TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN

Examen A

(Tiempo: 180 minutos)

Ejercicio 1

Sea $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario, de media $m_X = 0$, y función de autocorrelación

$$R_X(\tau) = \text{sinc}(\tau).$$

A partir del mismo, se obtiene el proceso $Y(t)$ como

$$Y(t) = X(t) + \frac{1}{2} \cdot X(t-1).$$

Este proceso pasa por un sistema lineal e invariante con la siguiente respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}+\cos(\omega)}}, & \text{si } |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\omega| > \pi \end{cases},$$

dando lugar al proceso $Z(t)$.

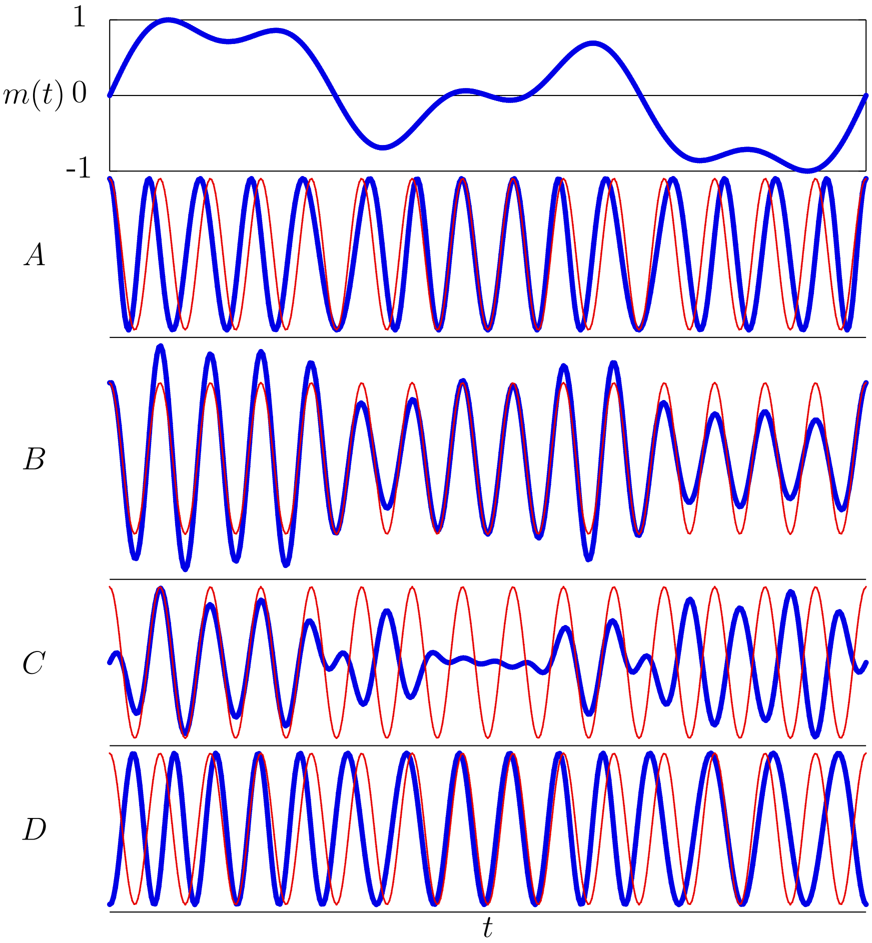
a) Calcule la media, $m_Y(t)$, la función de autocorrelación, $R_Y(t+\tau, t)$, la densidad espectral de potencia, $S_Y(j\omega)$, y la potencia, P_Y, del proceso $Y(t)$, y diga si este proceso es o no estacionario y por qué.

b) Calcule la media, $m_Z(t)$, la función de autocorrelación, $R_Z(t+\tau, t)$, la densidad espectral de potencia, $S_Z(j\omega)$, y la potencia, P_Z, del proceso $Z(t)$, y diga si este proceso es o no estacionario y por qué, y si los procesos aleatorios $Y(t)$ y $Z(t)$ son conjuntamente estacionarios y por qué.

(2 puntos)

 ©Marcelino Lázaro, 2014

Ejercicio 2



a) Las figuras A, B, C y D muestran la señal modulada cuando se transmite la señal moduladora $m(t)$ utilizando cuatro tipos de modulaciones analógicas: AM convencional (en este caso con índice de modulación $a = \frac{1}{2}$), modulación de doble banda lateral (DBL), modulación de fase (PM) y modulación de frecuencia (FM). Identifique a qué tipo de modulación corresponde cada una de las figuras, indicando los rasgos distintivos de la misma (sin esta indicación, la respuesta no será considerada como válida).

