



# Cap. 5.- Fundamentos de turbomáquinas.



Universidad  
Carlos III de Madrid

Escuela Politécnica Superior

Autores:

Pedro A. Rodríguez Aumente

Antonio Lecuona Neumann

## Ejercicios propuestos

Autores:

P.A. Rodríguez

A. Lecuona



MOTORES DE  
COMBUSTIÓN  
INTERNA

La información contenida en este trabajo sirve de propósito exclusivo para la enseñanza y la de procedencia externa ha sido obtenida de las mejores fuentes que se han podido encontrar, generalmente de reconocido prestigio. No obstante los autores no garantizan la exactitud, actualización, disponibilidad o perfección de su contenido ni se responsabilizan del mismo. Por ello, no será/n responsable/s de cualquier error, omisión o daño causado por el uso de la información contenida, no tratando con este documento prestar ninguna clase de servicio profesional o técnico; antes bien, se ofrece como simple guía general de apoyo a la docencia. Cualquier indicación de error u omisión será bienvenida. El contenido del documento pudiera estar sujeto a derechos de autor o de propiedad industrial o intelectual, por lo que su reproducción total o parcial queda prohibida.



FUNDAMENTOS DE  
TURBOMÁQUINAS

1. Repaso de Termodinámica
2. Fundamentos de Turbomaquinaria
3. Anexos
4. Ejercicios
5. Autoevaluación
6. Bibliografía

## 5.4.- EJERCICIOS (*volver*)

**Ejercicio I.-** Se pretende seleccionar un compresor axial multiescalón para su uso en una turbina de gas. Los requerimientos en condiciones operativas nominales de dicho compresor son: una relación de presiones  $\Pi_{tt} = 25$  y un gasto másico de aire en el punto de diseño de  $\dot{m} = 100$  kg/s. Asuma que:

- El aire que entra al compresor está a  $T_{amb} = 15$  °C y  $P_{amb} = 1$  bar.
- Por resistencia estructural la velocidad de punta de álabe de cualquiera de los escalones queda limitada a  $U_{ext} = 420$  m/s. (supersónica para los primeros escalones)
- El aumento de entalpía total de todos los escalones es el mismo (pero no lo será  $\Pi$ ).

1.- Determine: el número de escalones  $Z_c$  necesario.

Será el mínimo para lograr un funcionamiento eficiente. Asumimos que el incremento de presión y de temperatura en la línea media, generalmente usada para representar a todo el compresor axial, coinciden con los de la punta, por aplicarse en cada escalón el mismo  $\tau_{fl}$  con un mismo rendimiento de radio interior a exterior. De los [gráficos de Cordier](#), el  $D_s - N_s$  no nos conviene, pues separa  $\omega$  y  $D$ , y nos interesan juntos para configurar  $U_{ex}$  que viene limitada. Nos conviene el gráfico equivalente  $\Phi - \Psi$ . En concreto, el coeficiente de carga global isentrópico, idóneo de cualquiera de los escalones se busca en el rango de compresores axiales y hacia la izquierda, para dar un  $\Psi$  alto, pero sin apurar el rango:

$$0,03 \approx \Psi_{g,D,s} = \frac{\Delta h_{t,s}}{\omega^2 (2r_{ext})^2} \rightarrow \Delta h_{t,s} = 0,12 U_{ext}^2 \left. \vphantom{\Psi_{g,D,s}} \right\} \rightarrow \Delta h_{t,s} = 21,2 \times 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \rightarrow \Delta T = 21,2 \text{ °C}$$

Radio medio entre 1 y 2:  $U_{ext} = \omega r_{ex} = 420 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

El salto entálpico isentrópico para todo el compresor es, de acuerdo a la Ec. (5.61) y con un  $\gamma$  medio:

$$\Delta h_{t,s} = c_p T_{t,e} \left( \Pi_{tt}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = 1.000 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} (25 + 273,15) \text{K} \left( 25^{\frac{1,35-1}{1,35}} - 1 \right) = 389 \times 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Dividiendo ambas cantidades y redondeando por arriba, resultan  $Z_c = 19$  escalones.

2.- Determine el diámetro del primer escalón.

