Universidad
Carlos III de Madrid
www.uc3m.es

TEMA 6

RENTAS FINANCIERAS

6.1. Concepto de Renta Financiera

6.2. Clasificación Rentas

6.3. Rentas Constantes: Inmediatas, Diferidas, Anticipadas

6.4. Rentas Variables

6.5. Rentas Fraccionadas

Concepto de Renta

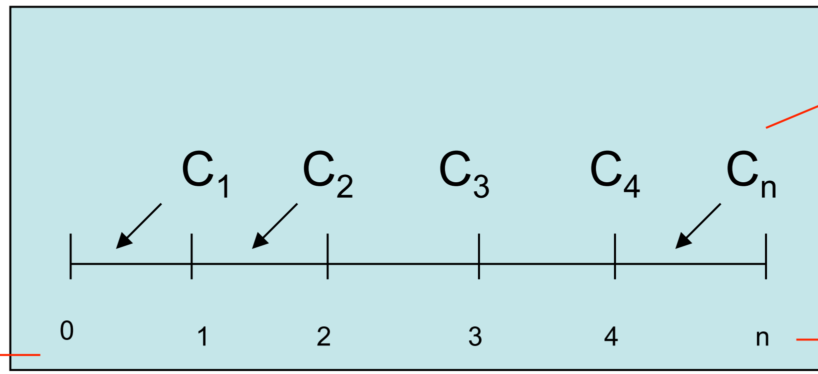
A buen seguro dentro de no muchos años, la mayoría de vosotros:

- Trabajareis en una empresa en la que cobrareis un sueldo MENSUAL (ej. 2000€/mes).
- Os comprareis un coche, probablemente financiado que pagareis también en mensualidades (ej. 400€/mes)
- Os comprareis una casa para vivir por la que pagareis un préstamo hipotecario (ej. 1000€/mes), o pagareis un alquiler mensual (también 1000€/mes).
- Vuestras inversiones en renta fija (bonos) os proporcionan un cupón semestral de 420€.

Todas estas situaciones son ejemplos de RENTAS

Concepto de renta

Una renta es una sucesión, un conjunto de capitales, cada uno de los cuales tiene su propio vencimiento, asociados a una serie de periodos de tiempo



Cada uno de los capitales recibe el nombre de ***Términos de la renta***

Origen: extremo inferior del primer intervalo

Final: Extremo superior Del último intervalo

La ***Duración*** de la renta es el tiempo que media entre el origen y el final (5-0=5)

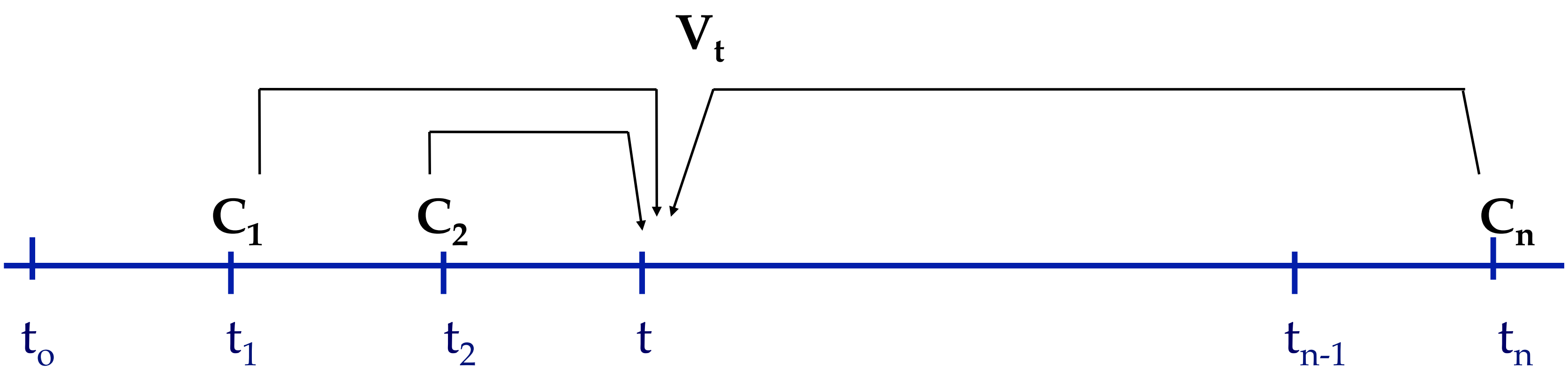
Nuestro objetivo es ser valorar la renta en una fecha determinada.

Valor Financiero de una Renta

Se denomina **valor de una renta** en un determinado instante de tiempo a la suma de los valores que en dicho momento tienen los términos que la constituyen.

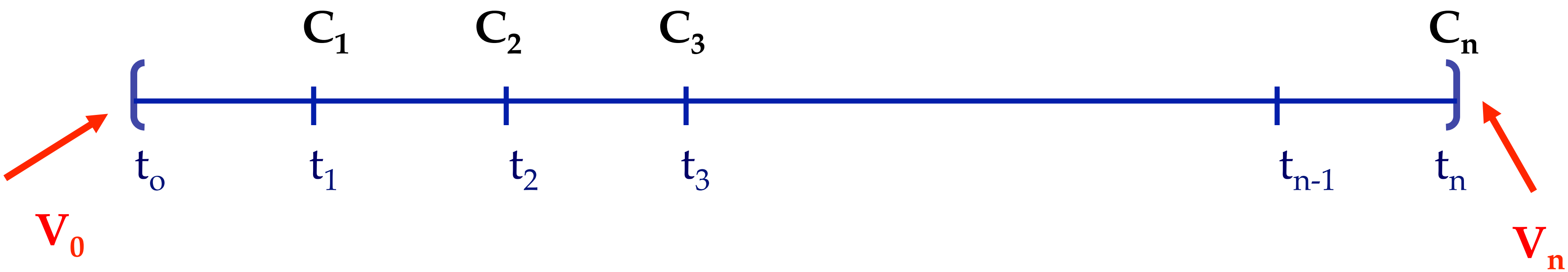
Es el resultado de trasladar financieramente (capitalizando o descontando) todos los términos de la renta a dicho momento de tiempo (t).

La valoración se puede hacer **en cualquier t** (incluso anterior al origen o posterior al fin)



Valor actual (V_o): resultado de valorar todos los términos de la renta en el momento inicial

Valor final (V_n): resultado de desplazar todos los términos de la renta al momento final

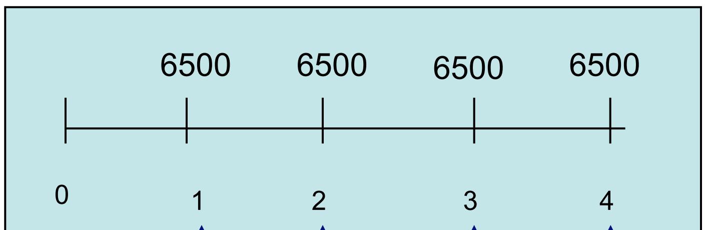


Teóricamente la valoración se puede hacer con cualquier ley financiera si bien …

Utilizaremos la **LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACION COMPUESTA, para un tipo de interés efectivo i.**

Anualidades y Perpetuidades

Imagine que usted quiere saber el dinero que necesitaría para saber que puede hacer frente al pago de la matricula de la universidad durante los 4 años de grado. Suponiendo que el coste anual es 6500€ y que en el banco le remuneran al 10% efectivo anual su dinero



$$\frac{6500}{(1.1)^1} = 5909.09$$

$$\frac{6500}{(1.1)^2} = 5371.90$$

$$\frac{6500}{(1.1)^3} = 4883.55$$

$$\frac{6500}{(1.1)^4} = 4439.59$$

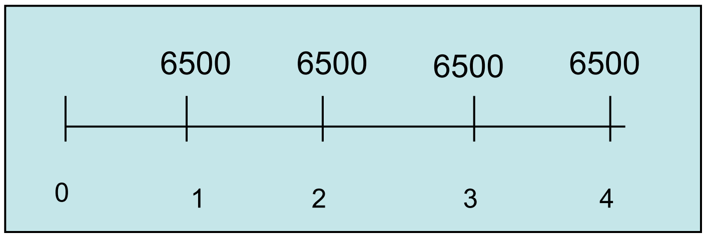
$$\sum = 20604.13$$

Para calcular el valor actual total de una serie de pagos en distintas fechas, necesitamos actualizar cada uno de esos pagos y sumarlos.

$$VA = V_0 = \frac{6500}{(1.1)} + \frac{6500}{(1.1)^2} + \frac{6500}{(1.1)^3} + \frac{6500}{(1.1)^4} = 20604.13$$

Anualidades y Perpetuidades

Esto quiere decir que, para un 10% anual, 20604.13€ de hoy son equivalentes a 6500€ anuales durante los próximos 4 años.



$$V_0 = \frac{6500}{(1.1)} + \frac{6500}{(1.1)^2} + \frac{6500}{(1.1)^3} + \frac{6500}{(1.1)^4} = 20604.13$$

O lo que es lo mismo que si hoy ingresa esos 20.604,13 euros en la cuenta que capitaliza al 10% , ya no tiene que preocuparse por la matricula, podría firmar los 4 cheques en las fechas, 1, 2 3 y 4. Tras eso la cuenta quedará a cero.

