

CÁLCULO I

Para todos los Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid
Departamento de Matemáticas



Capítulo 2. Cálculo diferencial de una variable

2.1 Derivación de funciones

2.2 Extremos

2.3 Estudio local

2.4 Polinomio de Taylor

Derivación de funciones

Preliminares

- **Velocidad media** en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, si $u(t)$ es la posición:

$$v_m = \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

- Pendiente del segmento que une dos puntos de la gráfica $y = f(x)$ de abscisas x_0 y $x_0 + h$:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La recta secante correspondiente es

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Derivación de funciones

Preliminares

- Velocidad media en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, si $u(t)$ es la posición:

$$v_m = \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}.$$

- **Pendiente** del segmento que une dos puntos de la gráfica $y = f(x)$ de abscisas x_0 y $x_0 + h$:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La recta secante correspondiente es

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Derivación de funciones

Definición

Derivada

Dada una función f , la **derivada** de f en un punto x_0 se define como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Ejemplo: Si $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

Derivación de funciones

Definición

Derivada

Dada una función f , la **derivada** de f en un punto x_0 se define como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Ejemplo: Si $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

Derivación de funciones

Definición

- Se dice que f es derivable en x_0 si el límite anterior existe y es finito. Se dice que f es derivable en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si es derivable en todos sus puntos. La función f' existe para los puntos del dominio de f donde sea derivable.

- Notación alternativa

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Definición alternativa

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivación de funciones

Definición

- Se dice que f es derivable en x_0 si el límite anterior existe y es finito. Se dice que f es derivable en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si es derivable en todos sus puntos. La función f' existe para los puntos del dominio de f donde sea derivable.
- Notación alternativa

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Definición alternativa

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivación de funciones

Definición

- Se dice que f es derivable en x_0 si el límite anterior existe y es finito. Se dice que f es derivable en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si es derivable en todos sus puntos. La función f' existe para los puntos del dominio de f donde sea derivable.

- Notación alternativa

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Definición alternativa

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivación de funciones

Derivabilidad implica continuidad

Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces es continua en x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0.$$

El recíproco es falso: $f(x) = |x|$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

Derivación de funciones

Derivabilidad implica continuidad

Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces es continua en x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0.$$

El recíproco es falso: $f(x) = |x|$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

Derivación de funciones

Derivabilidad implica continuidad

Teorema

Si f es derivable en x_0 entonces es continua en x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = 0.$$

El recíproco es falso: $f(x) = |x|$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

Derivación de funciones

Ejemplos

• Primeras derivadas

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) & \rightsquigarrow f'(x) = nx^{n-1} \\
 f(x) = \operatorname{sen} x & \rightsquigarrow f'(x) = \cos x \\
 f(x) = \cos x & \rightsquigarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x \\
 f(x) = e^x & \rightsquigarrow f'(x) = e^x \\
 f(x) = \log x & \rightsquigarrow f'(x) = 1/x
 \end{array}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} &= \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) &= nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Primeras derivadas

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) & \rightsquigarrow f'(x) = nx^{n-1} \\ f(x) = \operatorname{sen} x & \rightsquigarrow f'(x) = \cos x \\ f(x) = \cos x & \rightsquigarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x \\ f(x) = e^x & \rightsquigarrow f'(x) = e^x \\ f(x) = \log x & \rightsquigarrow f'(x) = 1/x \end{array}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Primeras derivadas

$$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f(x) = e^x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \log x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = 1/x$$

- *Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x (\cos h - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} \right) &= \cos x. \end{aligned}$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Primeras derivadas

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = e^x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = 1/x$

- *Ejemplo:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x.$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Primeras derivadas

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = e^x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log x$	$\rightsquigarrow$	$f'(x) = 1/x$

- Ejemplo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log((x+h)/x) =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \log[(1 + h/x)^{1/h}] = \frac{1}{x}.$$

Derivación de funciones

Propiedades

- La derivada es una operación **lineal**: $(cf)' = cf'$,
 $(f + g)' = f' + g'$.
- Derivada de un producto: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Derivada de un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- Ejemplo: Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Derivación de funciones

Propiedades

- La derivada es una operación lineal: $(cf)' = cf'$,
 $(f + g)' = f' + g'$.
- **Derivada de un producto:** $(fg)' = f'g + fg'$.
- Derivada de un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- Ejemplo: Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Derivación de funciones

Propiedades

- La derivada es una operación lineal: $(cf)' = cf'$,
 $(f + g)' = f' + g'$.
- Derivada de un producto: $(fg)' = f'g + fg'$.
- Derivada de un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- Ejemplo: Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Derivación de funciones

Propiedades

- La derivada es una operación lineal: $(cf)' = cf'$,
 $(f + g)' = f' + g'$.
 - Derivada de un producto: $(fg)' = f'g + fg'$.
 - Derivada de un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Derivación de funciones

