CÁLCULO I
Para todos los Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

———————

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Capítulo 1. Funciones de variable real

La recta real
Clases de números

- $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$.
  - Propiedades: $(+)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro,
    $(\cdot)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro,
    $(+, \cdot)$ distributiva.
    Problema: $x + 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{N}$.

La recta real
Clases de números

- $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.
  - Propiedades: $(+)$ elemento inverso.
    Problema: $2x - 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Z}$.

La recta real
Clases de números

- $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \; : \; p,\; q \in \mathbb{Z},\; q \neq 0\}$.
  - Propiedades: $(\cdot)$ elemento inverso salvo para el 0.
    Problema: $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Q}$.

La recta real
Clases de números

- $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.
- $\mathbb{Q} = \{\dfrac{p}{q} \; : \; p,\; q \in \mathbb{Z},\; q \neq 0\}$.
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$números con infinitas cifras decimales no periódicas$\}$ (en principio).
  - Propiedades: Completitud.
    Problema: $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{R} \;\rightsquigarrow\;$ números complejos!!

La recta real

Métodos de demostración matemática

- Demostración directa. $P \Rightarrow Q$.
- Demostración por reducción al absurdo. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a (no Q) $\Rightarrow$ (no P).
- Demostración por inducción.

Principio de inducción

La propiedad P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se verifica

1. P_1 es cierta;
2. si P_k es cierta también lo es P_{k+1}.

La recta real
Métodos de demostración matemática

- Demostración directa. $P \Rightarrow Q$.
- Demostración por reducción al absurdo. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a (no Q) $\Rightarrow$ (no P).
- Demostración por inducción.

Principio de inducción

La propiedad P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se verifica

1. P_1 es cierta;
2. si P_n es cierta también lo es P_{n+1}.

La recta real

Métodos de demostración matemática

- Demostración directa. $P \Rightarrow Q$.
- Demostración por reducción al absurdo. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a (no Q) $\Rightarrow$ (no P).
- Demostración por inducción.

Principio de inducción

La propiedad P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se verifica

1. P_1 es cierta;
2. si P_k es cierta también lo es P_{k+1}.

La recta real
Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
  - $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
  - $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
  - $a > b$, $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$
  - $|a| \geq 0 \ \forall\, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  - $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

La recta real

Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
  - $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
  - $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
  - $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$
  - $|a| \geq 0\ \forall\, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  - $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

La recta real
Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
  - $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
  - $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
  - $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$
  - $|a| \geq 0 \, \forall \, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  - $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

La recta real

Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
  - $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
  - $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
  - $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$
  - $|a| \geq 0 \,\forall\, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  - $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

La recta real
Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
  - $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
  - $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
  - $a > b,\ c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0, \\ -x & si\ x \leq 0. \end{cases}$
  - $|a| \geq 0\, \forall\, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  - $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  - $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  - $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

La recta real

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **Intervalo abierto**. $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado**. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

Principio de completitud:

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

La recta real
Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **Intervalo abierto**. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado**. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} : x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

Principio de completitud:

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

La recta real

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **Intervalo abierto**. $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado**. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

Principio de completitud:

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

La recta real

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **Intervalo abierto**. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado**. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

Principio de completitud:

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

La recta real

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- **Intervalo abierto**. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado**. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

Principio de completitud:

Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

La recta real

El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real

El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real

El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \, : \, x, \, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x,\ y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \, : \, x, \, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x,\ y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

La recta real
El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Producto escalar de vectores. Ortogonalidad...
- Curvas elementales
  - **Recta**. $y = ax + b$. **Parábola**. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
  - **Circunferencia**. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.
  - **Elipse**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Hipérbola**. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.
  - **Cónicas**. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

Funciones elementales

Primeras definiciones

Función real de variable real

- Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Se escribe $f : A \to \mathbb{R}$. $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x.
- El dominio de una función es el conjunto de números para los que está definida y se denota por $Dom(f)$. La imagen es el conjunto $Im(f) = \{f(x) : x \in Dom(f)\}$.