Del mismo gráfico de Cordier  $\Psi - \Phi$ , leyendo en abscisas, se deduce que asumiendo  $D_1 = 2r_{ext}$ :

$$0,07 \approx \Phi_Q = \frac{\dot{m}}{\rho_e \omega 2r_{ext} D_1^2} \rightarrow D_1 = \sqrt{\frac{\dot{m}}{0,14 \rho_e U_{ext}}} = \sqrt{\frac{100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}{0,14 \times 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 420 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} = 1,19 \text{ m}$$

Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona



MOTORES DE  
COMBUSTIÓN  
INTERNA



1. Repaso de Termodinámica
2. Fundamentos de Turbomaquinaria
3. Anexos
4. Ejercicios
5. Autoevaluación
6. Bibliografía

## 5.4.- EJERCICIOS (*volver*)

**Ejercicio II.-** (de ampliación) Con lo expuesto en teoría se dispone de dos expresiones del trabajo específico  $\tau_{fl}$ . Una lo relaciona con las velocidades a la entrada y salida del rotor, Ec. (5.39) y la otra con el rendimiento (de todo el escalón si se desea el efecto de todo él, o de solo el rotor) y también con lo que estamos interesados: la relación de presiones  $\Pi$ , Ec. (5.61). Por sencillez particularizaremos para compresores de geometría dada, axiales  $\rightarrow U_2 = U_1 = U$  sin corona de álabes guía antes del rotor  $\rightarrow V_{\theta,1} = 0$ .

Para entender la forma de las curvas características iguálense ambos trabajos específicos y de los triángulos de composición de las velocidades medias de un compresor axial. De ello obténgase una expresión genérica de  $\Pi$  como función del régimen de giro  $n$  y del radio medio  $r_m$ . Procédase con los siguientes pasos:

1.- Obtenga la incidencia del rotor, sin álabes guía, como función de la geometría y de variables operativas. En primer lugar considérese, Fig. (5.12), que los álabes pueden admitir una incidencia  $i$  de la corriente media, pequeña para evitar el desprendimiento de la corriente (positivo  $i > 0$  o negativo  $i < 0$ ) y que además la deflexión geométrica impuesta por el álabe  $\theta$  está minorada por una desviación de la dirección marcada por la línea media del perfil  $\delta$ , pequeña y cuasi-constante, salvo desprendimiento de la corriente. Así, la deflexión de la corriente es:  $\phi = \theta + i - \delta$ . Por lo tanto, la incidencia positiva aumentará  $\phi$  y con ello  $V_{\theta,2}$  y con ello  $\tau_{fl}$ , como se puede ver.

Los ángulos de la corriente, en coherencia, son todos  $> 0$  si viendo desde la entrada hacia la salida, aumentan  $U$ , Fig. (5.14).

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Inclinación de la corriente relativa: } \beta_1 = -\text{atan} \left( \frac{U}{V_{z,1}} \right) \\
 V_{z,1} = \frac{\dot{m}}{\rho_1 A_{z,1}}; \text{ Area de paso axial: } A_{z,1} = \pi r_m h; U = 2\pi n r_m \\
 \text{Inclinación de la línea media el su borde de entrada: } \beta'_1 < 0
 \end{array} \right\} \rightarrow i = \beta'_1 + \text{atan} \left( \frac{U}{V_{z,1}} \right) \quad (5.II.1)$$

$\propto \Pi_n \Pi_m^{-1}$ , Ec.(5.69)  
 ceteris paribus  
 $> 0$  si  $U$  es alto frente a  $V_{z,1}$   
 y  $\beta'_1$  poco negativo

Los desprendimientos, sea por  $i$  demasiado positivo o negativo, originan un aumento de irreversibilidad interna  $\sigma$  que se traduce en una disminución de  $\eta$ . Ello justifica que en la Fig. (5.17) se observen caídas de  $\eta$  en los extremos inferior y superior de  $\Pi_m$ , a la izquierda por ángulo a la izquierda por desprendimiento positivo y a la derecha por desprendimiento negativo, seguido de la aparición de una sección entre álabes donde  $M = 1$  y ondas de choque.

Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona



MOTORES DE COMBUSTIÓN INTERNA



1. Repaso de Termodinámica
2. Fundamentos de Turbomaquinaria
3. Anexos
4. Ejercicios
5. Autoevaluación
6. Bibliografía

## 5.4.- EJERCICIOS [\(volver\)](#)

### Ejercicio II (cont.).

2.- Obtenga  $V_{\theta,2}$  como función de los parámetros básicos de las curvas características. Asuma que  $V_{z,2} = V_{z,1} = V_z$  por ligera reducción de la altura del álabe  $h$  al ir corriente abajo.