Propiedades

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*:
 $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$

- Ejemplo: Si $f(x) = \text{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- Idea: Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Derivación de funciones

Propiedades

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*:
 $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$

- *Ejemplo*: Si $f(x) = \text{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- *Idea*: Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Derivación de funciones

Propiedades

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*:
 $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$

- *Ejemplo*: Si $f(x) = \text{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- **Derivada de la función inversa**: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- *Idea*: Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Derivación de funciones

Propiedades

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*:
 $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$

- *Ejemplo*: Si $f(x) = \text{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- *Idea*: Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Más derivadas

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

$$f(x) = \arcsen x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctg x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Ejemplo:

$$f(x) = a^x = e^{x \log a} \rightarrow f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Más derivadas

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

$$f(x) = \arcsen x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctg x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- *Ejemplo:*

$$f(x) = a^x = e^{x \log a} \rightarrow f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Más derivadas

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

$$f(x) = \arcsen x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctg x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Ejemplo: $f(x) = \log_a x = g^{-1}(x)$ con $g(x) = a^x \rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

- Más fácil: $f(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Más derivadas

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

$$f(x) = \arcsen x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctg x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Ejemplo: $f(x) = \log_a x = g^{-1}(x)$ con $g(x) = a^x \rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

- Más fácil: $f(x) = \log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$

Derivación de funciones

Ejemplos

- Más derivadas

$$f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = a^x \log a$$

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

$$f(x) = \arcsen x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctg x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Ejemplo: $f(x) = \arcsen x = g^{-1}(x)$ con $g(x) = \sen x \rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsen x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema

Si x_0 es un máximo o un mínimo (extremo) local de f y f es derivable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$.

- *Ejemplo de mínimo:* Si $f(x_0) \leq f(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{si } h > 0$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{si } h < 0$$

Por tanto el límite, como existe, debe ser cero.

Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema

Si x_0 es un máximo o un mínimo (extremo) local de f y f es derivable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$.

- *Ejemplo de mínimo*: Si $f(x_0) \leq f(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \text{si } h > 0$$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad \text{si } h < 0$$

Por tanto el límite, como existe, debe ser cero.

Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema

Si x_0 es un máximo o un mínimo (extremo) local de f y f es derivable en x_0 , entonces $f'(x_0) = 0$.

- *Ejemplo de mínimo*: Si $f(x_0) \leq f(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\geq 0 && \text{si } h > 0 \\ \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &\leq 0 && \text{si } h < 0 \end{aligned}$$

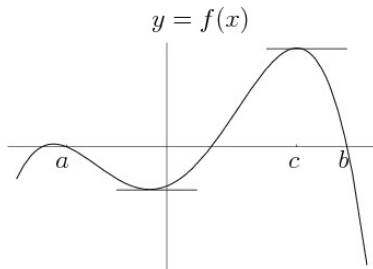
Por tanto el límite, como existe, debe ser cero.

Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema de Rolle

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , con $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Como f es continua en $[a, b]$, alcanza el máximo y el mínimo. Si los dos se alcanzan en a y en b , entonces f es constante. Si no, el máximo o el mínimo está en el interior y es un extremo local. La derivada allí debe ser cero.

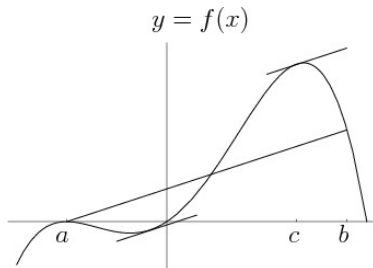
Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema del valor medio

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Derivación de funciones

Teorema del valor medio

Teorema del valor medio

Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- La función $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle.

Derivación de funciones

Aplicaciones del TVM

- Si f es continua en (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b) .
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b) , es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall a < x < y < b.$$

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución en ese intervalo.

Derivación de funciones

Aplicaciones del TVM

- Si f es continua en (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b) .
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b) , es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall a < x < y < b.$$

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución en ese intervalo.

Derivación de funciones

Aplicaciones del TVM

- Si f es continua en (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b) .
- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b) , es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall a < x < y < b.$$

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución en ese intervalo.

Derivación de funciones

Regla de L'Hôpital

Teorema de L'Hôpital-Bernoulli:

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

La regla de L'Hôpital se aplica también si

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$, y también si $\alpha = \infty$.

Derivación de funciones

Regla de L'Hôpital

Teorema de L'Hôpital-Bernoulli:

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

La regla de L'Hôpital se aplica también si

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$, y también si $\alpha = \infty$.

Derivación de funciones

Regla de L'Hôpital

Teorema de L'Hôpital-Bernoulli:

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

La regla de L'Hôpital se aplica también si

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$, y también si $\alpha = \infty$.

