



INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

- 1.1. Capital Financiero
- 1.2. Operación Financiera. Clasificación
- 1.3. Ley Financiera
- 1.4. Factor Financiero
- 1.5. Suma Financiera
- 1.6. Valor Actual Y Valor Final





Acaba de recibir la noticia de le ha correspondido un premio de 100.000€. Usted puede elegir si desea recibir los 100.000€ hoy, o si prefiere recibir los 100.000 € dentro de dos años.

¿Cuándo prefiere usted el dinero?

Si prefiere los 100.000 € hoy

es porque usted ya conoce aunque no sea consciente uno de los principios más importantes de finanzas:

EL DINERO HOY VALE MÁS QUE EN EL FUTURO



¿Qué haría usted con sus 100.000 €?

1. Gastarlo en el coche con el que siempre soñó.
2. Guardarlo de momento en la caja fuerte de casa y aplazar cualquier compra para dentro de dos años que termina sus estudios y piensa independizarse
3. Guardarlo en la caja fuerte para cuando haga falta porque cree que los tiempos están para ahorrar.
4. Ingresar el dinero en su Banco





Si su respuesta ha sido:

1. Usted ha decidido consumir. Ojo piense si ha subestimado sus necesidades futuras frente a las presentes.
2. Sus posibles necesidades futuras le hacen aplazar la decisión. Sin embargo ha olvidado algo ¿por qué no pone su dinero a trabajar?
3. Si de verdad quiere ahorrar ¡ponga su dinero a trabajar! Esta perdiendo la oportunidad de invertir el dinero durante el tiempo que no lo vaya a necesitar.
4. Felicidades, no ha caído en el consumismo, y ha puesto su dinero a trabajar. Ha realizado una OPERACIÓN FINANCIERA.





Una Operación Financiera es un intercambio temporal de capitales

Disponía de 100.000 € y los ha invertido en su BANCO, podemos decir que se los ha prestado a su BANCO. A cambio del deposito de ese dinero, EL BANCO se compromete a remunerarle con un interés pongamos del 10% anual.

Si hoy deja el dinero en la cuenta durante un año, el saldo dentro de un año será:

$$\text{Saldo}_1 = 100.000 + 0.1 * 100.000 = 110.000\text{€}$$

los 100.000 que invirtió y los 10.000€ que ha ganado de intereses

Si repetimos la operación otro año más tendremos los 110.000 que tenía en la cuenta el año 1 más 11.000 € de intereses lo que hace un total de 121.000€ con los que seguro puede cenar bastante mejor de si se hubiera gastado los 100.000€ dos años antes.

$$\text{Saldo}_2 = 110.000 + 0.1 * 110.000 = 121.000\text{€}$$





- Cuando usted presta dinero a alguien, la cantidad prestada se llama **principal**. El **prestamista renuncia a su consumo** hoy y concede al prestatario la capacidad de consumir, el dinero.
- Es lógico el prestamista quiera beneficiarse en este traspaso de capacidad de consumo, y **ponga precio a su renuncia** de consumo . Este precio del dinero que presta se llama interés. **El interés es el precio** que el prestamista cobra por el uso de su dinero a terceros.
- Podemos expresar el tipo de interés:
 - En tanto por cien: 3.5%
 - En tanto por uno: 0.035
 - En puntos básicos 350 PB. Un 1% = 100 PB
- Si el tipo de interés sube del 3.5% al 4% , la subida puede expresarse:
 - El interés ha subido medio punto porcentual
 - El interés ha subido 50 PB





Elementos de una operación financiera

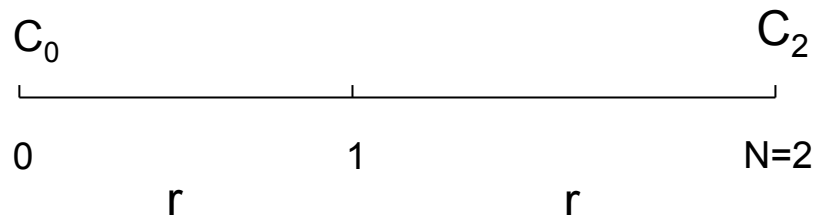
En este sencillo ejemplo se encuentran los 4 elementos de toda operación financiera

Prestación	Ha depositado 100.000 €
Ley financiera	El banco le paga un interés del 10% cada año al final del año.
Tiempo	Deja el dinero 2 años
Contraprestación	A los dos años recibe 121.000 € en su cuenta

La matemática financiera nos sirve para, conocidos tres de estos elementos determinar el cuarto.



