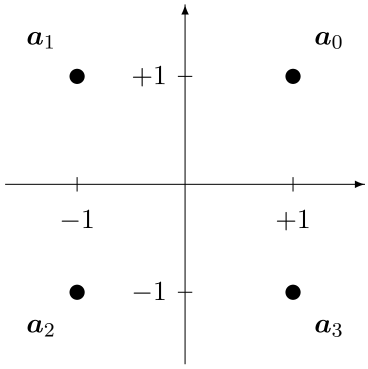


$$P_e = \frac{3}{2}\cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{3}{2}\cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right)\cdot Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Ejercicio 4.14 *Solución*

a) La asignación binaria, para minimizar la probabilidad de error de bit, ha de ser una codificación de Gray, ya que de esta forma los errores más probables a nivel de símbolo suponen un único error a nivel de bit.

En este caso la constelación es la que presenta la figura



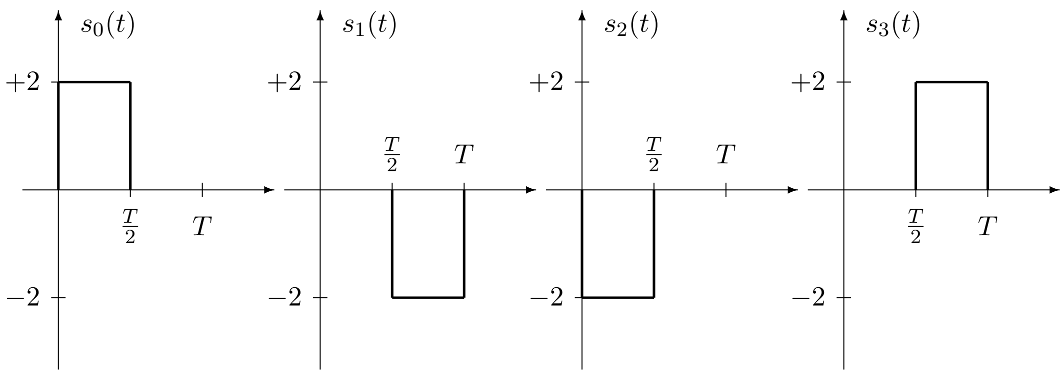
Una posible asignación de Gray (no es la única posible) sería

$$\boldsymbol{a}_0 = 00,\ \boldsymbol{a}_1 = 01,\ \boldsymbol{a}_2 = 11,\ \boldsymbol{a}_3 = 10.$$

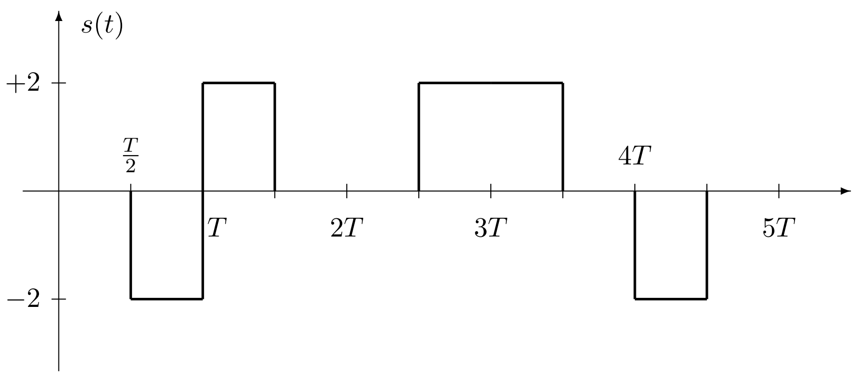
Las velocidades de símbolo y binaria son

$$R_s = \frac{1}{T} = 1 \text{ símbolos/s (baudios), y } R_b = 2 \text{ bits/s.}$$

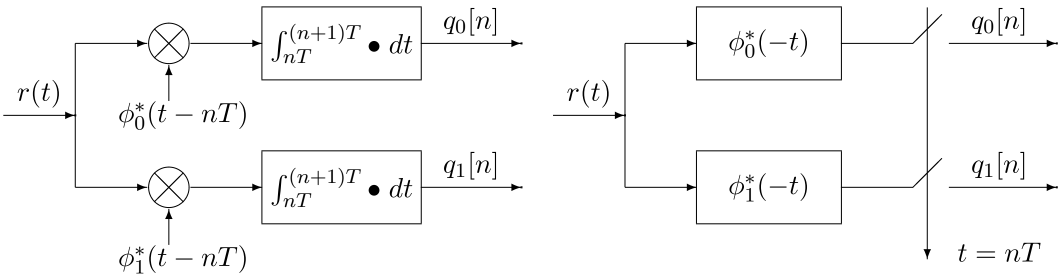
b) Las cuatro señales se muestran en la figura



La señal resultante de transmitir la secuencia dada es



c) Para el demodulador óptimo se puede utilizar cualquiera de las dos estructuras típicas, mediante correladores, o mediante filtros adaptados.



