5.7. Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 5.1 *Solución*

$$H(X) = 2{,}4087 \text{ bits/símbolo.}$$

En el caso en que los símbolos son igualmente probables

$$H(X) = \log_2(6) = 2{,}585 \text{ bits/símbolo.}$$

Ejercicio 5.2 *Solución*

a) Definiendo $\alpha = p(1-\varepsilon) + (1-p)\varepsilon$

$$H(X) = H_b(p) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p).$$

$$H(Y) = H_b(\alpha) = -\alpha\log_2(\alpha) - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha).$$

$$H(Y|X) = H_b(\varepsilon).$$

$$H(X,Y) = H_b(p) + H_b(\varepsilon).$$

$$H(X|Y) = H_b(p) + H_b(\varepsilon) - H_b(\alpha)$$

$$I(X,Y) = H_b(\alpha) - H_b(\varepsilon).$$

b) $p = \frac{1}{2}$

c) $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Ejercicio 5.3 *Solución*

a) $H(X) = 2{,}5282$ bits/símbolo. Para símbolos equiprobables

$$H(X) = \log_2(7) = 2{,}8074 \text{bits/símbolo.}$$

b) $H(Y) = 1{,}4060$ bits/símbolo. Para símbolos equiprobables

$$H(Y) = \log_2(3) = 1{,}585 \text{ bits/símbolo}$$

c)

$$H(X,Y) = 2{,}5282 \text{ bits/símbolo.}$$

$$H(X|Y) = 1{,}1222 \text{ bits/símbolo.}$$

$$H(Y|X) = 0 \text{ bits/símbolo.}$$

$$I(X,Y) = 1{,}4060 \text{ bits/símbolo.}$$

Ejercicio 5.4 *Solución*

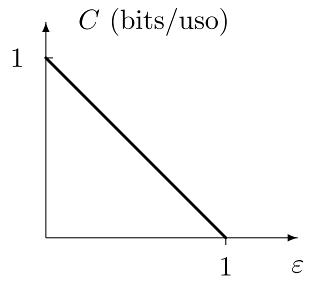


Figura 5.39: Capacidad del canal en función de ε, Ejercicio 5.4.

La capacidad del canal es

$$C = (1-\varepsilon) \text{ bits/uso},$$

y que esta capacidad se alcanza para unas probabilidades a priori

$$p_X(0) = p_X(1) = \frac{1}{2}.$$

La capacidad se representa en función de ε en la Figura 5.39.

Ejercicio 5.5 *Solución*

a) $C = \varepsilon$, para $p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1}{2}$.

b)

$$H(X,Y) = H_b(p) + H_b(\varepsilon)$$
$$H(X|Y) = (1-\varepsilon)H_b(p)$$

Ejercicio 5.6 *Solución*

a) Para $\varepsilon = 0$

$$C = \log_2(3) = 1{,}585 \text{ bits/uso}.$$

Las probabilidades de entrada para las que se alcanza la capacidad del canal son las que cumplen que

$$p_X(x_1) = p_X(x_3) = \frac{1}{3}, \quad [p_X(x_o) + p_X(x_2)] = \frac{1}{3}.$$

Para $\varepsilon = 1$

$$C = \log_2(2) = 1 \text{ bit/uso}.$$

Las probabilidades de entrada para las que se alcanza la capacidad del canal son las que cumplen

$$[p_X(x_0) + p_X(x_2)] = \frac{1}{2}, \quad [p_X(x_1) + p_X(x_3)] = \frac{1}{2}.$$

b) $\varepsilon = 0{,}75$

$$H(X|Y) = 0{,}931 \text{ bits/símbolo}.$$

c) Las probabilidades para las que se obtiene la capacidad del canal son

$$p_X(x_0) = 0{,}403, \quad p_X(x_1) = 0{,}339, \quad p_X(x_2) = 0{,}258.$$

La capacidad del canal es el máximo de la información mutua

$$C = H(Y) - H(Y|X) = 1{,}308 \text{ bits/uso}$$

-o-O-o-

Ejercicio 5.7 *Solución*

a) La capacidad es
$$C = \log_2(3) = 1{,}585 \text{ bits/uso}$$
para
$$p_X(x_0) = p_X(x_1) = p_X(x_2) = \frac{1}{3}.$$