$$\left. \begin{aligned} \text{Fig. (5.II.a): } V_{\theta,2} &= V_z \tan(\beta_2) + U \\ \beta_2 &= \beta'_2 - \delta; \beta'_2 = \beta'_1 + \theta \\ \beta'_1 &= \beta_1 + i \quad (5.II.b) \end{aligned} \right\} \rightarrow V_{\theta,2} = V_z \tan \left[ \beta_1 + \overbrace{i + \theta - \delta}^{\phi = \text{deflexión}} \right] + U \quad (5.II.2)$$

3.- De la igualdad de los trabajos específicos obtenga la curva característica  $\Pi_{c,tt} = \varphi'(\Pi_m, \Pi_n, \gamma)$ , Ec. (5.69):

Enunciado:  $V_{\theta,1} = 0$ ; Ec. (5.39):  $\tau_{fl} = \kappa UV_{\theta,2}$

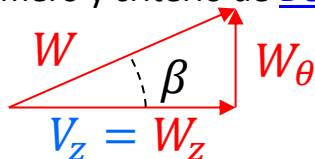
$$\text{Ec. (15.61): } \Pi_{c,tt} = \left[ 1 + \eta_c \frac{\tau_{fl}}{c_p T_{t,e}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Pi_{c,tt} = \left[ 1 + \underbrace{\eta_c}_{\zeta(\Pi_m, \Pi_n)} \underbrace{\kappa}_{\varrho(\Pi_n^2, \Pi_m)} \frac{U^2}{c_p T_{t,e}} \left( 1 + \frac{V_z}{U} \tan \left[ \underbrace{\beta'_1 + \theta}_{\text{ctes. geom.}} + \underbrace{i}_{i = \xi(\Pi_m)} - \underbrace{\delta}_{\delta = \chi(i)} \right] \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (5.II.3)$$

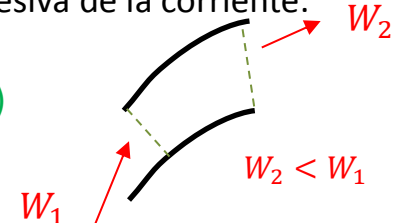
Ec.(5.22)      Ec.(5.69)       $i = \xi(\Pi_m)$        $\delta = \chi(i)$        $\delta = \zeta(\Pi_m)$

Las variables coloreadas son conocidas y las negras son experimentales. Esta ecuación indica:

- $\Pi_{c,tt}$  puede determinarse si se miden o se estiman  $\eta_c = \zeta(\Pi_m, \Pi_n)$  y  $\delta = \zeta(\Pi_m)$  (o equivalentemente  $\phi$ ) y  $\kappa$ . A mayor  $\eta$  mayor  $\Pi$ .
- $\Pi_{c,tt}$  **crece rápidamente con  $U$**  ( $2, \frac{\gamma}{\gamma-1} > 1$ ) y algo menos rápidamente con  $\beta_2, \frac{V_z}{U}, i$  y  $\eta$ .
- $\Pi_{c,tt}$  crece si  $\delta$  decrece (buen guiado y ausencia de desprendimientos y entrada en pérdida).
- $\beta_2 = \beta_1 + \phi$ .  $\phi$  **esta limitado por la entrada en pérdida**, a un valor orientativo dado por el número y criterio de [De Haller](#), con  $i \approx 0$ , que evita una difusión excesiva de la corriente:



$$Ha = \frac{W_2}{W_1} = \frac{\tan(\beta_1)}{\tan(\beta_2)} > 0,7 \quad (5.II.4)$$



Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona





FUNDAMENTOS DE  
TURBOMÁQUINAS

1. Repaso de Termodinámica
2. Fundamentos de Turbomaquinaria
3. Anexos
4. Ejercicios
5. Autoevaluación
6. Bibliografía

Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona

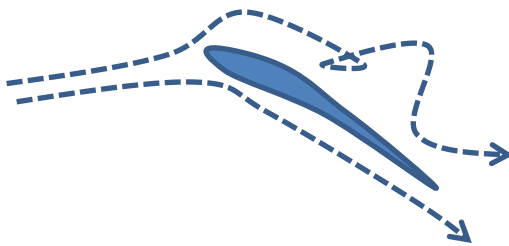


MOTORES DE  
COMBUSTIÓN  
INTERNA

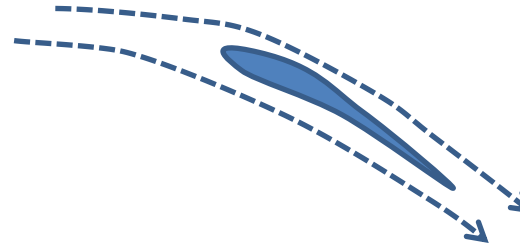
## 4.- EJERCICIOS ([volver](#))