Anualidades y Perpetuidades

Obsérvese que no tenemos ninguna dificultad en valorar esta renta con nuestros conocimientos actuales de Matemática financiera.

Para calcular el valor actual total de una serie de pagos en distintas fechas, necesitamos actualizar cada uno de esos pagos y sumarlos.

Actualizar uno a uno los flujos de caja de una renta de 12, 52 o 365 términos, puede resultar muy laborioso ya sea utilizando una calculadora, una hoja de cálculo, etc…

Lo que haremos es buscar atajos, nuevas formulas sencillas que sean capaces de manejar la situación. Existen casos especiales para los que el valor actual de una serie de pagos se puede obtener mediante la aplicación de fórmulas sencillas.

Clasificación de las Rentas

Por el importe de los términos	Por la duración	Por la frecuencia de los términos	Por la situación del primer término
CONSTANTES	TEMPORALES	ENTERAS	INMEDIATAS
VARIABLES	INDEFINIDAS	PERIODICAS	ANTICIPADAS
		FRACCIONADAS	DIFERIDAS

Clasificación de las Rentas

Por el importe de los términos	
CONSTANTES	Son aquellas en las que todos sus términos son iguales. (ej. anterior todos los años 6500€)
VARIABLES	Son aquellas cuyos términos no coinciden todos los periodos. Estudiaremos el caso más importante: 1. Aquellas en las que los términos no son iguales pero siguen una progresión geométrica.”Rentas en Progresión Geométrica”

Clasificación de las Rentas

Por la duración
TEMPORALES
INDEFINIDAS

TEMPORALES: Son aquellas que tienen un número limitado de términos son iguales. (ej. anterior tenía 4 términos)

INDEFINIDAS: Son aquellas que tienen un número ilimitado de términos son iguales. También se conocen como *Perpetuas*

Clasificación de las Rentas

Son aquellas en las que la frecuencia de los términos de la renta (ej. Anual) coincide con la frecuencia con la que se capitalizan los intereses (10% anual)

Son aquellas en las que la frecuencia de los términos de la renta (ej. Cada dos años) es inferior que la frecuencia con la que se capitalizan los intereses (anual)

Por la frecuencia de los términos
ENTERAS
PERIODICAS
FRACCIONADAS

Son aquellas en las que la frecuencia de los términos de la renta (ej. mensual) es superior que la frecuencia con la que se capitalizan los intereses (anual)

Clasificación de las Rentas

Por la situación del primer término

INMEDIATAS

Se valoran en cualquier momento situado entre el origen y el final de la renta

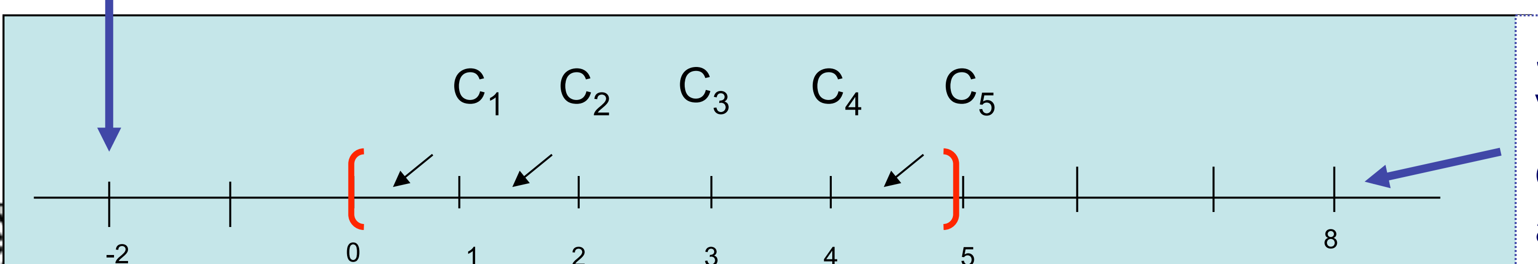
ANTICIPADAS

El punto de valoración es posterior al final de la renta.

DIFERIDAS

El punto de valoración es anterior al origen de la renta

Si calculo V_{-2} la renta está diferida



Si calculo V_8 la renta está anticipada

Anualidades y Perpetuidades

Para calcular el valor actual total de una serie de pagos en distintas fechas, necesitamos actualizar cada uno de esos pagos y sumarlos.

Actualizar uno a uno los flujos de caja puede resultar muy laborioso ya sea utilizando una calculadora, una hoja de cálculo, etc…

Existen casos especiales para los que el valor actual de una serie de pagos se puede obtener mediante la aplicación de fórmulas sencillas.

Recordemos el valor de la suma de los términos de una serie geométrica

(serie de n elementos tales que el elemento j-ésimo es igual al elemento j-1 multiplicado por una constante o razón q):

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 r$$

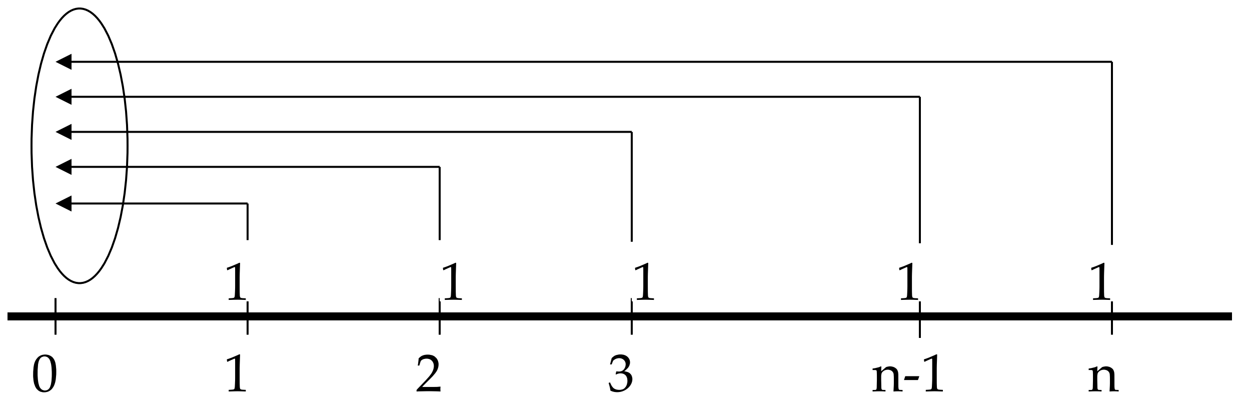
$$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$$

$$\cdots$$

$$a_n = a_{n-1} r = a_1 r^{n-1}$$

$$S = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

Renta Unitaria



Valor actual: Se llevan los términos de la renta, uno a uno, al origen utilizando la ley de capitalización compuesta.

El valor actual de una renta unitaria y pospagable se denota por $a_{n|i}$ donde $\boldsymbol{n}$ indica la duración o número de términos de la renta e $\boldsymbol{i}$ es el tipo de interés efectivo en capitalización compuesta utilizado para la valoración

$$a_{\overline{n|}i} = 1\,(1+i)^{-1} + 1\,(1+i)^{-2} + 1\,(1+i)^{-3} + \cdots + 1\,(1+i)^{-(n-1)}$$
$$+ 1\,(1+i)^{-n}$$

15

$$a_{\overline{n|}i} = 1\,(1+i)^{-1} + 1\,(1+i)^{-2} + 1\,(1+i)^{-3} + \dots + 1\,(1+i)^{-(n-1)}$$
$$+1\,(1+i)^{-n}$$

Suma de los términos de una progresión geométrica

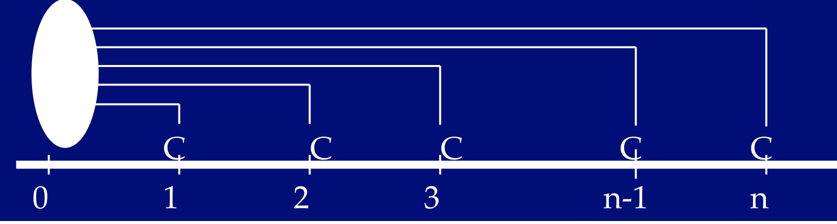
$$r = (1+i)^{-1} \qquad S = \frac{a_1 - a_n\, r}{1-r}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \left(\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}} \right) = (1+i)^{-1} \left(\frac{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}{(1+i)} \right) = \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right)$$

$$\boxed{a_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Valor Actual (en el origen de la renta) de una renta unitaria y postpagable.