b) Cualquiera de estos dos valores es posible
$$\varepsilon = \begin{cases} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{cases}.$$
$$H(Y) = \begin{cases} 1{,}5546, & \varepsilon = 0{,}25 \\ 1{,}2807, & \varepsilon = 0{,}75 \end{cases}.$$
$$I(X,Y) = \begin{cases} 1{,}0137, & \varepsilon = 0{,}25 \\ 0{,}7398, & \varepsilon = 0{,}75 \end{cases}.$$
$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = \begin{cases} 0{,}5712, & \varepsilon = 0{,}25 \\ 0{,}8451, & \varepsilon = 0{,}75 \end{cases}.$$

Ejercicio 5.8 *Solución*

a) La capacidad de canal es $C = 1$ bit/uso y se alcanza para
$$p_X(x_1) = 1/2, \quad p_X(x_0) + p_X(x_2) = 1/2.$$

b) $H(X|Y) = 0$ y $H(X,Y) = H_b(p) + p \cdot H_b(\varepsilon)$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $H(X,Y) = H_b(p) + p$.

Ejercicio 5.9 *Solución*

a) $C = 1$ bit/uso, para $p_X(x_0) = \frac{1}{2}$ y $p_X(x_1) + p_X(x_2) = \frac{1}{2}$.

b)
$$H(X,Y) = 2p + H_b(2p) + (1-2p)H_b(\varepsilon)$$
$$H(X|Y) = 2p$$

Ejercicio 5.10 *Solución*

a)
$$\boldsymbol{P}^{DMC} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-2\varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{Const}=\begin{bmatrix} 1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-2Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{3}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) \end{bmatrix}$$

La aproximación que se ha hecho es que sólo se considera la probabilidad de error entre símbolos que estén a distancia mínima, despreciandose la probabilidad de cometer errores con símbolos a $2d_{min}$ o $3d_{min}$. Eso significa que

$$Q\left(\frac{k}{\sqrt{N_0/2}}\right)\approx 0,\ \text{para } k>1,$$

y que

$$\varepsilon=Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right).$$

b)

$$H(Y|X)=\frac{1}{2}H_b(\varepsilon)+\frac{1}{2}H_b(2\varepsilon)+\varepsilon$$
$$H(X|Y)=\frac{1}{2}H_b(\varepsilon)+\frac{1}{2}H_b(2\varepsilon)+\varepsilon$$
$$H(X,Y)=2+\frac{1}{2}H_b(\varepsilon)+\frac{1}{2}H_b(2\varepsilon)+\varepsilon$$
$$I(X,Y)=2-\frac{1}{2}H_b(\varepsilon)-\frac{1}{2}H_b(2\varepsilon)-\varepsilon$$

El valor de ε que minimiza $H(Y|X)$ y $H(X|Y)$ y maximiza $I(X,Y)$ es $\varepsilon=0$ (en cuyo caso $H(X|Y)=H(Y|X)=0$, e $I(X,Y)=2$).

c) Los valores mínimo y máximo que puede tomar ε son $\varepsilon=0$ y $\varepsilon=\frac{1}{2}$, respectivamente.

i) Para $\varepsilon=0$, $C=2$ bits/uso para $p_X(x_i)=\frac{1}{4}$, $i=0,1,2,3$.

ii) Para $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $C=1$ bits/uso para $p_X(x_0)=p_X(x_3)$ y $p_X(x_1)=p_X(x_2)$.

Ejercicio 5.11 *Solución*

a) La matriz de canal para el DMC es

$$\boldsymbol{P}^{DMC}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para la constelación, la matriz de canal correspondiente es

$$\boldsymbol{P}^{Const.}=\begin{bmatrix} 1-Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{8}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{8}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{4}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{4}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{4}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{4}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) \\ Q\left(\frac{8}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{8}{\sqrt{N_0/2}}\right) & Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right)-Q\left(\frac{5}{\sqrt{N_0/2}}\right) & 1-Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right) \end{bmatrix}.$$