Funciones elementales

Primeras definiciones

Función real de variable real

- Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Se escribe $f : A \to \mathbb{R}$. $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x.
- El dominio de una función es el conjunto de números para los que está definida y se denota por $Dom(f)$. La imagen es el conjunto $Im(f) = \{f(x) : x \in Dom(f)\}$.

Funciones elementales

Ejemplos de funciones elementales

- Tipos de funciones: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.
- Dominios:
  - Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
  - Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
  - $\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
  - $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \pi/2 + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
  - e^x: $D = \mathbb{R}$.
  - $\log x$: $D = \{x > 0\}$.

Funciones elementales

Ejemplos de funciones elementales

- Tipos de funciones: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.
- Dominios:
  - Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
  - Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
  - $\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
  - $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \pi/2 + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
  - e^x: $D = \mathbb{R}$.
  - $\log x$: $D = \{x > 0\}$.

Funciones elementales

Ejemplos de funciones elementales

- Tipos de funciones: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.
- Dominios:
  - Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
  - Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
  - $\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
  - $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \pi/2 + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
  - e^x: $D = \mathbb{R}$.
  - $\log x$: $D = \{x > 0\}$.

Funciones elementales

Ejemplos de funciones elementales

- Tipos de funciones: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.
- Dominios:
  - Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
  - Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
  - $\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
  - $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
  - $\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \pi/2 + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
  - e^x: $D = \mathbb{R}$.
  - $\log x$: $D = \{x > 0\}$.

Funciones elementales
Inyectividad

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).
- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.
- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva ($\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y$).

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

Funciones elementales
Inyectividad

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).
- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.
- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva ($\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y$).

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

Funciones elementales

Inyectividad

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).
- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.
- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva $(\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y)$.

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

Funciones elementales
Inyectividad

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).
- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.
- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva $(\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A\ :\ f(x) = y)$.

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

Funciones elementales
Simetrías

graficas

- f es simétrica **par** si $f(-x) = f(x)$.

  Ejemplos: x^2, $\cos x$.

- f es simétrica **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

  Ejemplos: x^3, $\operatorname{sen} x$.

Funciones elementales
Simetrías

graficas

- f es simétrica **par** si $f(-x) = f(x)$.

  Ejemplos: x^2, $\cos x$.

- f es simétrica **impar** si $f(-x) = -f(x)$.

  Ejemplos: x^3, $\operatorname{sen} x$.

Funciones elementales
Composición

$$f\ :\ A \to B, \quad g\ :\ B \to C$$

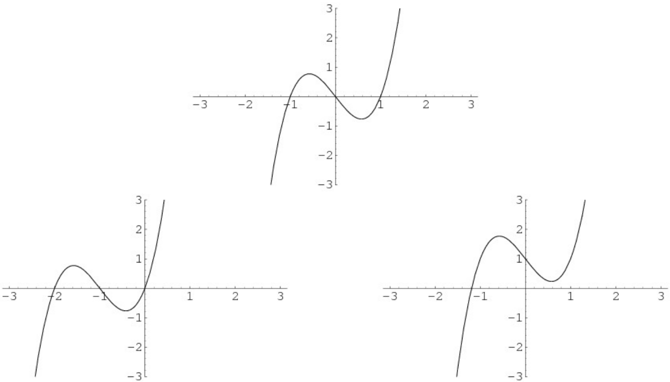
$$h = g \circ f\ :\ A \to C$$

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

En general $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f)\ :\ f(x) \in Dom(g)\}$.

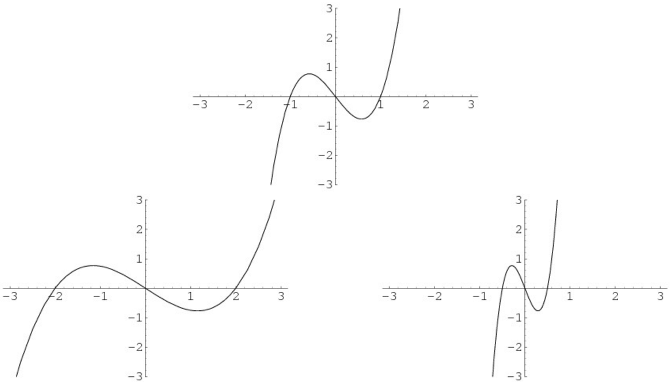
Funciones elementales
Operaciones con gráficas

- **Traslaciones**: horizontal $y = f(x+c)$, vertical $y = f(x) + c$.