CORRELADORES FILTROS ADAPTADOS

Decisor: dado por las siguientes regiones de decisión

$$\boldsymbol{q} \in I_0 \text{ si } \begin{cases} q_0 \geq 0 \\ q_1 \geq 0 \end{cases}, \boldsymbol{q} \in I_1 \text{ si } \begin{cases} q_0 < 0 \\ q_1 \geq 0 \end{cases}, \boldsymbol{q} \in I_2 \text{ si } \begin{cases} q_0 < 0 \\ q_1 < 0 \end{cases}, \boldsymbol{q} \in I_3 \text{ si } \begin{cases} q_0 \geq 0 \\ q_1 < 0 \end{cases}.$$

Probabilidad de error

$$P_e = 2 \cdot Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \left(Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)\right)^2.$$

d) El decisor óptimo es

$$q \in I_0 \text{ si } q \geq \frac{3}{2},\ q \in I_1 \text{ si } -\frac{3}{2} < q \leq 0,\ q \in I_2 \text{ si } q \leq \frac{3}{2},\ q \in I_3 \text{ si } 0 < q < \frac{3}{2},$$

Finalmente, la probabilidad de error es

$$P_e = Q\left(\frac{1}{\sqrt{5N_0}}\right) + \frac{1}{2} \cdot Q\left(\frac{2}{\sqrt{5N_0}}\right).$$

Ejercicio 4.15 *Solución*

a) En este caso se busca una probabilidad de error aproximada de $P_e \approx 2 \times 10^{-6}$

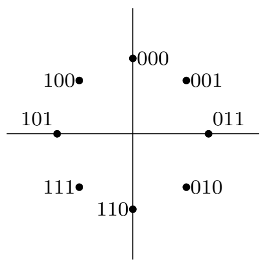
I) El radio vale

$$R = 1{,}5202.$$

II) La energía media por símbolo

$$E_s = R^2 = 2{,}311 \text{ J}.$$

III) Para realizar la asignación binaria ($m = \log_2 M = 3$ bits/símbolo) hay que utilizar una codificación de Gray, de modo que símbolos que están a mínima distancia tengan una asignación que difiera únicamente en un bit. Así, como la mayor parte de errores se produce con símbolos a mínima distancia, se minimiza la probabilidad de error de bit.



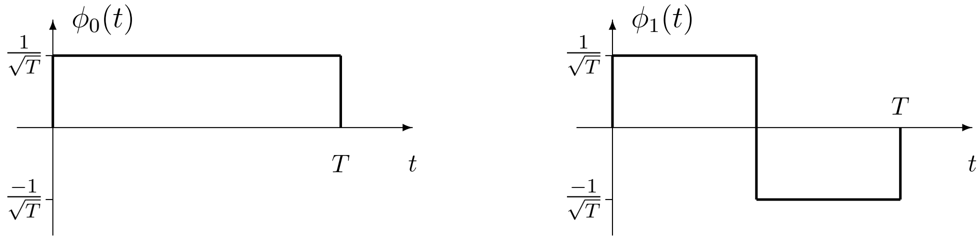
$$\boldsymbol{a}_0 \equiv 011,\ \boldsymbol{a}_1 \equiv 001,\ \boldsymbol{a}_2 \equiv 000,\ \boldsymbol{a}_3 \equiv 100,\ \boldsymbol{a}_4 \equiv 101,\ \boldsymbol{a}_5 \equiv 111,\ \boldsymbol{a}_6 \equiv 110,\ \boldsymbol{a}_7 \equiv 010.$$

Cuando se usa una codificación de Gray, si la relación señal a ruido es alta

$$BER \approx \frac{1}{m} \cdot P_e = \frac{1}{3} \cdot P_e = \frac{2}{3} \times 10^{-6}.$$

b) En este caso se busca una transmisión a la velocidad binaria $R_b = 1500$ bits/s.