Anualidad



Es la serie de pagos C constantes en el tiempo. Cuyo valor actual es:

$$VA = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + \frac{C}{(1+i)^n}$$

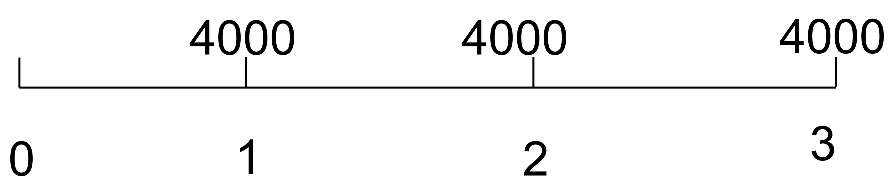
Es decir, VA es el valor de la suma de n elementos de una serie geométrica con constante a = C/(1+i) y razón r =1/(1+i). Sustituyendo en la fórmula para S tenemos:

$$V_0 = \left(\frac{\frac{C}{(1+i)} - \frac{C}{(1+i)^n}\frac{1}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \right) = \frac{C}{(1+i)} \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{(1+i)}} \right) = C\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right)$$

$$\boxed{V_0 = C.a_{\left.\overline{n}\right| i}}$$

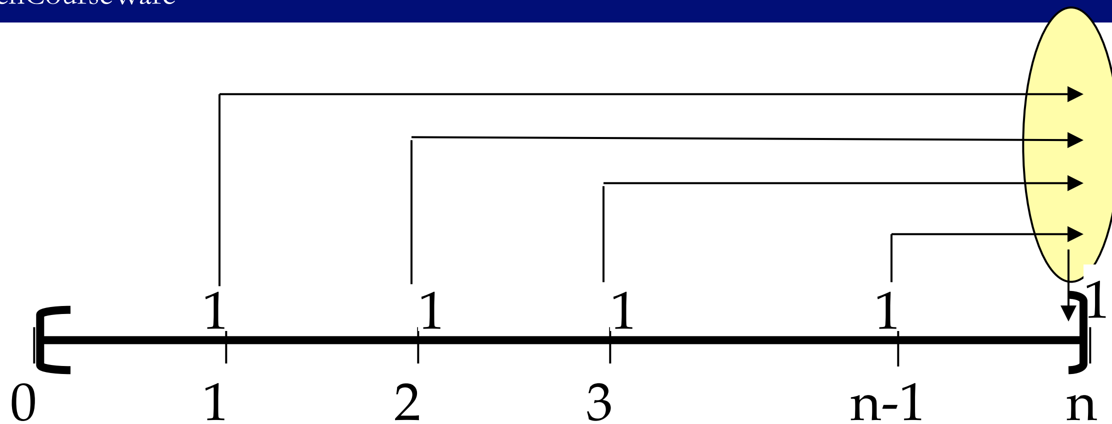
Ejemplo

Usted debe las tres últimas cuotas de un préstamo personal anual, de 4000€ cada una, por la que está pagando un tipo de interés efectivo anual del 10%. La empresa en la que trabaja le ha pagado una importante cantidad de dinero extra, por cumplimiento de objetivos y usted se plantea liquidar hoy esas cuotas. Su banco le admite la operación. ¿Cuánto tendrá hoy que pagar para liquidar la deuda?



$$V_0 = 4000 a_{\overline{3}\,|\,10\%} = 4000 \frac{1-(1.10)^{-3}}{0.10} = 9947.41$$

Valor FinaL Renta Unitaria



Valor final: Se llevan los términos de la renta al final utilizando la ley de capitalización compuesta y se suman.

El valor final de una renta unitaria y pospagable se denota por $s_{n|i}$ donde ***n*** indica la duración o número de términos de la renta e ***i*** es el tipo de interés efectivo en capitalización compuesta utilizado para la valoración

$$S_{\overline{n|}i} = 1\,(1+i)^{n-1} + 1\,(1+i)^{n-2} + 1\,(1+i)^{n-3} + \cdots$$

$$\cdots + 1\,(1+i)^{1} + 1$$

19

Valor Final de Rentas Constantes

$$S_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \ldots + (1+i)^{1} + 1$$

Suma de los términos de una progresión geométrica

$$r = (1+i)^{-1} \qquad S = \frac{a_1 - a_n\, r}{1-r}$$

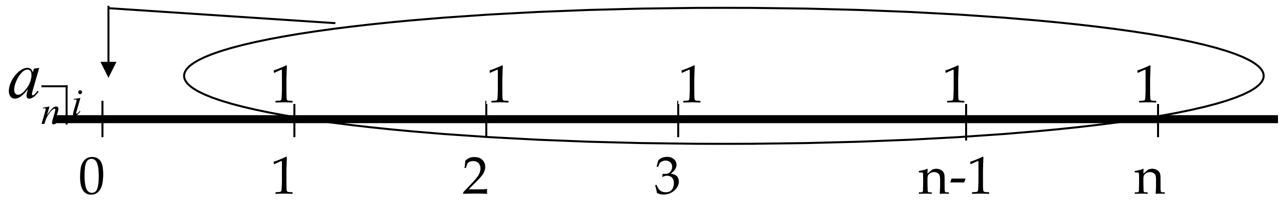
$$S_{\overline{n}|i} = \frac{1\,(1+i)^{n-1} - 1\,(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}\,\frac{1+i}{1+i}$$

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}}$$

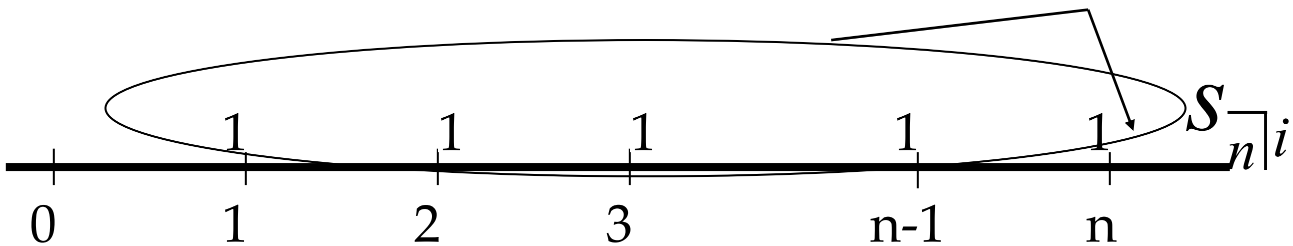
Generalizando:

$$V_n = C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-2} + \ldots + C(1+i)^{1} + C =$$
$$= C.S_{\overline{n}|i}$$

$$\boxed{V_n = C.S_{\overline{n}|i}}$$



$a_{n|i}$ es un capital con vencimiento en 0 que sustituye a la renta



y del mismo modo $s_{n|i}$ (con vencimiento en n) es equivalente a la renta.

Entre ambos existe una relación y puedo obtener $s_{n|i}$ a partir de $a_{n|i}$ esta forma $a_{n|i}\,(1+i)^n = s_{n|i}$

Por tanto, son capitales financieramente equivalentes

Ejemplo

Sus padres han pensado comprarle un coche cuando llegue a licenciarse. Para poder pagarlo van a hacer 4 ingresos de 6500€ anuales, a final de cada año, en una cuenta remunerada al 10% efectivo anual.

¿Cuánto dinero tendrán en la cuenta cuando usted llegue a 4º de carrera?.

$$V_0 = 6500 a_{\overline{4}\,|\,10\%} = 6500 \frac{1-(1.10)^{-4}}{0.10} = 20604€$$

$$V_4 = 20604(1.10)^4 = 30166.50€$$

Ejemplo

¿Cuánto tengo que invertir anualmente a final de cada año para disponer de 100.000 € al cabo de 10 años en una cuenta remunerada el 3% efectivo anual?

$$VA = C\partial_{10\,|\,3\%}$$

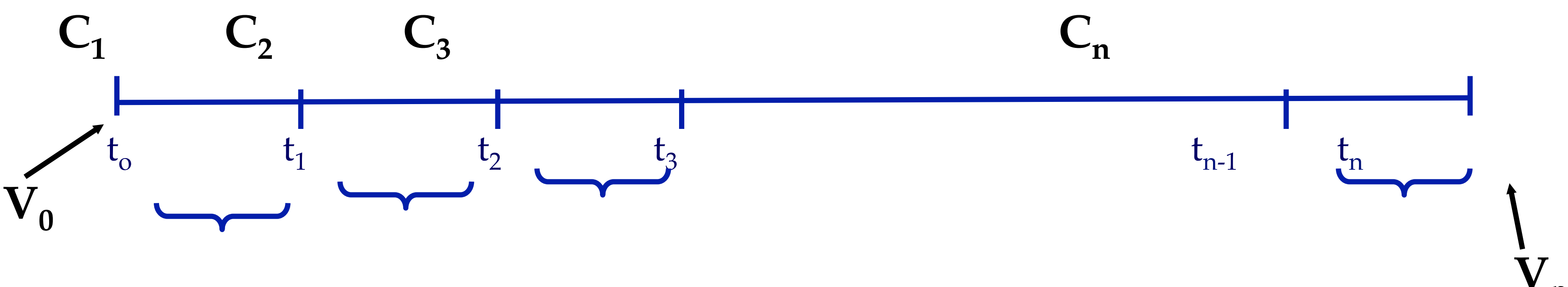
$$VF = C\partial_{10\,|\,3\%}(1.03)^{10} = 100.000$$

$$C = \frac{100000}{\partial_{10\,|\,3\%}(1.03)^{10}} = 8723.1€$$

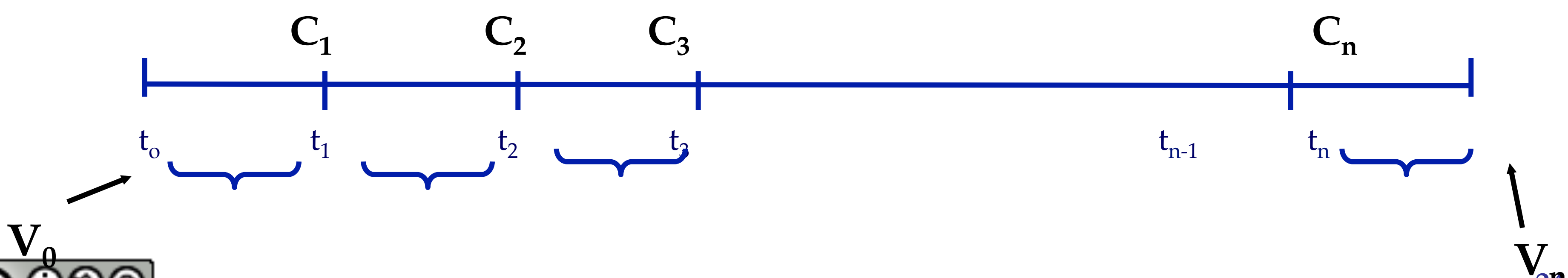
Rentas prepagables y postpagables

Atendiendo al **punto del intervalo en que vencen los términos las rentas se clasifican en :**