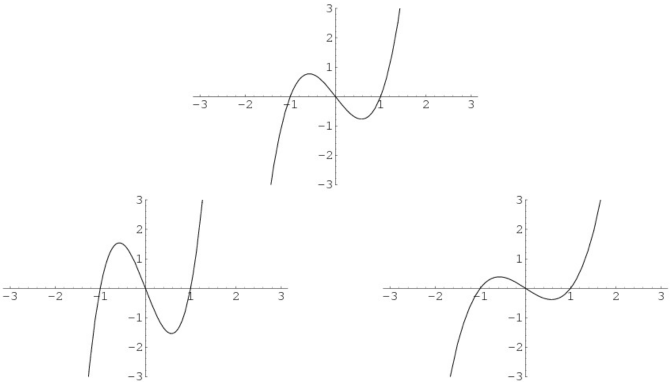
Funciones elementales
Operaciones con gráficas

- **Dilataciones**: horizontal $y = f(cx)$, vertical $y = cf(x)$.



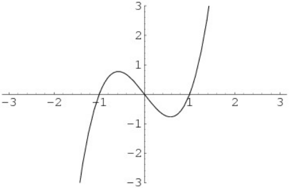
Funciones elementales
Operaciones con gráficas

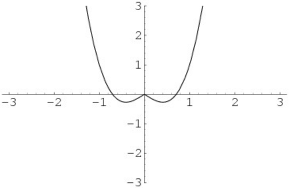
- **Dilataciones**: horizontal $y = f(cx)$, vertical $y = cf(x)$.

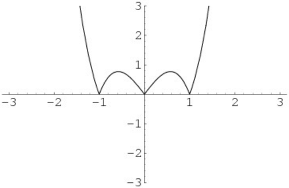


Funciones elementales
Operaciones con gráficas

- **Simetrías**: horizontal $y = f(|x|)$, vertical $y = |f(x)|$.

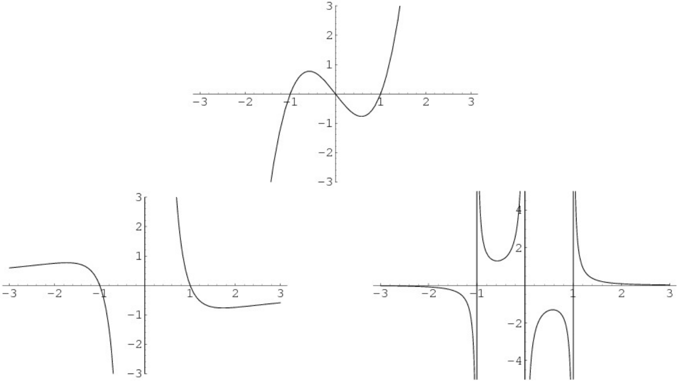




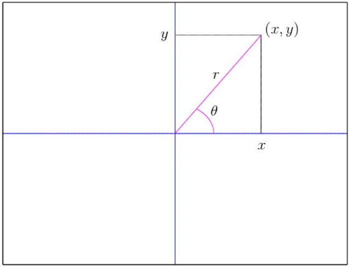


Funciones elementales
Operaciones con gráficas

- **Inversiones**: horizontal $y = f(1/x)$, vertical $y = 1/f(x)$.



Funciones elementales
Coordenadas polares



$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} y/x,$

$(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightsquigarrow \qquad x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$

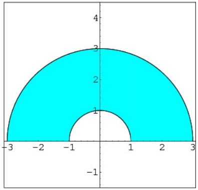
Funciones elementales

Coordenadas polares

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \rightsquigarrow \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} y/x,$$

$$(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \ \rightsquigarrow \qquad x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Ejemplo: $\{\, 1 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \pi \,\} =$ medio anillo.