i) La dimensión del espacio de señales, dada esta constelación, es $N = 2$, por lo que hay que encontrar dos funciones que formen una base ortonormal (su producto escalar es nulo y cada una tiene energía unidad). Para una transmisión en banda base, formas de onda de tipo pulsos cuadrados son apropiadas, ya que su espectro está en banda base. Hay varias opciones. Una posibilidad (no la única) sería la base dada en la figura



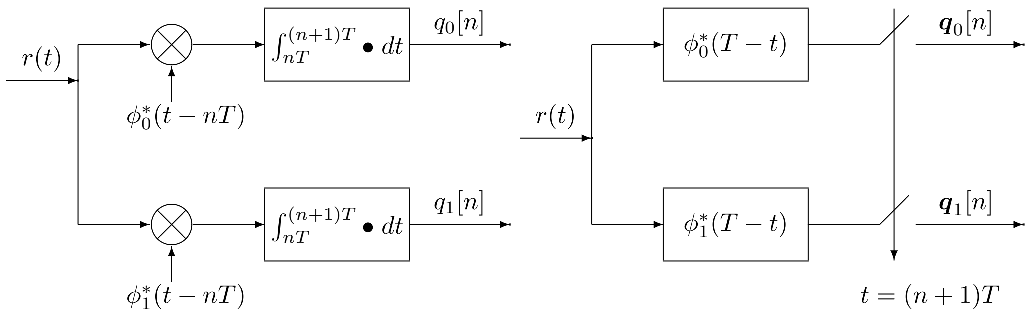
Para tenerlas completamente definidas, hay que determinar el valor de T, y este está relacionado con la velocidad de transmisión, ya que la velocidad de símbolo es $R_s = \frac{1}{T}$ baudios. La velocidad de símbolo está relacionada con la tasa binaria a través del número de bits por símbolo

$$R_s = \frac{R_b}{m} = \frac{1500}{3} = 500 \text{ baudios}.$$

Esto implica que el tiempo de símbolo es

$$T = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{500} = 0{,}002 \text{ segundos} = 2 \text{ ms}.$$

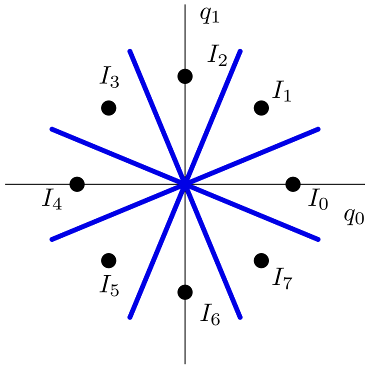
ii) El demodulador óptimo puede ser el basado en filtros adaptados causales o en correladores con las funciones que forman la base ortonormal, cualquiera de las dos opciones es válida.



CORRELADORES FILTROS ADAPTADOS (CAUSALES)

En este caso, como las funciones base son reales, los conjugados no son relevantes.

c) En esta sección se trabaja sobre el decisor



i) Para el diseño del decisor, al ser los símbolos equiprobables y el ruido gaussiano, se aplica el criterio de mínima distancia euclídea: la región de decisión de un símbolo son aquellos puntos del espacio más cercanos a ese símbolo que al resto de símbolos de la constelación, que en este caso serían las que se muestra en la figura anterior.

ii) La cota de la unión se obtiene como

$$P_e \leq \sum_{i=0}^{M-1} p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} P_e(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=0}^{M-1} p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{M-1} Q\left(\frac{d(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)}{2\sqrt{N_o/2}}\right).$$

Para esta constelación, cada símbolo tiene al resto de símbolos a las siguientes distancias:

- Dos símbolos a distancia $d_{min} = 1{,}1635$ (ángulo $\theta = 45^o$)
- Dos símbolos a distancia $d_a = 2{,}15$ (ángulo $\theta = 90^o$)
- Dos símbolos a distancia $d_b = 2{,}8$ (ángulo $\theta = 135^o$)
- Un símbolo a distancia $d_c = 2R = 3{,}04$ (ángulo $\theta = 180^o$)