La aproximación que se ha hecho es que la probabilidad de transición con símbolos más alejados de distancia 2 es nula, o lo que es lo mismo, que sólo se producen errores entre los símbolos $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$, lo que sobre los términos de la matriz anterior significa

$$Q\left(\frac{k}{\sqrt{N_0/2}}\right) \approx 0, \text{ para } k > 1.$$

Por tanto

$$\varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right).$$

b)

$$H(X,Y) = 2 + \frac{1}{2} \cdot H_b(\varepsilon)$$

$$H(Y|X) = \frac{1}{2} \cdot H_b(\varepsilon).$$

$$H(X|Y) = \frac{1}{2} \cdot H_b(\varepsilon).$$

$$I(X,Y) = 2 - \frac{1}{2} \cdot H_b(\varepsilon).$$

La representación de estas funciones se muestra en la Figura 5.40.

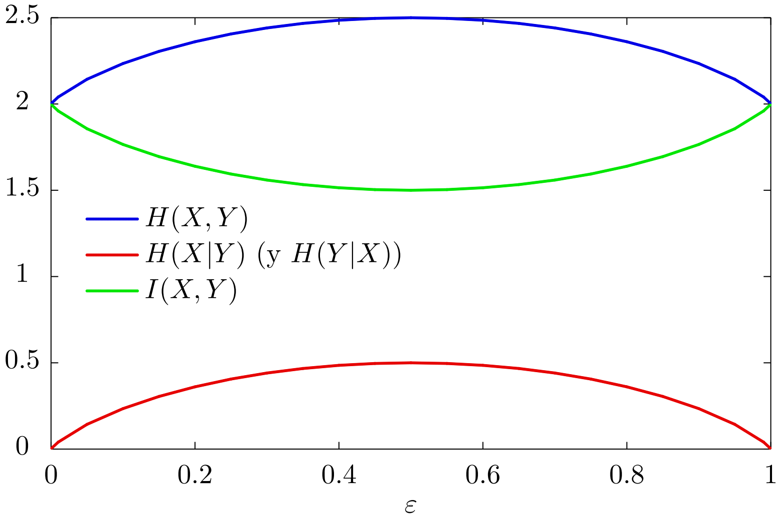


Figura 5.40: Representación de $H(X,Y)$, $H(X|Y)$ (que es igual que $H(Y|X)$) e $I(X,Y)$ en función de ε.

Los valores máximos de $H(X,Y)$, $H(X|Y)$, y $H(Y|X)$ se obtienen para $\varepsilon = 1/2$, lo mismo que ocurre con el valor mínimo de $I(X,Y)$.

c) La capacidad de canal es

$$C = 1 + H_b\left(\frac{2^{H_b(\varepsilon)}}{1+2^{H_b(\varepsilon)}}\right) - \left(\frac{1}{1+2^{H_b(\varepsilon)}}\right) \cdot H_b(\varepsilon),$$

valor que se obtiene para

$$p_X(x_0) = p_X(x_3) = \frac{2^{H_b(\varepsilon)-1}}{1+2^{H_b(\varepsilon)}},\ p_X(x_1) = p_X(x_2) = \frac{1}{2\cdot(1+2^{H_b(\varepsilon)})}.$$

Ejercicio 5.12 *Solución*

1. $a = d = 0$, $b = c = \varepsilon_1$.
$$H(Y) = 2 + \frac{1}{2}\left[(1-\varepsilon_0)\log_2\frac{1}{1-\varepsilon_0} + (1+\varepsilon_0)\log_2\frac{1}{1+\varepsilon_0}\right].$$
Si se tiene en cuenta que $\frac{1}{2}(1+\varepsilon_0) = 1 - \frac{1}{2}(1-\varepsilon_1)$, se podrían reagrupar términos y escribir
$$H(Y) = 1 + H_b\left(\frac{1}{2}(1-\varepsilon_0)\right).$$
$$H(X,Y) = 2 + \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_0) + \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_1)$$
$$H(Y|X) = \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_0) + \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_1)$$
$$H(X|Y) = 1 + \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_0) + \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_1) - H_b\left(\frac{1}{2}(1-\varepsilon_0)\right)$$
$$I(X,Y) = 1 + H_b\left(\frac{1}{2}(1-\varepsilon_0)\right) - \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_0) - \frac{1}{2}H_b(\varepsilon_1)$$