Límites
Definición

Límite

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (y se lee: el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$
- Si existe el límite es único. Es decir, si l y m verifican la definición, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$, entonces $l = m$.

Límites
Definición

Límite

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (y se lee: el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$
- Si existe el límite es único. Es decir, si l y m verifican la definición, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$, entonces $l = m$.

Límites
Definición

Límite

Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (y se lee: el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

- $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$
- Si existe el límite es único. Es decir, si l y m verifican la definición, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$, entonces $l = m$.

Límites
Propiedades

- Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,.$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m\,.$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\,, \quad \text{si } m \neq 0\,.$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)\,. \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio}\,.$

Límites
Propiedades

- Si existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cl$.
  - $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + m$.
  - $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lm$.
  - $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$, si $m \neq 0$.
  - $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$. si $p(x)$ es un polinomio .

Límites
Propiedades

- Si existen $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\,, \quad$ si $m \neq 0\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)\,. \quad$ si $p(x)$ es un polinomio.

Límites
Propiedades

- Si existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim_{x \to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = l + m\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\,, \quad \text{si } m \neq 0\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)\,. \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio}\,.$

Límites
Propiedades

- Si existen $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\,, \quad \text{si } m \neq 0\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)\,. \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio}\,.$

Límites

Propiedades

- Si existen $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces:
  - $\lim_{x \to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = l + m\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}\,, \quad$ si $m \neq 0\,.$
  - $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)\,. \quad$ si $p(x)$ es un polinomio.

Límites
Propiedades

- Más ejemplos:
  - $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}, \quad \text{si } x_0 > 0.$
  - $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0\,.$
  - $\displaystyle\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}\,.$
  - $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad \text{si } a > 0 \text{ y } x_0 > 0\,.$

Límites

Límite de la composición

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to l} h(x) = m$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} h(f(x)) = m$.
- Ejemplos:
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}\,,\quad$ si $l > 0\,.$
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = l^m,\quad$ si el resultado es distinto de 0^0.
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a(l),\quad$ si $a > 0$ y $l > 0\,.$

Límites

Límite de la composición

- Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to l} h(x) = m$ entonces $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = m$.
- Ejemplos:
  - $\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}\,,$ si $l > 0\,.$
  - $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = l^m,$ si el resultado es distinto de 0^0.
  - $\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a(l),$ si $a > 0$ y $l > 0\,.$

Límites
Límites laterales

Límites laterales

- Decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee límite cuando x tiende a x_0 por la derecha) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- Análogamente por la izquierda, $x \to x_0^-$.

- Se tiene que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Límites

Límites laterales

Límites laterales

- Decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee límite cuando x tiende a x_0 por la derecha) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- Análogamente por la izquierda, $x \to x_0^-$.

- Se tiene que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Límites

Límites laterales

Límites laterales

- Decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee límite cuando x tiende a x_0 por la derecha) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- Análogamente por la izquierda, $x \to x_0^-$.

- Se tiene que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Límites

Límites infinitos

Límites infinitos y en el infinito

- Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Límites
Límites infinitos

Límites infinitos y en el infinito

- Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Límites

Límites infinitos

Límites infinitos y en el infinito

- Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.
- Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Límites

Límites infinitos

Límites infinitos y en el infinito

- Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Límites

Límites infinitos

Límites infinitos y en el infinito

- Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.
- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