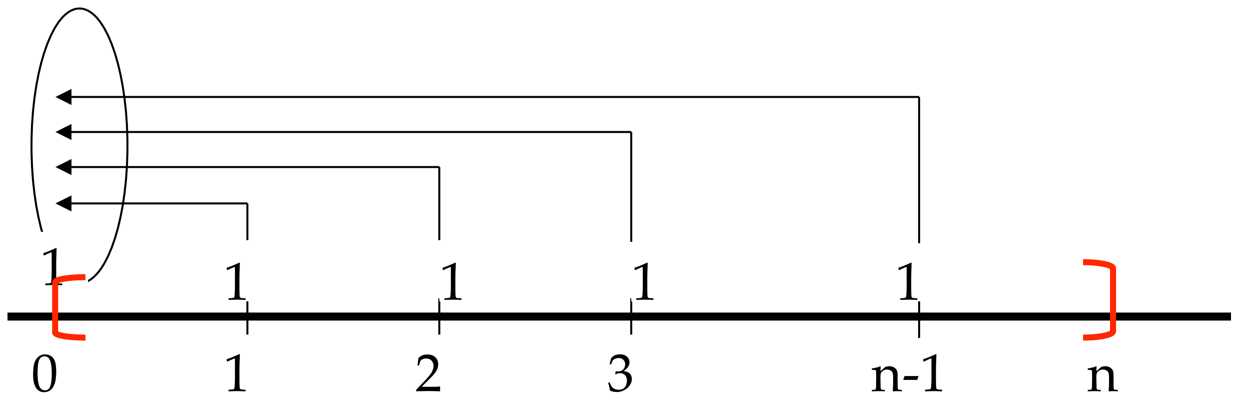
Renta pre-pagable: cuando todos los vencimientos de los capitales tienen lugar al principio de cada periodo. (Ej:alquileres)



Renta post-pagable: cuando todos los vencimientos de los capitales tienen lugar al final de cada periodo. (Ej: sueldos)



RENTAS CONSTANTES: UNITARIA, INMEDIATA, TEMPORAL y PREPAGABLE.



Valor actual: Se llevan los términos de la renta al origen.
Al ser prepagable el origen coincide con el vencimiento del primer capital.
Notación: $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ valor actual de una renta unitaria y prepagable

n = duración o número de términos de la renta

i = tipo de interés efectivo en capitalización compuesta utilizado para la valoración

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2} + \cdots + 1(1+i)^{-(n-1)}$$

Valor actual RENTA CONSTANTE PREPAGABLE

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + 1(1+i)^{-1} + 1(1+i)^{-2} + \cdots + 1(1+i)^{-(n-1)}$$

Tomo la expresión de a_{ni} y multiplico ambos miembros por (1+i)

$$a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + 1(1+i)^{-(n)}$$

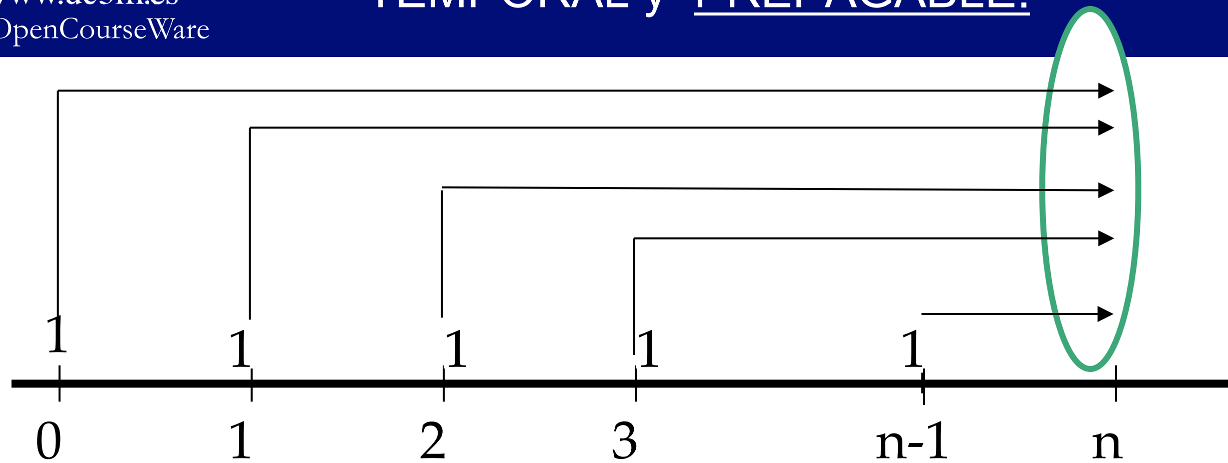
$$a_{\overline{n}|i}(1+i) = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + 1(1+i)^{-n+1}$$

$$\boxed{a_{\overline{n}|i}(1+i) = \ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

Generalizando: si la renta es constante no unitaria (términos de cuantía C) su valor actual se obtiene:

$$\boxed{\ddot{V}_0 = C\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}}$$

RENTAS CONSTANTES: UNITARIA, INMEDIATA, TEMPORAL y PREPAGABLE.

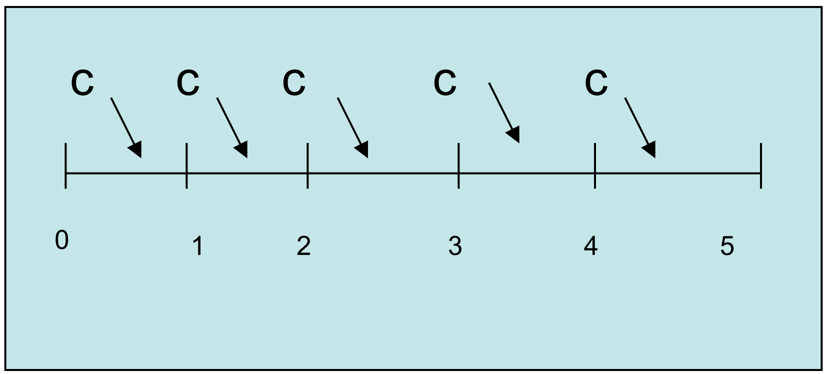


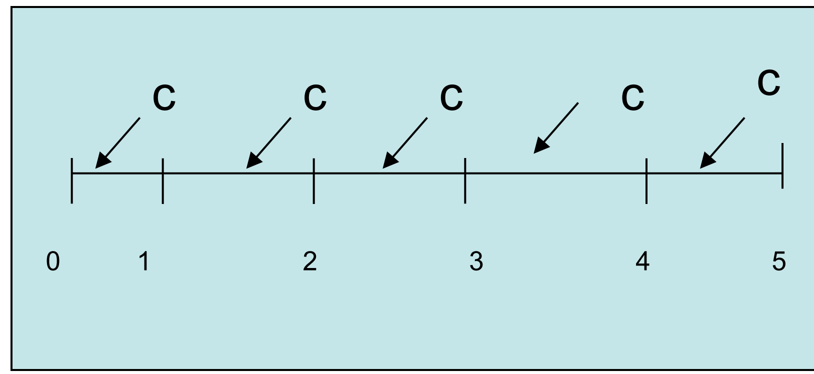
Valor final: Se llevan los términos de la renta al final
Al ser prepagable, el final es un periodo después del vencimiento del último capital.

Notación: $\ddot{S}_{\overline{n}|i}$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|i} = 1(1+i)^{n} + 1\,(1+i)^{n-1} + 1\,(1+i)^{n-2} + \cdots\cdots + 1\,(1+i)^{1}$$

RECUERDE : Prepagable vs Pospagable





$$VA = \ddot{V}_0 = C\ \ddot{a}_{\overline{n}|r} = C\left(1+r\right)a_{\overline{n}|r}$$

$$VA = V_0 = C\ a_{\overline{n}|r}$$

Ejemplo de renta prepagable.