- Sea la prestación, C_0
- El tipo de interés de la ley financiera, r
- El numero de periodos de la operación, N



Determinar la contraprestación

Sabiendo que hoy ponemos 100.000 € (prestación conocida) al 10% de interés (ley financiera conocida) durante 2 años (tiempo), las MOF (matemática de las operaciones financieras) me sirven para saber que me tienen que dar 121.000€



- Sea la prestación, C_0
- El tipo de interés de la ley financiera, r
- El numero de periodos de la operación, N



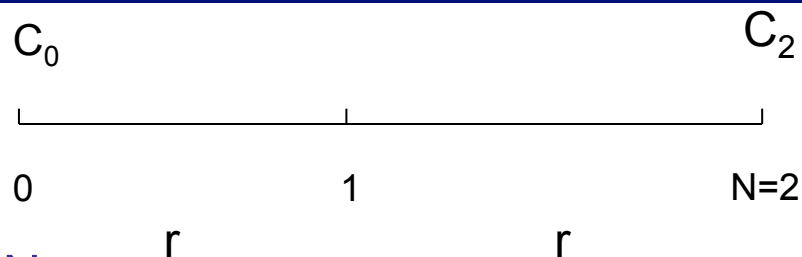
Determinar la ley financiera

Sabiendo que hoy ponemos 100.000€ (prestación conocida) durante 2 años (tiempo) y que el banco me devolverá 121.000 €, las MOF me sirven el tipo de interés con el que me están remunerando la operación (ley financiera desconocida)





- Sea la prestación, C_0
- El tipo de interés de la ley financiera, r
- El numero de periodos de la operación, N

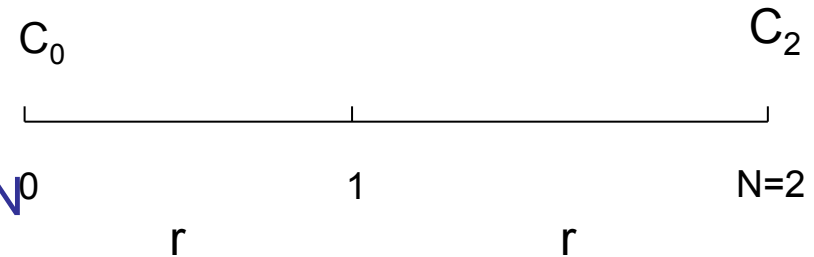


Determinar el tiempo

Si alguien nos pregunta cuánto tiempo debe tener invertidos 100.000€ (prestación conocida) para llegar a tener 121.000 € si el banco le ha comunicado que el tipo de interés de la operación es el 10%, las MOF me sirven para decirle que debe depositarlo durante dos años.



- Sea la prestación, C_0
- El tipo de interés de la ley financiera, r
- El numero de periodos de la operación, N^0



Determinar la prestación

Si alguien nos pregunta cuánto tiempo debe ingresar hoy en su cuenta para llegar a tener dentro de dos años, 121.000 € si le han comunicado que el tipo de interés de la operación es el 10%, las MOF me sirven para decirle que debe depositar 100.000€.



- Los sujetos que participan en esta operación financiera han sido:
 - Usted, **acreedor** , que financia (presta un capital, prestamista)
 - La Caja, **deudor** (prestatario) que devuelve esa financiación mediante la entrega de un pago a su acreedor, pago que se ha calculado según la ley financiera y plazo establecido.





- Si volvemos a su premio de 100.000 €, el valor económico de esta cantidad no solo depende de los 100.000 €, sino de cuando usted los reciba.