Límites
Límites infinitos

- Operaciones con infinito:

$$
\begin{aligned}
a+\infty &= \infty\,, & a-\infty &= -\infty\,,\\
\infty+\infty &= \infty\,, & -\infty-\infty &= -\infty\,,\\
\infty\cdot\infty &= \infty\,, & -\infty\cdot\infty &= -\infty\,,\\
\frac{a}{\infty} &= 0\,, & a\cdot\infty &= \infty\,,\ \text{ si }\ a>0\,,\\
\frac{a}{0} &= \infty\,,\ \text{ si }\ a>0\,, & \frac{a}{0} &= -\infty\,,\ \text{ si }\ a<0\,,\\
\infty^{a} &= \infty\,,\ \text{ si }\ a>0\,, & \infty^{a} &= 0\,,\ \text{ si }\ a<0\,,\\
\infty^{\infty} &= \infty\,, & \infty^{-\infty} &= 0\,,\\
a^{\infty} &= \infty\,,\ \text{ si }\ a>1\,, & a^{\infty} &= 0\,,\ \text{ si }\ 0\le a<1\,.
\end{aligned}
$$

Límites
Indeterminaciones

- Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones, y las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty\,,\ \ \frac{\infty}{\infty}\,,\ \ \frac{0}{0}\,,\ \ 0\cdot\infty\,,\ \ \infty^0\,,\ \ 0^0\,,\ \ 1^\infty\,,\ \ 1^{-\infty}\,.$$

- En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes, mediante alguna operación previa para identificar estos factores.

Límites
Indeterminaciones

- Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones, y las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad \infty^0\,, \quad 0^0\,, \quad 1^\infty\,, \quad 1^{-\infty}\,.$$

- En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes, mediante alguna operación previa para identificar estos factores.

Límites
Indeterminaciones

- Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos indeterminaciones, y las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad \infty^0\,, \quad 0^0\,, \quad 1^\infty\,, \quad 1^{-\infty}\,.$$

- En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes, mediante alguna operación previa para identificar estos factores.

Límites
Indeterminaciones

- Si $f(x) = g(x)$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
- Ejemplo: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 3}{x - 2} = 6.$

Límites
Indeterminaciones

- Si $f(x) = g(x)$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
  - Ejemplo: $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x+3}{x-2} = 6.$

Límites
Indeterminaciones

Lema del sandwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$ y

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

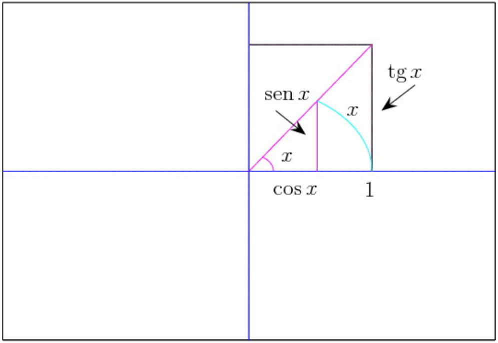
entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Límites

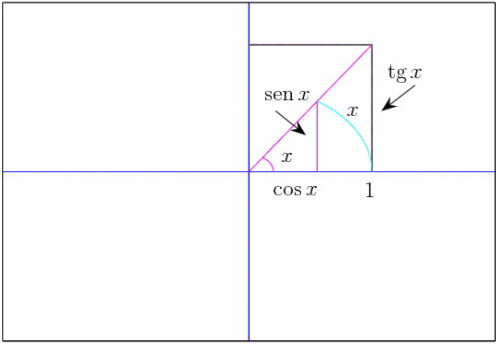
Indeterminaciones

- Ejemplo: $\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; \cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$



Límites
Indeterminaciones

- Ejemplo: $\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; \cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$



$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Límites

Límites relacionados con la exponencial

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ es ∞ entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)},$$

si existe el límite, donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

- Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7}\right)^{x+5} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)\,\frac{10}{2x-7}} = e^5.$

Límites

Límites relacionados con la exponencial

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ es ∞ entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)},$$

si existe el límite, donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

  - Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7}\right)^{x+5} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)\frac{10}{2x-7}} = e^5$.

Continuidad

Definición

Continuidad

Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\lim_{h \to 0} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) = 0$

Continuidad

Definición

Continuidad

Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \, : \, |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- $\lim_{h \to 0} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) = 0$

Continuidad
Definición

Continuidad

Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
- $$\lim_{h \to 0} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) = 0$$

Continuidad
Definición

- Una función es continua en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos.