Por tanto, como la cota para la probabilidad de error condicional para cada símbolo es la misma

$$P_e \leq 2{\cdot}Q\left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_o/2}}\right) + 2{\cdot}Q\left(\frac{d_a}{2\sqrt{N_o/2}}\right) + 2{\cdot}Q\left(\frac{d_b}{2\sqrt{N_o/2}}\right) + Q\left(\frac{d_c}{2\sqrt{N_o/2}}\right) = 2{,}0345\times 10^{-6}.$$

d) La cota holgada es

$$P_e \leq 7 \cdot Q\left(\frac{1{,}1635}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = 7{,}12 \times 10^{-6}.$$

Expresada en función de E_s/N_0 vale

$$P_e \leq 7 \cdot Q\left(0{,}5412 \cdot \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right).$$

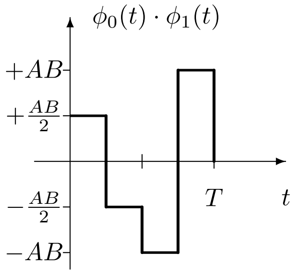
Ejercicio 4.16 *Solución*

a) $A = 1$, $B = \sqrt{8/5} = 1{,}2649$.

Dado que con estos valores la energía de ambas señales es uno, lo único que falta para demostrar que forman una base ortonormal es que el producto escalar entre ambas señales vale cero, que para señales reales se define como

$$\langle \phi_0(t), \phi_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(t) \cdot \phi_1(t)\, dt = 0$$

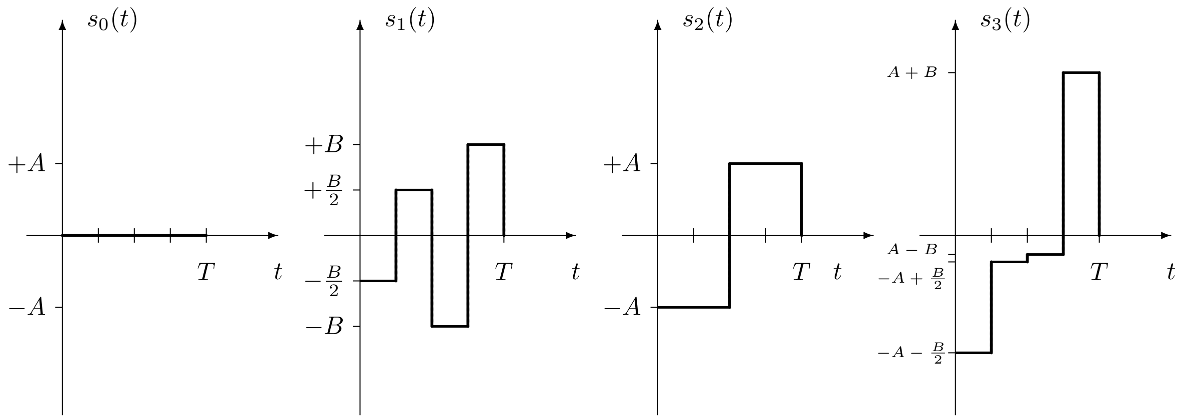
El integrando, la señal resultante del producto entre $\phi_0(t) \cdot \phi_1(t)$, es el que se muestra en la figura, y se puede ver claramente que su integral es cero.



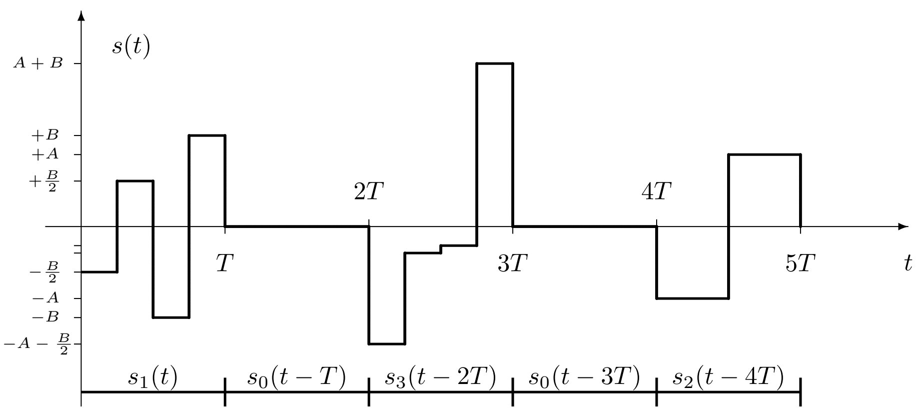
b)

$$s_0(t) = 0,\ s_1(t) = \phi_1(t),\ s_2(t) = \phi_0(t),\ s_3(t) = \phi_0(t) + \phi_1(t),$$