2. La capacidad del canal es
$$C = 1 + H_b\left(p(1-\varepsilon_0)\right) - pH_b(\varepsilon_0) - (1-p)\frac{1}{2}H_b(\varepsilon_1) \text{ bits/uso}$$
para
$$p = \frac{1}{(1-\varepsilon_0)\cdot\left[1+2^{\frac{H_b(\varepsilon_0)-H_b(\varepsilon_1)}{1-\varepsilon_0}}\right]}.$$
La distribución para la que se consigue la capacidad es
$$p_X(x_0) = p_X(x_3) = \frac{p}{2},\ p_X(x_1) = p_X(x_2) = \frac{1-p}{2}$$

Ejercicio 5.13 *Solución*

a)
$$H(Y) = \frac{2}{3}(1-\varepsilon_0+\varepsilon_1) + H_b\left(\frac{2}{3}(1-\varepsilon_0+\varepsilon_1)\right)$$
$$H(Y|X) = \frac{2}{3}H_b(\varepsilon_0) + \frac{1}{3}H_b(2\varepsilon_1) + \frac{2}{3}\varepsilon_1.$$
$$H(X,Y) = \log_2(3) + \frac{2}{3}H_b(\varepsilon_0) + \frac{1}{3}H_b(2\varepsilon_1) + \frac{2}{3}\varepsilon_1.$$
$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$$
$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

b) En este caso el canal que nos queda es el *binary erasure channel* (BEC)
$$C = (1-\varepsilon_0) \text{ bits/símbolo, para } p_X(x_0) = p_X(x_2) = \frac{1}{2}.$$

c)

$$C = p(1-\varepsilon_0) + (1-p)2\varepsilon_1 + H_b\left(p(1-\varepsilon_0)+(1-p)2\varepsilon_1\right) - pH_b(\varepsilon_0) - (1-p)\left(H_b(2\varepsilon_1)+2\varepsilon_1\right)$$

para el valor

$$p = \frac{(1-2\varepsilon_1)\cdot 2^{\frac{H_b(\varepsilon_0)-H_b(2\varepsilon_1)-2\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0-1}} - \varepsilon_1}{(1-2\varepsilon_1-\varepsilon_0)\cdot 2^{\frac{H_b(\varepsilon_0)-H_b(2\varepsilon_1)-2\varepsilon_1}{2\varepsilon_1+\varepsilon_0-1}} + \frac{1}{2}\cdot(1-\varepsilon_0-2\varepsilon_1)}$$

siendo la distribución de entrada

$$p_X(x_0) = p_X(x_2) = \frac{p}{2},\ p_X(x_1) = 1-p$$

d) Si se tiene que $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$, es muy fácil ver que para $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0$ se tiene un canal ideal, en el que $H(Y|X) = 0$, y la capacidad se alcalza con símbolos de entrada equiprobables, que generan símbolos de salida equiprobables y por tanto la capacidad vale $\log_2(3)$, que es el máximo valor posible para un sistema con tres entradas y tres salidas.

Ejercicio 5.14 *Solución*

a) $a = b = c = d = 0$. Son dos canales BSC en paralelo con distintas probabilidades de error. Por lo tanto sería un buen modelo para un sistema que enviara bits a través de dos subsistemas independientes.

b)

$$H(X) = 1 + H_b(p).$$
$$H(Y) = 1 + H_b(p)$$
$$H(X,Y) = 1 + H_b(p) + pH_b(\varepsilon_1) + (1-p)H_b(\varepsilon_0)$$
$$H(Y|X) = pH_b(\varepsilon_1) + (1-p)H_b(\varepsilon_0)$$
$$H(X|Y) = pH_b(\varepsilon_1) + (1-p)H_b(\varepsilon_0)$$

c)

$$C = 1 + H_b(p) - pH_b(\varepsilon_1) - (1-p)H_b(\varepsilon_0)$$

con

$$p = \frac{1}{1+2^{H_b(\varepsilon_1)-H_b(\varepsilon_0)}}$$

siendo la distribución de entrada para la que se alcanza

$$p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{p}{2},\ p_X(x_0) = p_X(x_1) = \frac{1-p}{2}$$