- Una función es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en (a, b), existen los límites laterales interiores en a y en b, y coinciden con los valores de f en esos puntos,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidad
Definición

- Una función es continua en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos.

- Una función es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en (a, b), existen los límites laterales interiores en a y en b, y coinciden con los valores de f en esos puntos,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Continuidad
Ejemplos y propiedades

- Ejemplo de funciones continuas:
  - Polinomios, seno y coseno, exponencial, (en todo $\mathbb{R}$), logaritmo (en $\{x > 0\}$), raíz cuadrada (en $\{x \geq 0\}$).
- Propiedades:
  - La suma de funciones continuas es continua; igual que el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).
  - La composición de funciones continuas es continua: si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Continuidad

Ejemplos y propiedades

- Ejemplo de funciones continuas:
  - Polinomios, seno y coseno, exponencial, (en todo $\mathbb{R}$), logaritmo (en $\{x > 0\}$), raíz cuadrada (en $\{x \geq 0\}$).
- Propiedades:
  - La suma de funciones continuas es continua; igual que el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).
  - La composición de funciones continuas es continua: si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

Continuidad
Ejemplos y propiedades

- Ejemplo de funciones continuas:
  - Polinomios, seno y coseno, exponencial, (en todo $\mathbb{R}$), logaritmo (en $\{x > 0\}$), raíz cuadrada (en $\{x \geq 0\}$).
- Propiedades:
  - La suma de funciones continuas es continua; igual que el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).
  - Si g es continua, entonces
$$\lim_{x \to \alpha} g(f(x)) = g(\lim_{x \to \alpha} f(x)).$$

Continuidad
Discontinuidades

- Si existe el límite de f en x_0 pero no coincide con el valor $f(x_0)$, o f no está definida allí, se dice que f tiene una discontinuidad evitable en ese punto. Se evita la discontinuidad definiendo correctamente el valor $f(x_0)$.
  - Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{es discontinua en } x_0 = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{es continua en } \mathbb{R}.$$

- La función $f(x) = 1/x$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

Continuidad

Discontinuidades

- Si existe el límite de f en x_0 pero no coincide con el valor $f(x_0)$, o f no está definida allí, se dice que f tiene una discontinuidad evitable en ese punto. Se evita la discontinuidad definiendo correctamente el valor $f(x_0)$.

  - Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{es discontinua en } x_0 = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{es continua en } \mathbb{R}.$$

- La función $f(x) = 1/x$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

Continuidad
Discontinuidades

- Si existe el límite de f en x_0 pero no coincide con el valor $f(x_0)$, o f no está definida allí, se dice que f tiene una discontinuidad evitable en ese punto. Se evita la discontinuidad definiendo correctamente el valor $f(x_0)$.
  - Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{es discontinua en } x_0 = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{es continua en } \mathbb{R}.$$

- La función $f(x) = 1/x$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

Continuidad

Resultados sobre continuidad global

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Si f es una función continua en $[a, b]$ con, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces para todo $z \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$.

Se dice también: f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Continuidad

Resultados sobre continuidad global

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Si f es una función continua en $[a, b]$ con, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces para todo $z \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$.

Se dice también: f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Continuidad

Resultados sobre continuidad global

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios

Si f es una función continua en $[a, b]$ con, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces para todo $z \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$.

Se dice también: f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Continuidad

Resultados sobre continuidad global

Teorema de acotación

Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$ y además alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$. Es decir, existen puntos $x_m, x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

- Contraejemplos

$$f(x) = 1/x \quad \text{en } [-1, 1]; \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } (0, 1];$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{en } [0, 1); \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } [1, \infty).$$

Continuidad

Resultados sobre continuidad global

Teorema de acotación

Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$ y además alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$. Es decir, existen puntos x_m, $x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

- Contraejemplos

$$f(x) = 1/x \quad \text{en } [-1, 1]; \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } (0, 1];$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{en } [0, 1); \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } [1, \infty).$$