Entendemos por capital financiero el valor económico de un bien en el momento de su disponibilidad (C,t)

- En nuestro ejemplo nos ofrecían 100.000€ hoy $(100,0)$; o los mismos 100.000 euros dentro de dos años $(100.000,2)$. Es obvio que son capitales financieros diferentes.
- ¿Por qué? Por el Valor del dinero en el tiempo, por que los 100.000 euros hoy se pueden invertir y tener algo más dentro de 2 años.





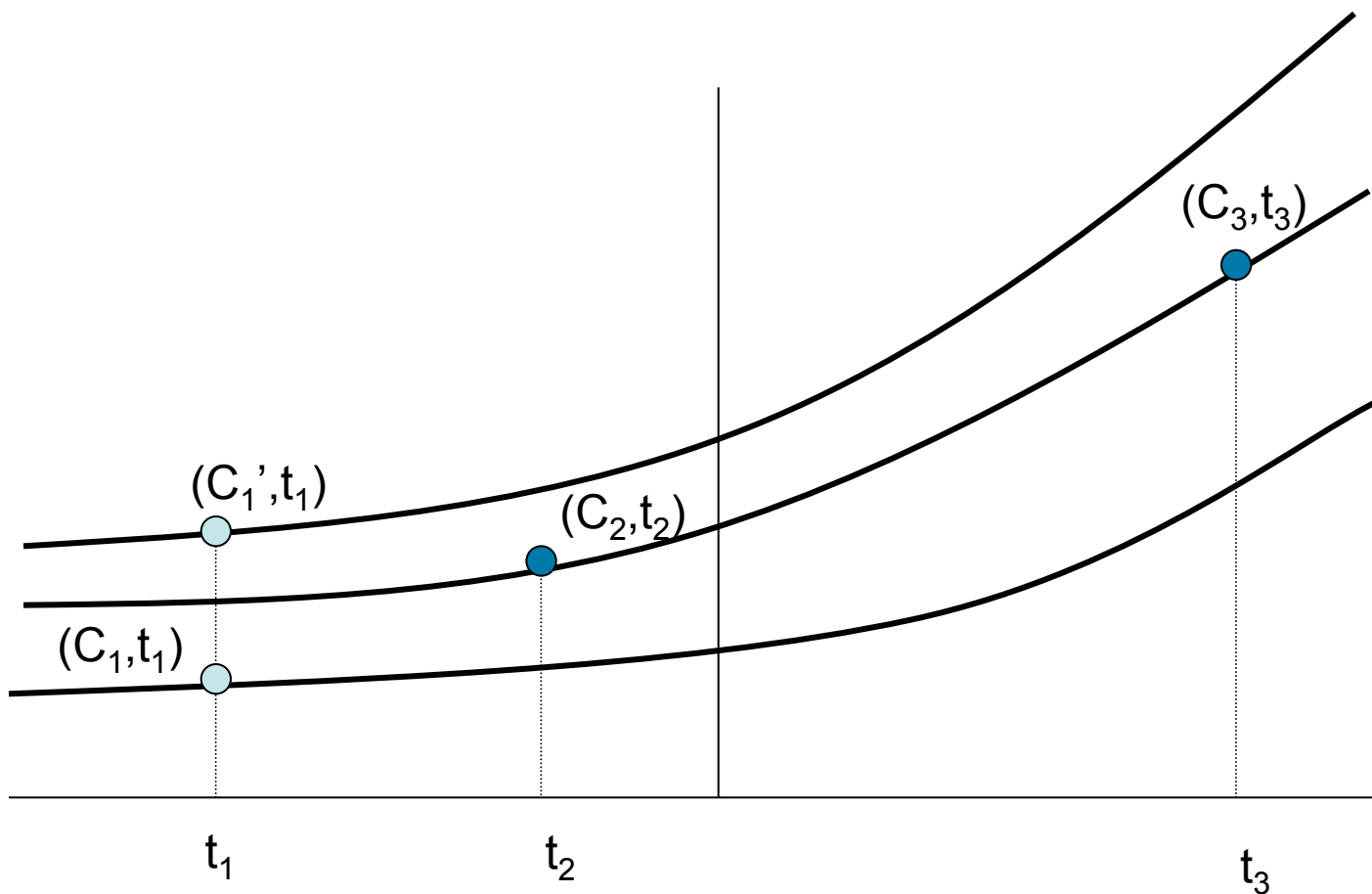
¿cómo elegir entre capitales financieros?