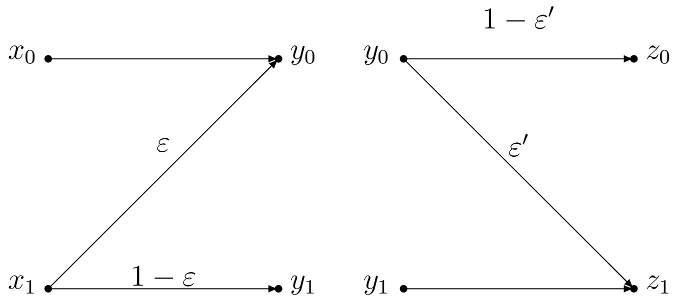
Ejercicio 5.15 *Solución*

a)

$$H(X) = H_b(\alpha),\ H(Y) = H_b((1-\alpha)(1-\varepsilon)),\ H(Z) = H_b(\beta(1-\varepsilon')$$
$$H(X,Y) = H_B(\alpha) + (1-\alpha)H_b(\varepsilon)$$
$$H(Y|Z) = H_b(\beta) + \beta H_b(\varepsilon') - H_b(\beta(1-\varepsilon'))$$

b) Las probabilidades de transición, dadas en la matriz de canal, son

$$\boldsymbol{P}_{Y|X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{P}_{Z|Y} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon' & \varepsilon' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



c) $I(X,Y) = H_b((1-\alpha)(1-\varepsilon)) - (1-\alpha)H_b(\varepsilon)$

d)

$$\boldsymbol{P}_{Z|X} = \boldsymbol{P}_{Y|X} \times \boldsymbol{P}_{Z|Y} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon' & \varepsilon' \\ \varepsilon(1-\varepsilon') & \varepsilon\varepsilon' + 1 - \varepsilon \end{bmatrix}$$

e) La concatenación será un BSC si $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}$

Ejercicio 5.16 *Solución*

a) La matriz de canal es

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Valores de las entropías en los dos escenarios

I)

$$H(X) = \log_2 3 = 1{,}585 \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(Y) = H_b\left(\frac{1}{3}(1+\varepsilon)\right) = H_b\left(\frac{1}{3}(2-\varepsilon)\right) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(Y|X) = p_1 \cdot H_b(\varepsilon) = \frac{1}{3} \cdot H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(X,Y) = \log_2 3 + \frac{1}{3} \cdot H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(X|Y) = \log_2 3 + \frac{1}{3} \cdot H_b(\varepsilon) - H_b\left(\frac{1}{3}(1+\varepsilon)\right) \text{ bits/símbolo.}$$
$$I(X,Y) = H_b\left(\frac{1}{3}(1+\varepsilon)\right) - \frac{1}{3} \cdot H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$

II)

$$H(X) = 2 \times 0 \log_2 0 + 1 \log_2 1 = 0 \text{ bits/símbolo,}$$
$$H(Y) = H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(Y|X) = p_1 \cdot H_b(\varepsilon) = H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(X,Y) = 0 + H_b(\varepsilon) = H_b(\varepsilon) \text{ bits/símbolo.}$$
$$H(X|Y) = 0 \text{ bits/símbolo,}$$
$$I(X,Y) = 0 \text{ bits/símbolo.}$$

c) La capacidad de canal, para cada caso, vale

   I) $C = \text{máx}_{p_X(x_i)} I(X,Y) = 1$ bit/uso, valor que se alcanza para $p=0$, lo que significa que

$$p_0 = \frac{1}{2},\ p_1 = 0,\ p_2 = \frac{1}{2}.$$

   II)

$$C = H_b\left(\frac{1}{1+2^{\frac{H_b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}}}\right) - \frac{1}{(1-\varepsilon)\cdot\left(1+2^{\frac{H_b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}}\right)}\cdot H_b(\varepsilon),$$

   que se obtiene para

$$p_X(x_0) = 1-p = 1-\frac{1}{(1-\varepsilon)\cdot\left(1+2^{\frac{H_b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}}\right)},\ p_X(x_1) = p = \frac{1}{(1-\varepsilon)\cdot\left(1+2^{\frac{H_b(\varepsilon)}{1-\varepsilon}}\right)}.$$