Como pago del alquiler del local donde tiene un negocio debe abonar a principio de cada año 10.000 €. Tiene un contrato por cinco años. Usted quiere despreocuparse de este pago ahora que tiene liquidez y desea saber cuanto debería ingresar a principio de año en un deposito al 6% efectivo anual para que sea capaz de hacer frente al alquiler?

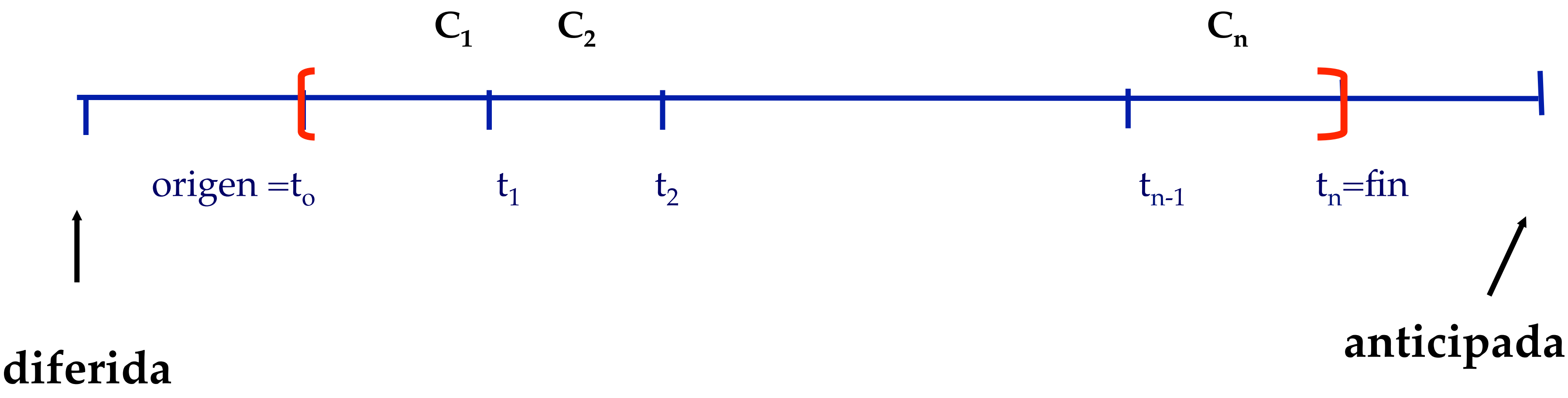
$$VA = V_0 = 10000\ \ddot{a}_{\overline{5}|0.06} = 10000\,(1.06)\,a_{\overline{5}|0.06} =$$

$$= 10000(1.06)\frac{1-(1.06)^{-5}}{0.06} = 44651$$

RENTAS DIFERIDAS Y ANTICIPADAS

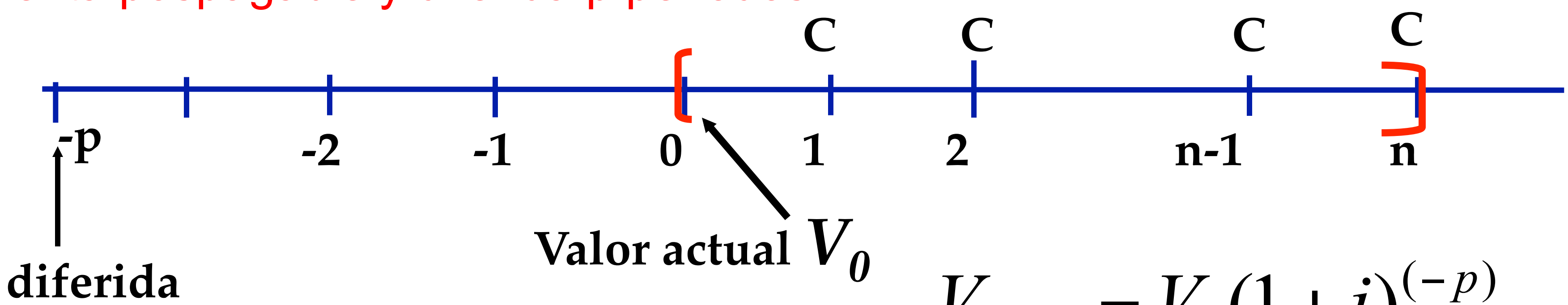
Renta diferida: el momento de valoración es anterior al origen de la renta

Renta anticipada: el momento de valoración es posterior al final la renta



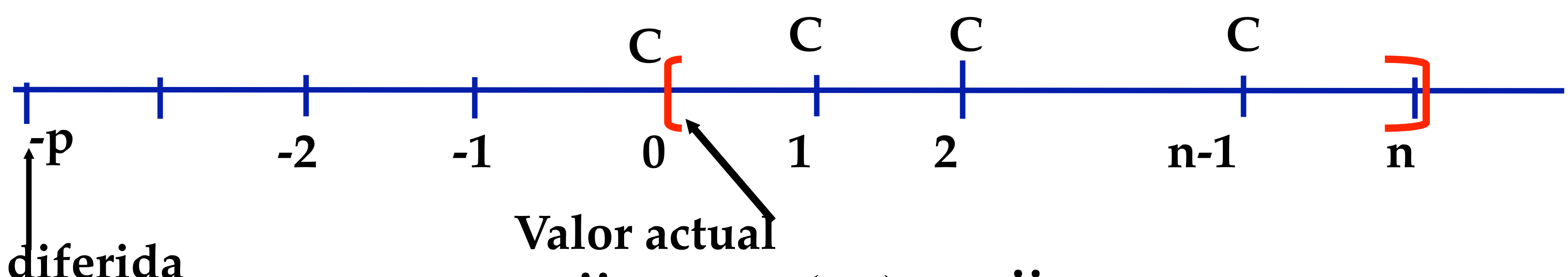
RENTAS CONSTANTES DIFERIDAS

Renta pospagable y diferida p periodos



$$V_{(-p)} = V_0(1+i)^{(-p)}$$

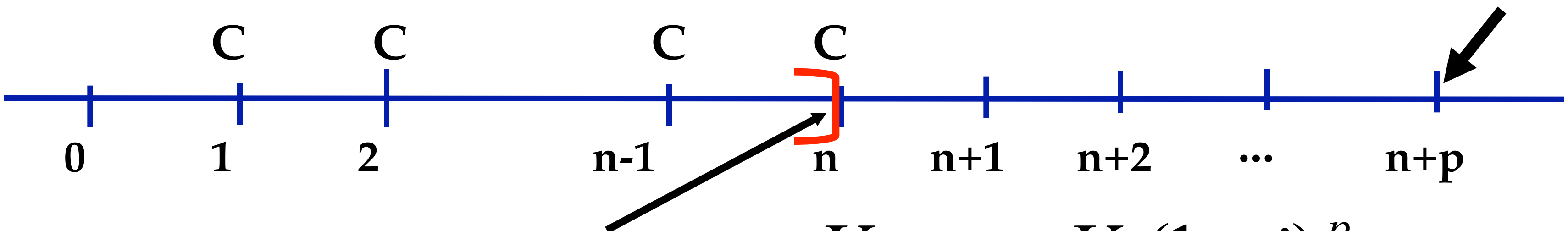
Renta prepagable y diferida p periodos



$$V_{(-p)} = \ddot{V}_0(1+i)^{(-p)} \qquad \ddot{V}_0 = (1+i)V_0$$

RENTAS CONSTANTES ANTICIPADAS

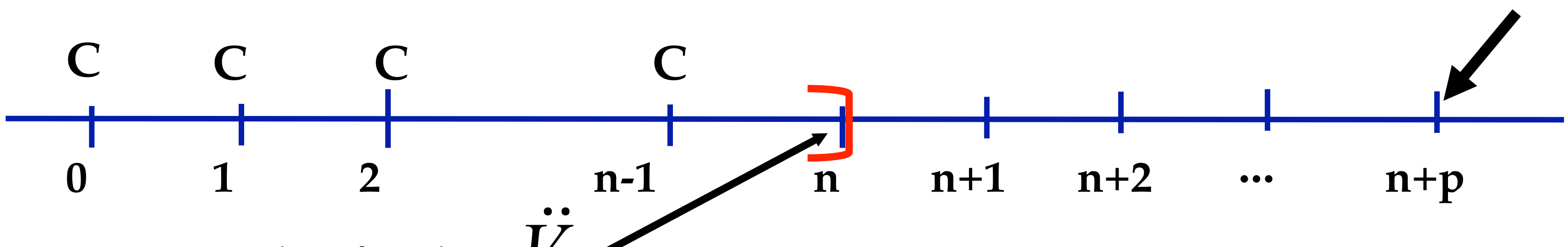
Renta pospagable y anticipada p periodos



Valor final V_n

$$V_{(n+p)} = V_n(1+i)^p$$

Renta prepagable y anticipada p periodos

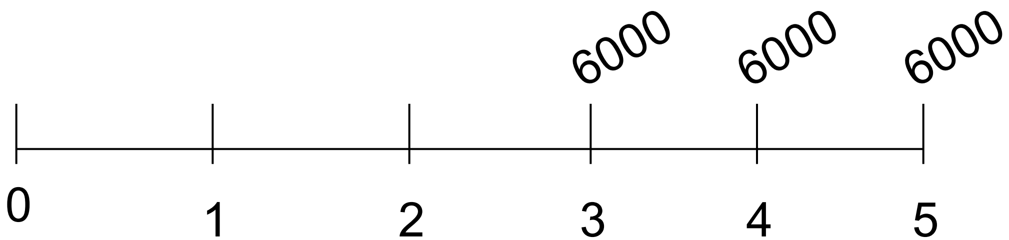


Valor final $\ddot{V}_n$

$$V_{(n+p)} = \ddot{V}_n(1+i)^p = V_n(1+i).(1+i)^p$$

Ejemplo

Usted puede realizar una inversión por la que no recibirá nada durante dos años pero prometer entregarle 6000€ anuales durante los 3 años restantes. Cuanto deberá pagar por entrar en dicha inversión si la rentabilidad mínima que usted exige es del 8% anual.