- Los agentes económicos a igualdad de cantidad prefieren recibir las cantidades antes a después. El tiempo influye de forma que prefieren el presente al futuro
- Además prefieren más a menos (si hablamos de recibir ingresos, y menos a más si hablamos de pagar)
 - ¿Qué prefiere recibir (100€, 1/1/2012) o (100€, 1/1/2011)?
 - ¿Qué prefiere recibir (150€, 1/1/13) o (100€, 1/1/13)?
 - Pero.....
 - ¿Qué prefiere recibir (100€, 1/1/12) o (105€, 1/1/13)?
- Necesitamos un criterio mediante el cual dado un capital en t obtengamos su cuantía equivalente en $t+1$, o viceversa.





Línea de indiferencia financiera



Gráficamente es fácil comparar capitales, pero ¿numéricamente?





- Hemos visto que cuando depositábamos 100.000 euros a un año al 10% obteníamos 110.000€.
- Esto quiere decir que $(100.000,0)$ y $(110.000,1)$ son **capitales financieramente equivalentes**.
- Para todos aquellos que deseen y puedan obtener esas condiciones del 10%, tener 100.000 € hoy es equivalente a tener 110.000€ el año que viene.
- En una operación financiera los capitales que forman la **prestación** y la **contraprestación** deben ser **equivalentes**.



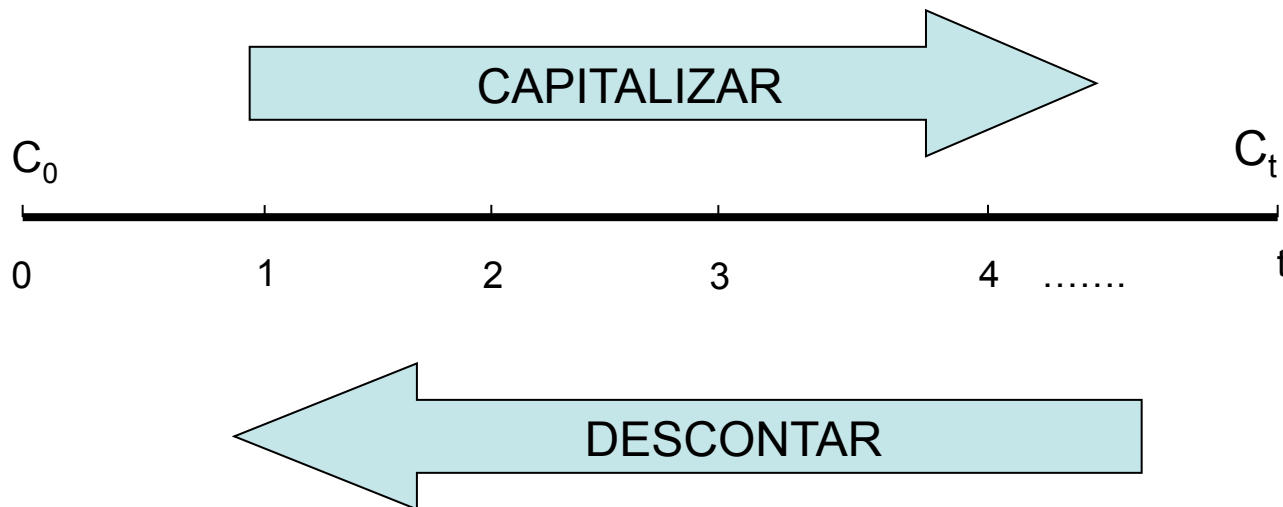
La equivalencia financiera y la ley financiera