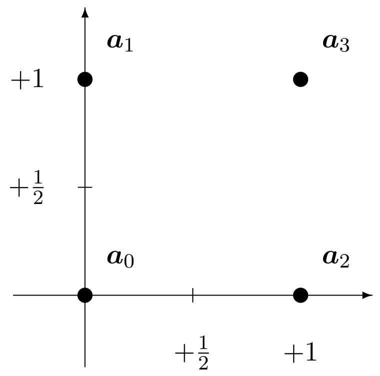
lo que da lugar a las cuatro señales de la figura



La señal asociada a la secuencia es



c) Para realizar la asignación binaria hay que utilizar una codificación de Gray, de modo que símbolos que están a mínima distancia tengan una asignación que difiera únicamente en un bit. Esta es la asignación que minimiza la probabilidad de error de bit (BER).



Una posible asignación de Gray es

$$\boldsymbol{a}_0 = 00,\ \boldsymbol{a}_1 = 01,\ \boldsymbol{a}_2 = 10,\ \boldsymbol{a}_3 = 11.$$

Velocidades de transmisión de símbolo y de bit $R_s = \frac{1}{T} = 1$ símbolos/s (baudios) y $R_b = 2$ bits/s.

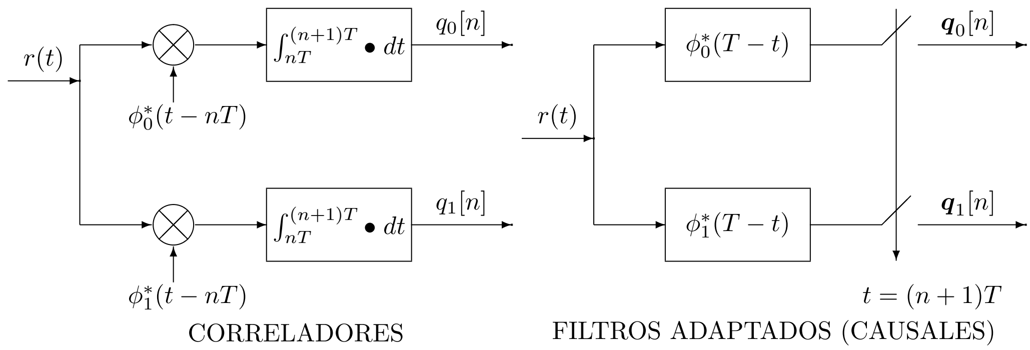
La energía media por símbolo

$$E_s = 1.$$

Esta constelación no es la más apropiada, ya que no cumple la condición de que la media de la constelación sea nula, que es la que garantiza una mínima energía media por símbolo para las distancias relativas dadas por la constelación, y en este caso la media es

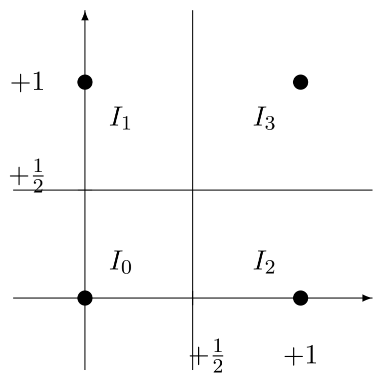
$$E[\boldsymbol{a}_i] = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

d) El demodulador óptimo está basado en filtros adaptados o en correladores con las funciones que forman la base ortonormal, cualquiera de las dos opciones es válida.



En este caso, como las funciones base son reales, los conjugados no son relevantes.

El decisor óptimo es el que se muestra en la figura



La probabilidad de error vale

$$P_e = 2 \cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right) - \left[Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right)\right]^2$$

e) La aproximación habitual para la probabilidad de error es

$$P_e \approx 2 \cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right).$$

En cuanto a las cotas, la cota de la unión es

$$P_e \leq 2 \cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N_0/2}}\right) = 2 \cdot Q\left(\frac{1}{\sqrt{2N_0}}\right) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right).$$

Y la cota holgada vale

$$P_e \leq 3 \cdot Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right).$$