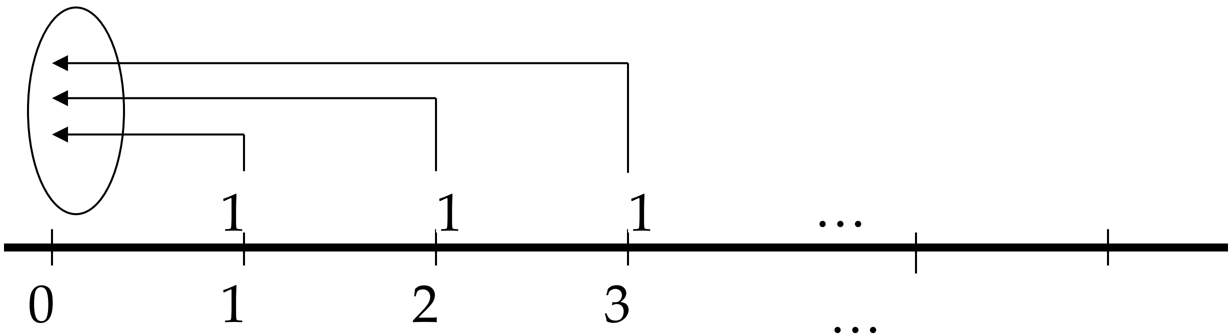
$$V_2 = 6000 a_{\overline{3}|8\%} = 6000 \frac{1-(1.08)^{-3}}{0.08} = 15462.58$$

$$V_0 = 15462.58(1.08)^{-2} = 13256.67€$$

NOTESE , QUE SI LA VALORACIÓN DE LA RENTA HUBIERA SIDO PREPAGABLE EL DIFERIMIENTO SERIAN 3 AÑOS

RENTAS PERPETUAS

Renta perpetua: cuando la duración de la renta no es finita



$$a_{\overline{\infty}|i} = 1\,(1+i)^{-1} + 1\,(1+i)^{-2} + 1\,(1+i)^{-3} + \ldots$$

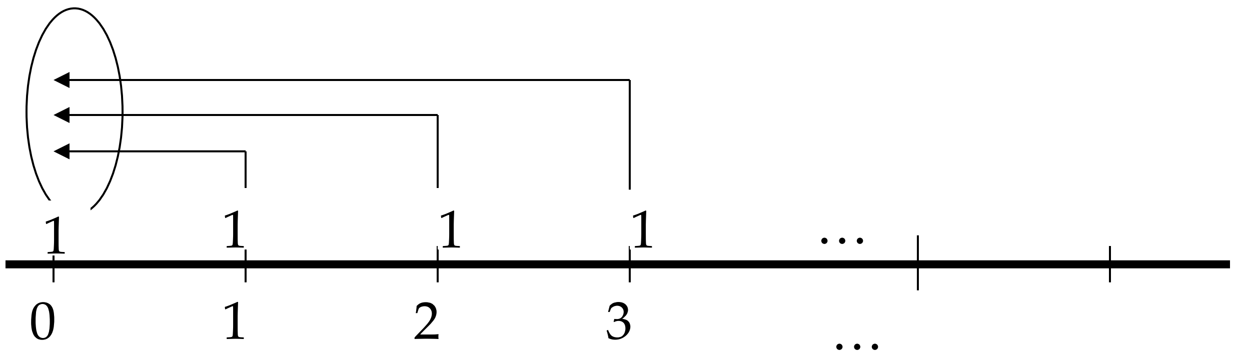
$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$$

Generalizando si la renta es Constante de cuantía C:

$$V_{0\overline{\infty}|i} = C\frac{1}{i}$$

RENTAS PERPETUAS (prepagable)

En el caso de una renta unitaria prepagable se tiene:



$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}i} = (1+i)a_{\overline{\infty|}i} = (1+i)\frac{1}{i}$$

Valor actual renta perpetua , prepagable y unitaria

$$\ddot{V}_{0\overline{\infty|}i} = C(1+i)\frac{1}{i}$$

Valor actual renta perpetua , prepagable y de cuantía constante C por periodo

El Sr. Mendía trabaja en una Editorial que se está planteando la posibilidad de convocar un premio de poesía con una dotación anual de 12000€. Para ello la editorial va a constituir una fundación a la que donará una aportación a final de año, tal que ésta pueda pagar anualmente los premios. Juan Mendía ha sido encargado de calcular la aportación partiendo del supuesto de que la Fundación puede colocar el dinero al 8% anual y que el permio tiene duración indefinida. Puede usted ayudarle?

$$V_0 = \frac{12.000}{0.08} = 150.000$$

RENTAS VARIABLES

- Rentas constantes: cuando las cuantías de todos sus términos son iguales a C

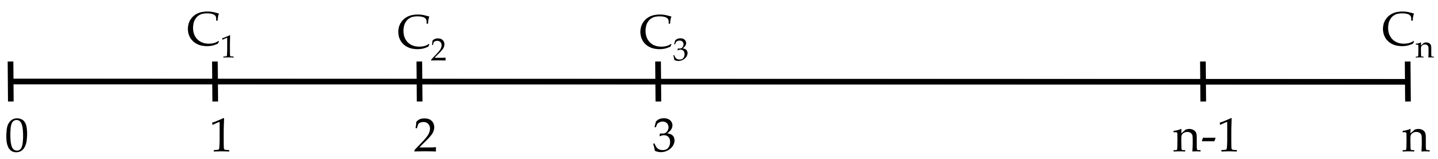
- Rentas variables: cuando las cuantías de sus términos no son iguales

- En la vida real son muy habituales las rentas variables en progresión geométrica en las que cada termino se obtiene del anterior multiplicado por una razón q: $\mathbf{C_s=C_{s-1}.q}$

$C_1=C, \quad C_2=C_1.q \quad C_3=C_2.q=C_1.q^2 \quad \cdots \quad C_n=C_1.q^{n-1}$

Al igual que ocurre en las rentas constantes, las rentas variables también se pueden clasificar en inmediatas, diferidas, anticipadas, temporales, perpetuas y a su vez todas ellas en prepagables y pospagables.

Renta Variable en Progresión Geométrica Inmediata Temporal y Pospagable



$$C_1 = C$$
$$C_2 = C.q$$
$$C_3 = C_2 .q = C .q^2$$
$$\ldots\ldots$$

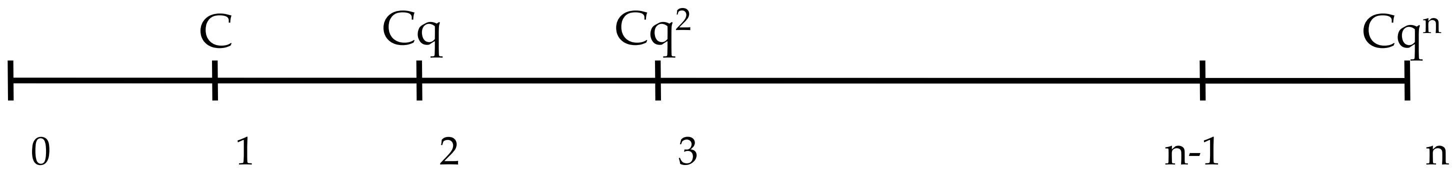
$$\boxed{C_n = C_{n-1}.\ q = C.q^{n-1}}$$

Se caracteriza porque su términos varían en progresión geométrica, donde q es la razón de la progresión

q >0 siempre

- Si 0<q<1, los términos decrecen (ejm, decrecen al 2% entonces q=0.98
- Si q>1, los términos crecen (ejm. Crecen al 2% q=1.02

Renta Variable en Progresión Geométrica Inmediata Temporal y Pospagable



$$A(C,q)_{\overline{n}|i} = C\left[(1+i)^{-1} + q(1+i)^{-2} + q^{2}(1+i)^{-3} + \ldots + q^{n-1}(1+i)^{-n}\right] =$$

a) Si $1+i \neq q$

$$A(C,q)_{\overline{n}|i} = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n} \cdot q^{n}}{1+i-q}$$