NOTA: para facilitar la identificación, se ha superpuesto en las 4 figuras en trazo fino la portadora $c(t)$.

b) Diga qué tipo de modulación analógica, de entre todas las posibles (no se limite a las 4 indicadas en el apartado anterior), utilizaría en los casos que se van a describir a continuación. Para cada caso, debe indicar de forma precisa qué característica de dicha modulación es la que la hace apropiada, y qué ventaja proporciona respecto al resto de modulaciones (sin esta indicación, la respuesta no será considerada como válida).

i) Sistema que transmite señales de alta fidelidad, donde lo más importante es la calidad de la señal recibida.

ii) Sistema en que la principal prioridad es que los receptores sean lo más económicos que sea posible.

iii) Un sistema de multiplexación de señales de voz por un mismo cable, con un ancho de banda de 400 MHz, en el que se desea poder multiplexar el mayor número posible de señales de voz.

(2 puntos)

 ©Marcelino Lázaro, 2014

Ejercicio 3

Un sistema de comunicaciones utiliza la siguiente constelación de 4 símbolos equiprobables

$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

a) Para un sistema que utilice la constelación especificada

   i) Realize la asignación binaria con el objetivo de tener la mínima probabilidad de error binaria, explicando por qué utilizar esa asignación, y no otra, implica minimizar la probabilidad de error (sin esta explicación, la respuesta no será considerada como válida).

   ii) Obtenga la energía media por símbolo y discuta si se trata de una constelación con un buen compromiso entre prestaciones y uso de energía.

b) Suponga para este apartado que se quiere transmitir a través de un canal paso bajo (transmisión en banda base) con ruido aditivo térmico (con el modelo estadístico habitual). En ese caso

   i) Diseñe un modulador adecuado para ese tipo de canal, explicando la razón de la elección.

   ii) Represente la señal $s_2(t)$ asociada al símbolo $\boldsymbol{a}_2$ si se utiliza ese modulador.

   iii) Diseñe un demodulador óptimo si se utiliza ese modulador.

   iv) Diseñe el decisor óptimo (de mínima probabilidad de error de símbolo).

c) Suponiendo que con el modulador elegido en el apartado anterior se tiene una perfecta adaptación al canal, o lo que es lo mismo, que se transmite a través de un canal gausiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$, siendo en este caso $N_0 = 0.02$.

   i) Calcule la aproximación habitual de la probabilidad de error de símbolo, la aproximación de la probabilidad de error de bit si se utiliza la asignación binaria del primer apartado, y la expresión de la cota holgada, indicando claramente el valor numérico de todos los términos que aparezcan en la expresión.

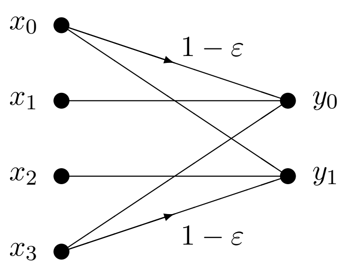
   ii) Calcule la probabilidad de error de símbolo exacta, y exprésela como una función de la relación E_s/N_0.

(3 puntos)

 ©Marcelino Lázaro, 2014

Ejercicio 4

Un sistema de comunicaciones se puede modelar según un DMC con cuatro símbolos de entrada pertenecientes al alfabeto $\mathcal{A}_X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ y dos símbolos de salida con alfabeto $\mathcal{A}_Y = \{y_0, y_1\}$. La distribución de probabilidades de los símbolos de entrada se denota como $p_X(x_i) \equiv p_i$ con $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.



a) Obtenga la representación mediante matriz de canal de las probabilidades de transición del DMC.

b) Determine la máxima entropía que se puede alcanzar a la entrada del canal, ($H(X)$ máxima), la máxima entropía que se puede alcanzar a la salida del canal ($H(Y)$ máxima), así como las distribuciones de probabilidades de los símbolos a la entrada, $\{p_i\}_{i=0}^{3}$, con la que se alcanza dicho máximo para cada uno de los casos (por separado).

c) Obtenga las entropías $H(Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, $H(X,Y)$ y la información mutua $I(X,Y)$ cuando la distribución de los símbolos de entrada es $p_i = 1/4$ para todo i.

d) Obtenga la capacidad del canal, indicando la distribución de entrada para la que se obtiene. NOTA: Para obtener la capacidad, puede ser conveniente tener en cuenta la simetría del DMC.

(3 puntos)

©Marcelino Lázaro, 2014