- Por sencilla que sea la operación financiera, la equivalencia financiera entre un capital hoy, que forma la prestación C_0 y un capital dentro de t periodos, que forma la contraprestación C_t exige **conocer la ley financiera a emplear**.
- La **ley financiera** es un acuerdo entre los dos sujetos de la operación financiera, sobre el modelo que se va a utilizar para mover el dinero en el tiempo y el tipo de interés a utilizar.
- Independientemente de la ley que se utilice para mover el dinero. **Solo hay dos direcciones en las que podemos mover el dinero en el tiempo**: hacia adelante, hacia el futuro o hacia atrás.



2 tipos de valoraciones del dinero

Determinar su **valor final** (C_t) esto es mandarlo al futuro. A esto le llamamos **capitalizar**. “100€ dentro de un año tienen un valor de 110, al 10% de interés anual.”



Determinar su **valor actual** C_0 , esto es, traerlo hacia el presente. A esto le llamamos **descontar o actualizar**.

“110 € dentro de un año tienen un valor hoy de 100€ para el 10% de tipo de interés”,

.....y una ley financiera que de momento no nos interesa.



Valor futuro (VF) y Valor actual (VA)

- El Valor Futuro de una inversión será la cantidad a la que crecerá una inversión después de añadirle los intereses.
 - 100€ invertidos un año y al 5% de interés anual proporcionan 105€.

$$VF = 100(1+r) = 100(1,05) = 105$$

- El inversor está indiferente entre recibir 100 hoy o 105 el año que viene, pero no entre 100 hoy y algo menos de 105 el año que viene.
- El Valor Actual de recibir 105€ dentro de un año, dado el interés del 5% es 100€

$$VA = \frac{105}{(1+r)} = \frac{105}{(1,05)} = 100$$

AMBOS CAPITALES SON FINANCIERAMENTE EQUIVALENTES AL 5% Y CON UNA LEY FINANCIERA QUE AHORA PRESENTAREMOS.





- Hay varias leyes tanto para capitalizar como para descontar.
 - Leyes de capitalización
 - Ley de capitalización simple
 - Ley de capitalización compuesta
 - Leyes de descuento
 - Ley de descuento simple comercial
 - Ley de descuento simple racional
- Comenzaremos con las leyes de capitalización para aprender a calcular cuantías equivalentes.





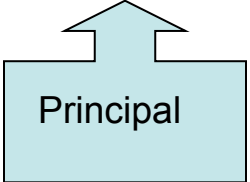
- Capitalizar es añadir al capital los intereses generados por dicho capital
- Las operaciones financieras se pueden pactar con distintos regímenes de capitalización de intereses (generación de intereses):
 - **Capitalización Simple** : Utilizada en operaciones a plazo inferior a un año (ejm cuentas corrientes, letras del tesoro, depósitos con plazo inferior al año)
 - **Capitalización Compuesta** : Utilizada en operaciones a plazo superior a un año: (depósitos, calculo de anualidades (rentas financieras)).
- Sin embargo, esta no es la principal diferencia entre capitalización simple y compuesta. La principal diferencia radica en lo que le ocurre a los intereses generados en la operación.



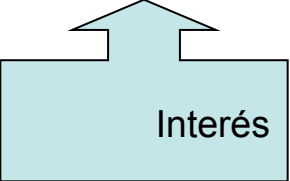
Capitalización Simple

- En las operaciones a Interés simple en cada periodo el pago de intereses se calcula como una proporción constante de la cantidad inicial

$$VF = C[1+i(n)] = C + C*i*n$$



Principal



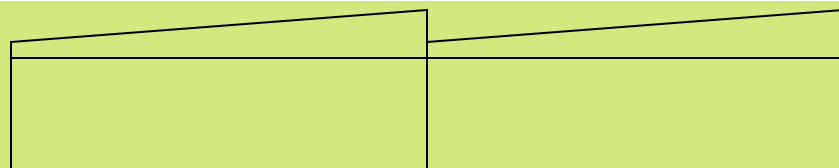
Interés

- Siendo r el tipo de interés , n la duración de la operación y C el capital invertido.