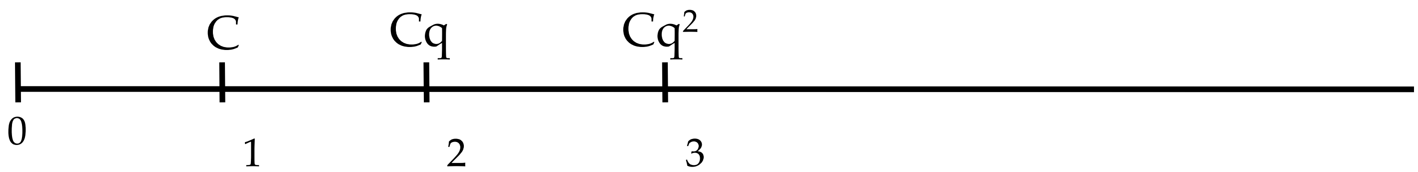
b) Si $1+i = q$

$$A(C,q)_{\overline{n}|i} = C(1+i)^{-1}.n$$

Calcular el VA del pago de sueldos anual de un millón de euros crecientes al 2% durante 5 años, a un tipo de interés del 3%.

$$V_0 = A(1000.000{,}1.02)_{\overline{5}|0.03} = 1000000\left[\frac{1-\left(\frac{1.02}{1.03}\right)^5}{1.03-1.02}\right] = 4.761.000$$

Renta Variable en Progresión Geométrica Inmediata ***Perpetua*** y Pospagable



$$A(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A(C,q)_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} C\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} = \lim_{n\to\infty} C\frac{1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

a) Si 1+i > q $\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{1+i}\right)^n = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A(C,q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{1+i-q}}$

b) Si 1+i < q $\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{1+i}\right)^n = \infty$

c) Si 1+i = q

$$\lim_{n\to\infty} A(C,q)_{\overline{n}|i} = \infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} C(1+i)^{-1} n = \infty$$

La existencia de un capital infinito no tiene sentido desde el punto de vista financiero.

Ejemplo

Juan Mendía no ha quedado muy convencido con la idea del premio Literario. No le parece razonable que la dotación del premio de 12000 euros anuales sea constante, pues cada año el premio tiene un valor relativo menor. Dentro de 20 años será un premio muy depreciado. Por ello va a calcular ahora cual será la aportación que debería hacerse a la fundación, suponiendo que el premio sea de 12000 euros el primer año, pero a partir de ahí aumente en un 3% anual. Recuerde que el tipo de interés a aplicar era el 8%.

$$V_0 = A(12000, 1.03)_{\overline{\infty}|0.08} = 12000 \frac{1 - \left(\frac{1.03}{1.08}\right)^{\infty}}{1.08 - 1.03} = \left[\frac{12000}{1.08 - 1.03}\right] = 240.000$$

Ejemplo

- Usted adquiere un piso cuyo precio al contado es de 150.000 € pero acuerda con el vendedor efectuar el pago en la forma siguiente:
  - 30.000 € a la firma del contrato.
  - 60.000 €, en cinco letras de igual nominal (a) aceptadas, de vencimientos anuales sucesivos, el primero dentro de un año.
  - 60.000 €, en cinco letras de igual nominal (b) aceptadas, de vencimientos anuales sucesivos, el primero a los seis años de la firma del contrato.
  - Se pactan intereses al 5% TAE, calcular los nominales de las letras.
- **Solución**: a=13858,49 b=17687,33

- Una persona firma con una entidad financiera un plan de ahorro para formar un capital de un millón de euros en diez años. Calcúlese la cantidad que tendrá que ingresar al comienzo de cada año si la entidad abona intereses al 3% TAE, y el ahorrador entrega el dinero únicamente durante los cinco primeros años.

- Una empresa tiene firmado un contrato de mantenimiento de equipos por un importe de 6.000 euros el primer año, con incrementos anuales acumulativos previstos del 8% anual. Si se utiliza un tanto de valoración del 12% anual, determinar el valor actualizado de esa corriente de pagos, si tienen carácter prepagable y duración indefinida.

- **Solución**: Vo= 168.000

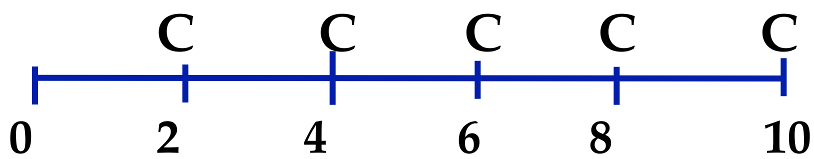
Rentas periódicas

Una renta periódica es una renta cuya frecuencia de sus términos (por ejemplo cuantías bianuales) es inferior a la frecuencia de capitalización de intereses (por ejemplo intereses anuales)

Nuestros conocimientos de matemáticas financieras nos permiten abordar estas rentas calculando el tipo de interes equivalente para el periodo de nuestra renta Y aplicando las rentas temporales.

Ejemplo de Renta Periodica

Imagine que su empresa de transporte tiene un gasto en cambio de ruedas cada dos años de 20.000€. Calcule el coste previsto en ruedas para los próximos 10 años utilizando un tipo de interés efectivo anual de 5%.



Calculemos el rédito efectivo bianual equivalente al 5% anual

$$(1+i^*) = (1.05)^2 = 1.1025$$

$$i^* = 10.25\% \text{ bianual}$$

y trabajemos sobre una renta de 5 periodos de dos años a ese tipo de interés equivalente.

$$V_0 = 20000 a_{\overline{5}|10.25\%} = \frac{1-(1.1025)^{-5}}{0.1025} = 75.334$$

Cuantías bianuales

Número de periodos de dos años

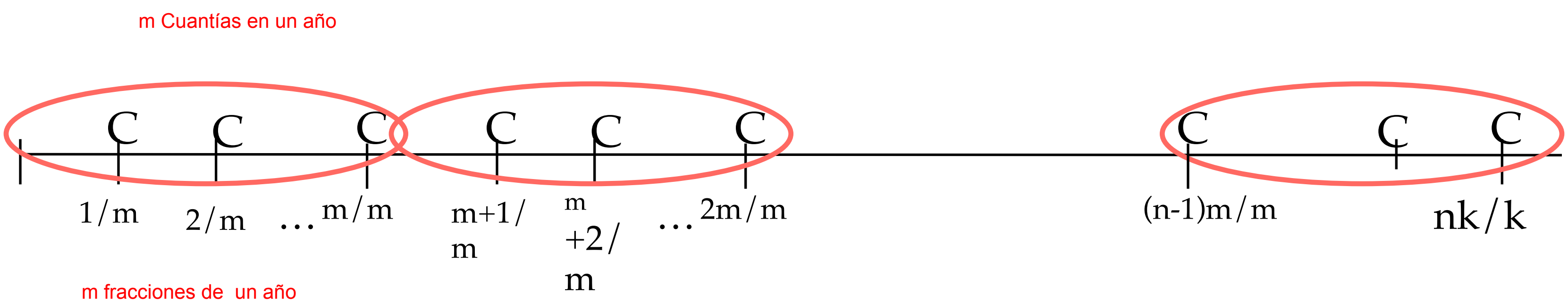
Tipo de interés bianual

Rentas fraccionadas

En el caso de las rentas fraccionadas nos encontraremos que la frecuencia de los términos de la renta (por ejemplo cuantías mensuales) es superior a la frecuencia de capitalización de intereses (por ejemplo intereses anuales)

Si estas rentas son constantes (términos iguales siempre) nada impide calcular también estas rentas calculando el tipo de interés equivalente para el periodo de nuestra renta Y aplicando las rentas temporales.

Renta constante con m términos en el año



1) Calculamos el tipo de interés equivalente (por ejemplo si m=12 el equivalente mensual $i^{(12)}$) (por ejemplo si m=2 el equivalente semestral $i^{(2)}$) al tipo de interés efectivo anual que nos proporcionen

$$(1+i) = (1+i^{(m)})^m$$

$$i^{(m)} = (1+i)^{1/m} - 1$$

$$V_0 = Ca_{m*n|i^{(m)}}$$

Ejemplo : Renta Mensual

Un empleado de una empresa multinacional percibe un sueldo mensual de 2.000 euros (12 mensualidades al año), neto de impuestos, al final de cada mes. Afortunadamente vive con su familia y no necesita más que para sus gastos. Con lo que su capacidad de ahorro ha sido de 1200€ mensuales.

Calcule la cantidad que tiene ahorrada si ha depositado las 36 ultimas mensualidades en una cuenta que remunera al 3% anual capitalizable mensualmente.