Extremos

Preliminares

Resultados necesarios

- Una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza el máximo y el mínimo.
- En un punto de máximo o mínimo local de una función, si existe la derivada debe ser cero.

Extremos

Método de cálculo

Para calcular los extremos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado:

- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

Extremos

Método de cálculo

Para calcular los extremos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado:

- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

Extremos

Método de cálculo

Para calcular los extremos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado:

- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

Extremos

Método de cálculo

Para calcular los extremos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado:

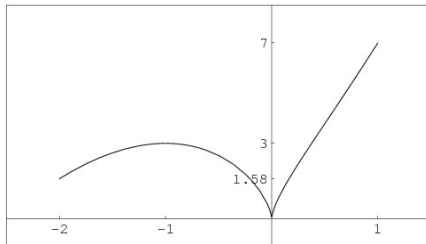
- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

Extremos

Método de cálculo

- Ejemplo

Sea $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$. Se tiene $f'(x) = \frac{10}{3}(x+1)x^{-1/3}$. Así, no existe $f'(0)$, mientras que $f'(-1) = 0$. Comparando los valores $f(0) = 0$, $f(-1) = 3$, $f(-2) = 2^{2/3}$, $f(1) = 7$, se tiene máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 0$.



Propiedades gráficas

Crecimiento

Crecimiento y extremos

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) **creciente** en (a, b) .
- Análogamente para función **decreciente**.
- Si f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene un máximo local en x_0 .
- Análogamente para un mínimo local.

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, así como sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Crecimiento

Crecimiento y extremos

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b) .
- Análogamente para función decreciente.
- Si f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene **un máximo local** en x_0 .
- Análogamente para **un mínimo local**.

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, así como sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Crecimiento

Crecimiento y extremos

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b) .
- Análogamente para función decreciente.
- Si f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene un máximo local en x_0 .
- Análogamente para un mínimo local.

Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, así como sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Convexidad

Conjunto convexo

Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ es **convexo** si dados dos puntos cualesquiera en el conjunto el segmento que los une está completamente contenido en él.

Función convexa

- Se dice que una función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y \geq f(x)\}$ es convexo.
- Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.

Propiedades gráficas

Convexidad

Conjunto convexo

Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera en el conjunto el segmento que los une está completamente contenido en él.

Función convexa

- Se dice que una función f es **convexa** en el intervalo $[a, b]$ si el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y \geq f(x)\}$ es convexo.
- Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.

Propiedades gráficas

Convexidad

Conjunto convexo

Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera en el conjunto el segmento que los une está completamente contenido en él.

Función convexa

- Se dice que una función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y \geq f(x)\}$ es convexo.
- Se dice que f es **cóncava** si $-f$ es convexa.

Propiedades gráficas

Convexidad

- Definiciones alternativas de función convexa.

- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall a < x < b.$

- $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall \begin{matrix} a < x, y < b \\ 0 < \lambda < 1 \end{matrix}.$

- $f'(x) \leq f'(y) \quad \forall a < x < y < b.$

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall a < x < b.$

Propiedades gráficas

Convexidad

- Definiciones alternativas de función convexa.

- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall a < x < b.$

- $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall \begin{matrix} a < x, y < b \\ 0 < \lambda < 1 \end{matrix}.$

- $f'(x) \leq f'(y) \quad \forall a < x < y < b.$

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall a < x < b.$

Propiedades gráficas

Convexidad

- Definiciones alternativas de función convexa.

- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall a < x < b.$

- $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall \begin{matrix} a < x, y < b \\ 0 < \lambda < 1 \end{matrix}.$

- $f'(x) \leq f'(y) \quad \forall a < x < y < b.$

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall a < x < b.$

Propiedades gráficas

Convexidad

- Definiciones alternativas de función convexa.

- $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall a < x < b.$
- $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall \begin{matrix} a < x, y < b \\ 0 < \lambda < 1 \end{matrix}.$
- $f'(x) \leq f'(y) \quad \forall a < x < y < b.$
- $f''(x) \geq 0 \quad \forall a < x < b.$

Propiedades gráficas

Convexidad

Punto de inflexión

Se dice que x_0 es un **punto de inflexión** de una función f si ésta cambia de convexidad a ambos lados del punto.

- Si x_0 es un punto de inflexión de f y existe la segunda derivada allí, entonces $f''(x_0) = 0$.
- Para determinar los intervalos de convexidad de una función, así como sus puntos de inflexión, hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Convexidad

Punto de inflexión

Se dice que x_0 es un punto de inflexión de una función f si ésta cambia de convexidad a ambos lados del punto.

- Si x_0 es un punto de inflexión de f y existe la segunda derivada allí, entonces $f''(x_0) = 0$.
- Para determinar los intervalos de convexidad de una función, así como sus puntos de inflexión, hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Convexidad

Punto de inflexión

Se dice que x_0 es un punto de inflexión de una función f si ésta cambia de convexidad a ambos lados del punto.