Ej. Invertimos 100€ al 5% anual durante 1 año.

$$VF = 100 (1 + 0.05 (1)) = 100 + 100 * 0.05 * 1 = 100 + 5 = 105$$





$$100 * 0,05 * 2 = 10 ; \text{Interés}$$

$$100 = \text{Principal}$$

Si Invertimos 100€ al 5% anual durante 2 años.

$$V_f = 100 (1 + 0.05 (2)) = 100 (1,10) = 110$$

En capitalización simple los intereses no se acumulan al capital para generar nuevos intereses.



Capitalización compuesta Anual

- **En operaciones con Interés compuesto: al final de cada año se calculan los intereses y pasan a formar parte del capital.**
- Una cuantía C invertida a el tipo de interés nominal anual (tasa porcentual anual TPA) i durante n años crece a:

$$VF = C(1 + i)^n$$

Ej. Invertimos 100€ al 5% anual durante 2 años.

$$V_f = 100(1 + 0.05)^2 = 110,25$$

Intereses primer año 5, capitalizados al 5% $5 \cdot (1,05) = 5,25$



$$105 + 5.25 = 110.25$$

En capitalización compuesta los intereses si se acumulan al capital para generar nuevos intereses.

Equivalencias Financieras

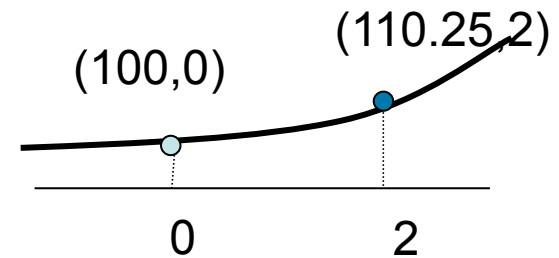
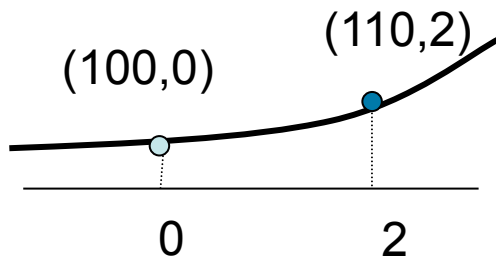
- Capitalización Simple

- Capitalización compuesta

$$100 [1 + 0.05(2)] = 110$$

$$100(1 + 0.05)^2 = 110.25$$

Factores de capitalización

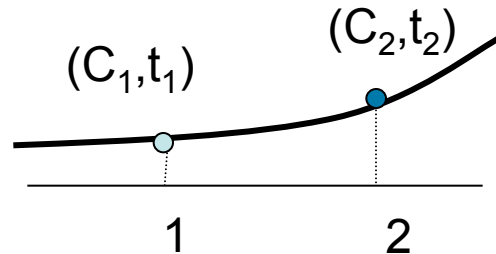


$$100 = 110 \frac{1}{[1 + 0.05(2)]}$$

$$100 = 110.25 \frac{1}{(1 + 0.05)^2}$$

Factores de descuento

- Tenemos dos formas de comparar dos flujos (C_1, t_1) y (C_2, t_2)



Calcular el Valor Futuro del flujo recibido en t_1 y compararlo con el recibido en t_2 . Necesitaremos un **factor de capitalización** o desplazamiento a la derecha.

$$VF = C_1 [1 + i(t_2 - t_1)]$$

$$VF = C_1 (1 + i)^{(t_2 - t_1)}$$

Calcular el Valor actual del flujo recibido en t_2 y compararlo con el de t_1 . Necesitaremos un **factor de actualización**, descuento o desplazamiento a la izquierda.

$$VA = C_2 \frac{1}{[1 + i(t_2 - t_1)]}$$

$$VA = C_2 (1 + i)^{-(t_2 - t_1)} = C_2 \frac{1}{(1 + i)^{(t_2 - t_1)}}$$



- El Valor Futuro de una inversión será la cantidad a la que crecerá una inversión después de añadirle los intereses.
 - 100€ invertidos un año y al 5% de interés anual proporcionan 105€.