Ejemplo

En este caso nos dicen que la capitalización es mensual, por lo que fácilmente tendremos $i^{(12)}$, sin más que dividir el nominal por 12

Si el dato de partida hubiera sido un TAE, lo hubiéramos tenido que calcular como $i^{(12)}=(1+i)^{1/12}-1$

$$\left(1+\frac{0.03}{12}\right) \Rightarrow \textit{factor de capitalización mensual}$$

$$i^{(12)} = \frac{0.03}{12} \Rightarrow \textit{efectivo mensual}$$

$$i^{(12)} = 0.0025$$

Redito mensual

$$V_0 = 1200 a_{\overline{36}|0.0025} = 1200\frac{1-(1.0025)^{-36}}{0.0025} = 41.263.75$$

Pagos mensuales

Nº meses

$$V_{36} = 41.263.75(1.0025)^{36} = 45144.67€$$

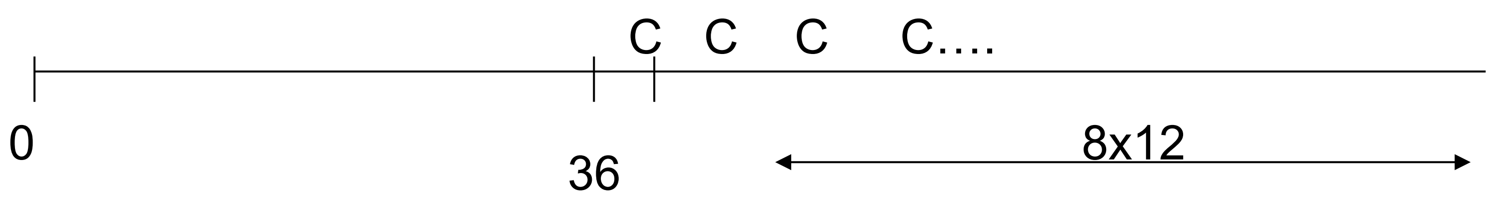
Ejemplo

- Calcular el capital a Ingresar hoy (t=0) en una entidad financiera con el fin de recibir al final de cada mes 500 euros durante 8 años, recibiendo la primera mensualidad dentro de 3 años . El tipo de interés efectivo anual TAE que se aplica a la operación es el 5 anual%.

- En primer lugar se requiere el efectivo mensual equivalente a las condiciones anuales que nos dicen.

$$i^{(12)} = (1.05)^{1/12} - 1 = 0.00407$$

- Posteriormente calcularemos el valor actual de la renta mensual de duración 96 meses, diferida 36 meses de cuantia 500 euros.



$$V_0 = C a_{\overline{8*12}|i^{(12)}} (1+i^{(12)})^{-36} = 500 a_{\overline{96}|0.407\%} (1.00407)^{-36}$$

$$= 34.300€$$

Ejercicio : Renta Perpetua

Su empresa quiere ofertar un premio vitalicio consistente en un salario de 1000€ mensuales, en caso de fallecimiento del titular lo recibirían sus herederos. Calcule que cantidad debe la empresa ingresar actualmente para así poder hacer frente a la deuda que comenzará a pagar dentro de un año. El tipo de interés efectivo al que puede depositar el dinero es un 3% anual capitalizable mensualmente.

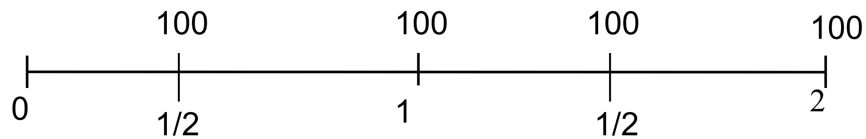
$$i^{(12)} = \frac{0.03}{12} = 0.0025$$

Valor en el origen de la renta ⟶ $V_{12} = \frac{1000}{0.0025} = 400.000€$

Valor en el momento t=0 ⟶ $V_0 = 400.000(1.0025)^{-12} = 388192€$

Calculemos sus V_0 al 6% TAE

Calcular el Valor actual de la siguiente renta semestral al 6% TAE



$$i^{(2)} = (1.06)^{1/2} - 1 = 0.02956$$

$$V_0 = 100 * a_{4|i^{(2)}} = 100\frac{1-(1.0295)^{-4}}{0.0295} = 372.10$$

Ejemplo

- Sara acaba de iniciar sus estudios universitarios que duran 5 años. Sara ha recibido la promesa de su abuelo de ingresarle 4800 euros anuales en un fondo que produce un interés del 12% TAE. Estos ingresos serán efectuados trimestralmente (a razón de 1200 euros trimestrales). ¿Cuánto tendrá Sara dentro de 5 años?

Equivalente trimestral →

$$i^{(4)} = (1.12)^{1/4} - 1 = 0.0287373$$

Rta. Fraccionada trimestral →

$$V_0 = 1200 * a_{20|i^{(4)}} = 18.064$$

$$V_5 = 18064(1.12)^5$$

Ejemplo

- Una persona ha decidido suscribir un plan de pensiones para disponer de él una vez jubilado. En la información recibida sobre dicho plan, los cálculos se realizan al 5% nominal anual con abono mensual de intereses.
- Se realizan aportaciones mensuales a día 1 de cada mes al fondo por valor de 300€ al mes. Pasados tres años y antes de realizar el ingreso correspondiente a ese mes, cambia de opinión y decide que todavía es joven para tener plan de pensiones. Utilizará el dinero para darse un capricho.
- La entidad le descuenta un 1% del capital constituido como penalización por la cancelación anticipada.
  - Calcule la cantidad rescatada
  - Calcule el tanto efectivo que esta persona obtiene de la operación que acaba de realizar.

solución

$$i^{(12)} = \frac{0.05}{12} = 0.004167$$

$$C_{36} = 300\ddot{a}_{\overline{36}|i^{(12)}}\left(1+i^{(12)}\right)^{36} = 300\frac{1-\left(1.004167\right)^{-36}}{0.004167}\left(1.004167\right)^{37} =$$

$$C_{36} = 11674.58€$$

$$\text{Rescata}; C_{36} * 0.99 = 11557.83€$$

$$TAE;$$

$$300a_{\overline{36}|i^{(12)}}\left(1+i^{(12)}\right)^{37} = 11557.83$$

$$i^{(12)} = 0.003634;$$

$$TAE = (1.003634)^{12} - 1 = 0.0444$$

$$TAE = 4.44\%$$

Rentas vitalicias

- Los **seguros de rentas vitalicias** se van imponiendo en el mercado, para **complementar** adecuadamente las **pensiones públicas** de jubilación, en numerosos casos insuficientes para mantener el nivel de vida de sus titulares.

- La entidad aseguradora, a cambio de una prima única garantiza al asegurado una **renta periódica**, que puede ser mensual, trimestral... hasta su fallecimiento. Esa renta que pagará la aseguradora incluye el pago de un interés atractivo.

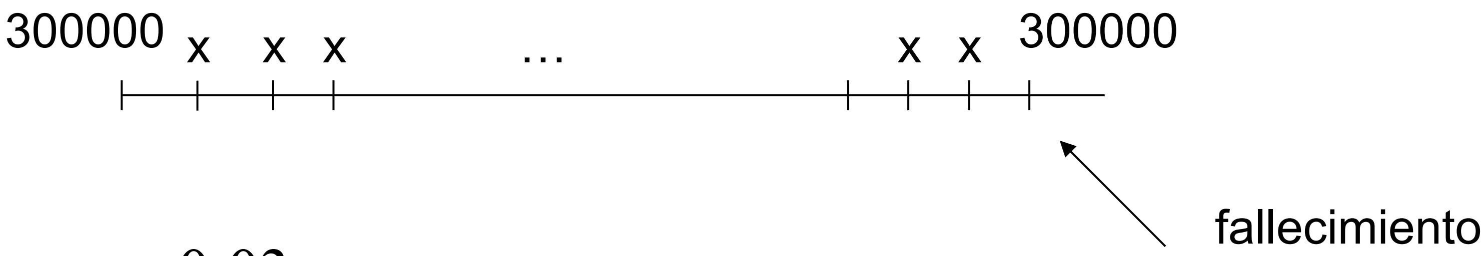
- Además de la renta mensual, en la contratación del producto se puede solicitar también la **cobertura por fallecimiento**, es decir, la suscripción adicional de un seguro de vida. Si se contrata esta cobertura, que suele ser lo más habitual, cuando el asegurado fallece sus beneficiarios recibirán la prima única
- Existen diferentes modalidades:
  - **Rentas inmediatas:** el beneficiario empieza a cobrar de forma inmediata la contratación del seguro. El titular suscribe hoy el seguro y comienza a cobrar una renta mensual al mes que viene.
  - **Rentas diferidas:** El beneficiario empieza a cobrar a partir de una fecha futura determinada. Con esta opción, un cliente puede suscribir el seguro hoy, que tiene 50 años, y puede desear comenzar a cobrar dentro de 15 (a su jubilación, con 65 años).

Ejemplo renta vitalicia

- Una mujer con 50 años acaba de recibir una herencia de 300.000€ y decide reinvertirla en un seguro de rentas vitalicias.
- Acude a su aseguradora quien haciendo uso de la esperanza de vida actual de las mujeres (83 años) calcula la renta mensual que recibirá a partir de eses momento de forma mensual hasta su fallecimiento y le garantiza un 3% nominal anual de tipo de interés. Al fallecimiento los herederos recibirán de nuevo el 100% de la prima.

- Calcule la renta mensual que recibirá esta señora.

Ejemplo renta vitalicia



$$i^{(12)} = \frac{0.03}{12} = 0.0025$$

$$300000 = x a_{\overline{33\times 12}|0.0025} + 300000(1.0025)^{-33\times 12}$$

$$300000 = x \frac{1-(1.0025)^{-396}}{0.0025} + 300000(1.0025)^{-396}$$

$$x = 750€ / mes$$