TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN
Examen
(Tiempo: 180 minutos)

Ejercicio 1

La señal que transmite un sistema de comunicaciones se modela mediante un proceso aleatorio estacionario $X(t)$, cuya media es $m_X = 1$ y cuya función de autocorrelación es

$$R_X(\tau) = A \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot \left[1 + \cos(\omega_c \tau)\right],$$

donde $T = \frac{2\pi}{W}$ segundos, $W = 2\pi \cdot 10^9$ radianes/s, $\omega_c = 2W = 2\pi \cdot 2 \times 10^9$ radianes/s, y la constante A vale $A = 10^{-9}$.

Durante la transmisión a esta señal se le suma ruido térmico $n(t)$, modelado con el modelo habitual para este tipo de ruido, un proceso aleatorio estacionario, blanco y gaussiano.La temperatura de ruido es 290°K.

El receptor es un filtro paso bajo ideal de ancho de banda W radianes/s.

a) Defina lo que es un proceso aleatorio blanco, lo que es un proceso gaussiano, y diga si la salida de un sistema lineal e invariante a un proceso blanco es o no es un proceso blanco, y si la salida de un sistema lineal e invariante a un proceso gaussiano es o no es un proceso gaussiano.

b) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso aleatorio $X(t)$, y el valor de N_0 correspondiente a la densidad espectral de potencia del ruido térmico $n(t)$, y represente las densidades espectrales de potencia tanto del proceso que modela la señal como del ruido, $S_X(j\omega)$ y $S_n(j\omega)$.

c) Calcule la media, la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de la señal a la salida del filtro receptor (sin considerar el ruido).

d) Calcule la relación señal a ruido, expresada en decibelios, a la entrada del receptor y a la salida del receptor.

NOTA: Algunas constantes de interés

Constante de Planck: $h = 6.6 \times 10^{-34}$J·s, Constante de Boltzmann: $k = 1.38 \times 10^{-23}$J/°K.

(2 puntos)

Ejercicio 2

a) Varios tipos de modulaciones analógicas de amplitud requieren de la utilización de un receptor coherente.

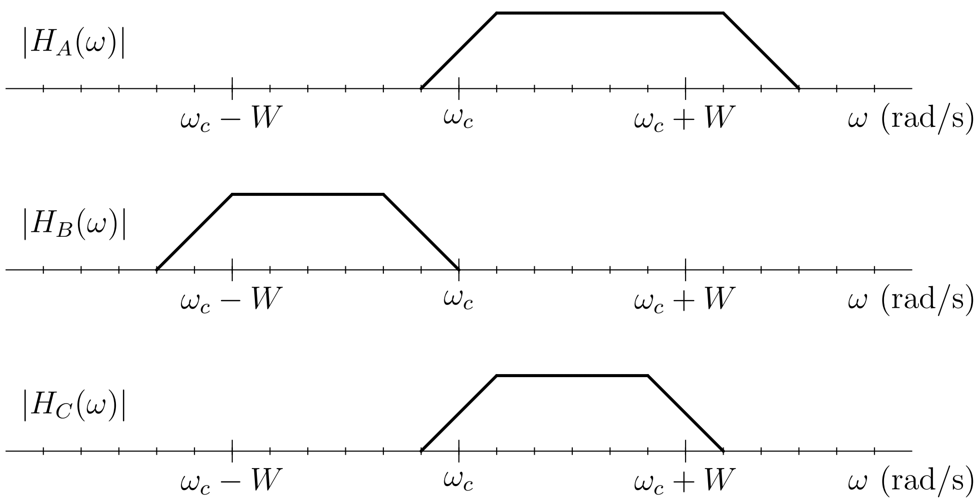
   i) Explique claramente qué es un receptor coherente, y dibuje un diagrama de bloques que muestre los distintos elementos que lo forman.

   ii) Indique qué tipos de modulación de amplitud requieren la utilización de este tipo de receptor, y para cada una de ellas explique el efecto de utilizar un receptor no coherente.

b) Para una modulación de amplitud de banda lateral vestigial, con una señal moduladora de ancho de banda W rad/s

   i) Explique cómo se genera la señal modulada, y dibuje un diagrama de bloques con los distintos elementos que forman el transmisor.