### Ejercicio II (cont.).

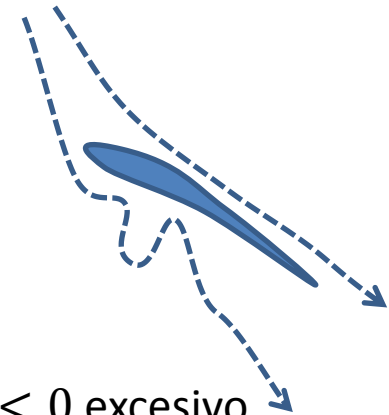
- Puede lograrse un compresor (y un ventilador) axial con placas planas  $\theta = 0$ , simplemente provocando incidencia  $i$ , si bien, con bajo  $\eta$  porque la corriente se desprende.
- Dado que  $U = \omega r$ , para un mismo  $\Pi_c$ , hacia la periferia del álabe es necesario reducir  $\theta$ , y aumentarlo hacia el centro para compensar el efecto de la variación de  $U$ . A la vez es necesario hacer más negativo  $\beta'_1$  hacia el centro para tener la incidencia deseada, Ec (5.II.1). Esta evolución del álabe de raíz a punta se conoce como torsión.
- Partiendo de un valor de  $\pi_m$  próximo al de  $\eta_{max}$ , corresponderá a  $i \approx 0$ . A  $\pi_n = cte.$ , Al variar  $\pi_m$ , Ec. (5.II.1):
  - Una reducción hace aumentar  $i$ , aumentando las pérdidas hasta la llegada al bombeo (entrada en pérdida).
  - Un aumento hace disminuir  $i$ , y al entrar en pérdida negativa el perfil,  $i < 0$ , ocasiona un chorro sónico que impide aumentos de  $\pi_m$ .
  - A  $\Pi$  elevados, como  $M_z = V_z/a$  es alto, la entrada en bloqueo sónico es antes, por lo que el rango entre bombeo y bloqueo se estrecha.



$i > 0$  excesivo.  
Desprendimiento  
positivo



$i \approx 0$  correcto,  
desprendimiento simultáneo  
en el borde de salida



$i < 0$  excesivo.  
Desprendimiento  
negativo.



FUNDAMENTOS DE  
TURBOMÁQUINAS

1. Repaso de Termodinámica
2. Fundamentos de Turbomaquinaria
3. Anexos
4. Ejercicios
5. Autoevaluación
6. Bibliografía

## 5.4.- EJERCICIOS (volver)

**Ejercicio III.-** Obtenga la deflexión media de la corriente  $\phi_{ext}$  necesaria para el primer escalón del compresor axial del [Ejercicio I](#). Para ello se sugiere la siguiente secuencia:

1.- Calcule  $V_{z,ext}$  y comente el resultado:

Usemos la definición del coeficiente de flujo  $\Phi$ :

$$\left. \frac{V_z}{U} \Big|_{ex} = t \frac{\overbrace{V_z \pi r_{ex}^2}^q}{\omega \pi \left(\frac{D_I}{2}\right)^3} = \frac{8}{\pi} \Phi_Q, \text{ según la Ec. (5.71)} \right\} \rightarrow V_{z,ex} = \frac{8}{\pi} 420 \frac{\text{m}}{\text{s}} 0,07 = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejercicio I:  $\Phi_Q = 0,07$

Es mucho menor que la velocidad de arrastre, cosa que cambia al ir hacia el eje, pues  $V_z$  suele permanecer relativamente constante a lo largo de todo el álabe, mientras que  $U$  disminuye hacia el eje.

2.- Calcule la velocidad relativa al rotor, asumiendo que éste no va precedido de una corona de álabes-guía (estator de pre-giro) y comente el resultado:

Esto significa que la corriente incidente carece de velocidad tangencial, luego:  $V_{\theta,1} = 0$ , con lo que:

$$W_{1,ex} = \sqrt{V_{z,ex}^2 + U_{ex}^2} = 427 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El álabe es supersónico en la zona de la punta, al ser  $a \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  a nivel del mar.