$$VF = 100(1+i) = 100(1,05) = 105$$

- El inversor está indiferente entre recibir 100 hoy o 105 el año que viene, pero no entre 100 hoy y algo menos de 105 el año que viene. Ambas cuantías son **financieramente equivalentes**.
- El Valor Actual de recibir 105€ dentro de un año, dado el interés del 5% es 100€

$$VA = \frac{105}{(1+i)} = \frac{105}{(1,05)} = 100$$

El valor actual debe ser menor siempre que el capital que descontamos. Recuerde un € hoy vale más que un € mañana.



- Calcular el VF de 1000€ dentro de 5 años al 5% de interés anual en capitalización simple.

– Respuesta:

$$VF = 1000[1 + 0.05(5 - 0)] = 1000(1.25) = 1250$$

- Calcular el VA de (5000€ , 6) al 3% anual en capitalización simple.

– Respuesta:

$$VA = 5000 \frac{1}{[1 + 0.03(6 - 0)]} = \frac{5000}{1.18} = 4237.29$$

- Calcular el VF de 1000€ dentro de 5 años al 5% de interés anual en capitalización compuesta.

– Respuesta:

$$VF = 1000(1 + r)^5 = 1000(1.05)^5 = 1276.28$$

- Calcular el VA de (5000€ , 6) al 3% anual en capitalización compuesta.

– Respuesta:

$$VA = 5000(1 + 0.03)^{-(6-0)} = 5000 \frac{1}{(1.03)^6} = 4187.42$$





- Para sumar capitales financieros, debemos trasladar estos capitales al mismo momento del tiempo y a partir de ahí sumar.
- Capitalizaremos o descontaremos según dónde esté situado el capital y donde queramos obtener el resultado.





Suma financiera

- Suponga que le ofrecen recibir los siguientes capitales:
 - Alternativa 1, recibir $\{(1000,2);(8000,4);(15000,6)\}$
 - Alternativa 2, recibir $\{(7000,1);(8000,4);(7000,5)\}$
- A medida que recibe los capitales los deposita en una entidad financiera que le ofrece un interés del 4% anual en capitalización compuesta.

¿Qué alternativa elegiría?



Para saberlo necesitamos saber a cuanto asciende la **suma financiera** de cada alternativa en el mismo momento del tiempo



Suma financiera

- Suponga que le ofrecen recibir los siguientes capitales:
 - Alternativa 1, recibir $\{(1000,2); (8000,4); (15000,6)\}$
 - Alternativa 2, recibir $\{(7000,1); (8000,4); (7000,5)\}$
- A medida que recibe los capitales los deposita en una entidad financiera que le ofrece un interés del 4% anual en capitalización compuesta.

$$S_{A1,6} = 1000(1.04)^4 + 8000(1.04)^2 + 15000 = 24822.66$$

$$S_{A2,6} = 7000(1.04)^5 + 8000(1.04)^2 + 7000(1.04) = 24449.37$$



$S_{A1,6} > S_{A2,6}$ Elegimos la alternativa 1



Valor Actual

- Para calcular el Valor Actual de los capitales del ejemplo anterior
 - Alternativa 1, recibir $\{(1000,2); (8000,4); (15000,6)\}$
 - Alternativa 2, recibir $\{(7000,1); (8000,4); (7000,5)\}$
- Calcularemos el valor actual de cada uno de los capitales y sumaremos, que es lo mismo que calcular la Suma del conjunto de capitales en el momento actual t_0 .

$$S_{A1,0} = 1000(1.04)^{-2} + 8000(1.04)^{-4} + 15000(1.04)^{-6} =$$

$$S_{A2,0} = 7000(1.04)^{-1} + 8000(1.04)^{-4} + 7000(1.04)^{-5} =$$



El valor actual de un conjunto de capitales se calcula sumando el valor actual de cada uno de los capitales que lo forman.