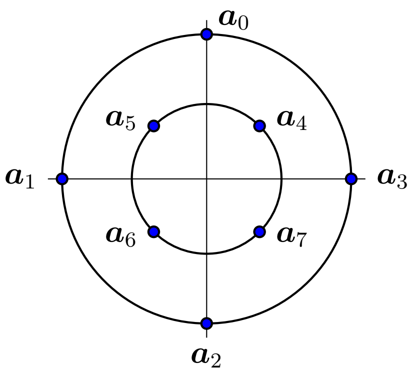
   ii) Indique qué condición tiene que cumplir el filtro de banda lateral vestigial para este tipo de modulación, y para cada uno de los filtros de la figura, demuestre si se cumple o no dicha condición, y en caso de que así sea, diga si se utilizaría para una modulación de banda lateral superior o inferior.



(2 puntos)

Ejercicio 3

Un sistema de comunicaciones que transmite a una tasa de símbolo $R_s = 4$ Mbaudios utiliza la constelación de 8 símbolos que se muestra en la figura, y que se denomina 8-QAM circular. En este caso $A = 1 + \sqrt{3}$ y $B = 1$, y los 8 símbolos se transmiten con igual probabilidad.



$$\boldsymbol{a}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ +A \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} +B \\ +B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -B \\ +B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -A \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -B \\ -B \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} +A \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a}_7 = \begin{bmatrix} +B \\ -B \end{bmatrix}$$

El modulador, para una tranmisión banda base, está definido por

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \le t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \phi_1(t) = \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & \text{si } \frac{T}{2} \le t < T \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

a) Para este sistema

   i) Calcule la velocidad de transmisión binaria y la energía media por símbolo del sistema.

   ii) Diseñe el demodulador y el decisor óptimos. Para el demodulador, utilice filtros adaptados causales, y dibuje el diagrama de bloques del demodulador y la respuesta de los filtros causales.

   iii) Calcule la cota de la unión y la aproximación habitual de la probabilidad de error.

b) Temporalmente se produce un error en el funcionamiento del demodulador, de forma que no puede obtener la segunda coordenada de la representación vectorial de la señal recibida, y sólo dispone de la primera (es decir, del vector $\boldsymbol{q}[n] = \begin{bmatrix} q_0[n] \\ q_1[n] \end{bmatrix}$ sólo se dispone de $q_0[n]$. Mientras se resuelve el problema, el usuario decide no enviar los 8 símbolos, sino sólo 4, con el coste de perder tasa de transmisión binaria, pero con el objetivo de tener una mejor probabilidad de error.

   i) Elija el subconjunto de 4 símbolos que transmitiría si se quieren obtener las mejores prestaciones teniendo en cuenta el problema del demodulador.

   ii) Diseñe el decisor que utilizaría en ese caso.

   iii) Calcule la probabilidad de error exacta que tendría el sistema en ese caso.

(3 puntos)

Ejercicio 4

Un canal discreto sin memoria está caracterizado mediante la siguiente matriz de canal

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon_0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-\varepsilon_1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1-\varepsilon_1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon_0 & d \end{bmatrix}$$

donde ε_0 y ε_1 son dos constantes de valor arbitrario, positivas y menores que la unidad.

a) Determine los valores de a, b, c y d, dibuje la representación en diagrama de rejilla del canal discreto sin memoria, e indique el valor máximo que puede tomar la entropía de la entrada para este canal, y en qué caso se obtiene dicho valor.

b) Si los símbolos de entrada tienen las siguientes probabilidades

$$p_X(x_0) = \frac{1}{2},\ p_X(x_1) = \frac{1}{4},\ p_X(x_2) = \frac{1}{8},\ p_X(x_3) = \frac{1}{8},$$

calcule las siguientes medidas cuantitativas de información: $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(Y|X)$, $H(X|Y)$, e $I(X,Y)$.

c) Para el caso particular $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$, obtenga la capacidad del canal y determine la distribución de entrada para la que se alcanza dicha probabilidad.

(3 puntos)