3.- Calcule la inclinación de la corriente media incidente a la punta de los álabes del primer rotor:

$$\beta_{1,ex} = -\arctan\left(\frac{U}{V_z}\right)_{ex} = -79,9^\circ \text{ Para que } i \approx 0, \text{ el álabe ha de estar muy inclinado en su punta.}$$

4.- Calcule  $\phi_{ext}$ , introduciendo un valor estimado del rendimiento del rotor  $\eta_{tt} = 0,9$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. (5.5): } V_{\theta,2} = V_z \tan[\beta_1 + \phi] + U \\ \text{Ec. (5.II.3): } \Delta h_t = \frac{\Delta h_{t,s}}{\eta_{tt}} = \kappa U V_{\theta,2}; \kappa \cong 1 \text{ por ser axial} \end{array} \right\} \rightarrow \phi_{ex} = \underbrace{\arctan\left[\left(\frac{4\Psi_{g,D,s}}{\eta_{tt}} - 1\right) \frac{\pi}{8\Phi_Q}\right]}_{\beta_{2,ext} = -78,4^\circ} - \beta_{1,ex} = 1,5^\circ$$

Es una deflexión difícil de alcanzar en supersónico sin infligir irreversibilidades excesivas. El número de De

Haller es, Ec. (5.II.4):  $Ha = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\tan\beta_2}{\tan\beta_1} = 0,87 > 0,7$ , corroborando la viabilidad del diseño.

Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona



MOTORES DE  
COMBUSTIÓN  
INTERNA





- 1. Repaso de Termodinámica
- 2. Fundamentos de Turbomaquinaria
- 3. Anexos
- 4. Ejercicios
- 5. Autoevaluación
- 6. Bibliografía

## 5.4.- EJERCICIOS (*volver*)

**Ejercicio IV.-** Continuemos con los datos del [Ejercicio I](#). Para determinar en primera aproximación el diseño de la turbina adecuada para el compresor ya estudiado, se puede hacer la suposición de que cada etapa de cada escalón expansiona lo mismo, lo cual es coherente con el diseño, de alta eficiencia, con [grado de reacción](#)  $R \approx 0,5$ . Para más simplificación, podemos asumir que en condiciones nominales de funcionamiento cada etapa acelera hasta la velocidad del sonido, al ser esto próximo a la realidad, y por ser habitualmente tanto en estator como en rotor conductos convergentes. Además, si se acepta  $R = 0,5$  el diagrama de composición de velocidades de rotor es simétrico del de estator, significando ello el mismo valor absoluto de los ángulos y las mismas velocidades, [Fig. \(5.12\)](#). Para mantener  $V_z$  constante, la menor densidad corriente abajo se acomoda aumentando la altura del álabe  $h$  y  $r_m$ , [Ec. \(5.53\)](#).

1.- Calcule el número de escalones de turbina necesarios  $Z_e$ :

Asumimos que todos los escalones se componen de estator seguido de rotor (en el último escalón no hay enderezador de corriente). La expansión isentrópica hasta el bloqueo sónico es, [Ec. \(5.23\)](#) con  $M = 1$  y un valor apropiado para los gases quemados a las temperaturas típicas de una TG,  $\gamma = 1,33$ :  $\Pi_{t,cri} \doteq \frac{p_{0t}}{p_1} =$

$\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,85$ . Si el rotor recibe la corriente con un Mach relativo  $M_{rel} \doteq \frac{W}{a} < 1$  y por ello la presión es continua. Según la , [Ec. \(5.23\)](#) es:

$$\Pi_{t,rel} \doteq \frac{p_{1t}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{rel}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

El rotor repite la expansión sónica y finalmente deja una corriente absoluta también con  $M_r$  por identidad con el rotor. Luego, su expansión total es igual que la del estator  $\Pi_{t,cri} \Pi_{t,rel}^{-1}$ . En consecuencia, la expansión por escalón es, si tomamos un valor aproximado  $M_r = 0,4$ :

$$\Pi_{tt,I} = \frac{p_{0t}}{p_{2t}} = \left(\Pi_{t,cri} \Pi_{t,rel}^{-1}\right)^2 = 2,77$$

Es de destacar que el cociente de temperaturas de remanso, asumiendo isentropía, es igual pero sin elevar a  $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ , por lo que se puede decir que el salto de entalpía  $\Delta h_t$  es mayor en los primeros escalones, práctica habitual para aliviar la carga térmica de los escalones siguientes al primero. El número de escalones viene dado del cociente de la relación de expansión de todo el conjunto y la de un escalón:

$25 = 2,77^{Z_e} \rightarrow Z_e = \frac{\ln 25}{\ln 2,77} = 3,2$ , optamos por 3 escalones, por la proximidad a esa cifra. Nótese que  $Z_e < Z_c$ . 7

Autores:  
P.A. Rodríguez  
A. Lecuona