- Si x_0 es un punto de inflexión de f y existe la segunda derivada allí, entonces $f''(x_0) = 0$.
- Para determinar los intervalos de convexidad de una función, así como sus puntos de inflexión, hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

Propiedades gráficas

Asíntotas

Asíntotas

- f tiene una **asíntota vertical** en $x = x_0$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una asíntota horizontal $y = a$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una asíntota inclinada $y = mx + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

- En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Propiedades gráficas

Asíntotas

Asíntotas

- f tiene una asíntota vertical en $x = x_0$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una **asíntota horizontal** $y = a$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una asíntota inclinada $y = mx + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

- En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Propiedades gráficas

Asíntotas

Asíntotas

- f tiene una asíntota vertical en $x = x_0$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una asíntota horizontal $y = a$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una **asíntota inclinada** $y = mx + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

- En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Propiedades gráficas

Asíntotas

Asíntotas

- f tiene una asíntota vertical en $x = x_0$ si $\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una asíntota horizontal $y = a$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una asíntota inclinada $y = mx + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx - b) = 0.$$

- En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx).$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Construcción

- Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado, por un polinomio.
- La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto.
- Empecemos con $x_0 = 0$. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

el cálculo de sus derivadas en $x = 0$ es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(0) = k! a_k .$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Construcción

- Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado, por un polinomio.
- La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto.
- Empecemos con $x_0 = 0$. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

el cálculo de sus derivadas en $x = 0$ es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(0) = k! a_k .$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Construcción

- Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado, por un polinomio.
- La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto.
- Empecemos con $x_0 = 0$. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

el cálculo de sus derivadas en $x = 0$ es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(0) = k! a_k .$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Para que coincidan estos valores con $\frac{d^k f}{dx^k}(0)$, basta tomar

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

- Así el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor del punto $x = 0$, es

$$P_{n,0}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Para que coincidan estos valores con $\frac{d^k f}{dx^k}(0)$, basta tomar

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

- Así el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor del punto $x = 0$, es

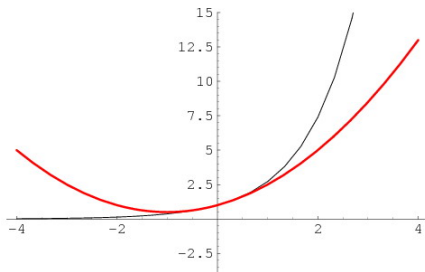
$$P_{n,0}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Polinomio de Taylor

Ejemplo

Sea $f(x) = e^x$. Como $f^{(k)}(0) = 1 \forall k \geq 0$, el polinomio de Taylor es

$$P_{n,0}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$



$$f(x) = e^x, \quad P_{2,0}(f)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Tomemos ahora x_0 cualquiera. El polinomio de grado n se escribe como

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\&= \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k\end{aligned}$$

- El cálculo de sus derivadas en x_0 es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(x_0) = k! a_k.$$

- Para que coincidan estos valores con $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$, basta tomar

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Tomemos ahora x_0 cualquiera. El polinomio de grado n se escribe como

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\&= \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k\end{aligned}$$

- El cálculo de sus derivadas en x_0 es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(x_0) = k! a_k.$$

- Para que coincidan estos valores con $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$, basta tomar

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Polinomio de Taylor

Preliminares

- Tomemos ahora x_0 cualquiera. El polinomio de grado n se escribe como

$$\begin{aligned}P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\&= \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k\end{aligned}$$

- El cálculo de sus derivadas en x_0 es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(x_0) = k! a_k.$$

- Para que coincidan estos valores con $\frac{d^k f}{dx^k}(x_0)$, basta tomar

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Polinomio de Taylor

Definición

Polinomio de Taylor

El **polinomio de Taylor** de orden n de f alrededor del punto $x = x_0$ es

$$P_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Cuando $x_0 = 0$ se suele denominar también polinomio de McLaurin.

Polinomio de Taylor

Definición

Polinomio de Taylor

El polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del punto $x = x_0$ es

$$P_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Cuando $x_0 = 0$ se suele denominar también polinomio de McLaurin.

Polinomio de Taylor

Ejemplos

En los siguientes ejemplos tomamos $x_0 = 0$.

- $\text{sen } x \rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\text{cos } x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

- $\frac{1}{1-x} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

- $\log(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

También, para $x_0 = 1$.

- $\log x \rightarrow$
 $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$

Polinomio de Taylor

Ejemplos

En los siguientes ejemplos tomamos $x_0 = 0$.

- $\text{sen } x \rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $\text{cos } x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

- $\frac{1}{1-x} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

- $\log(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$

También, para $x_0 = 1$.

- $\log x \rightarrow (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$

Polinomio de Taylor

Ejemplos

En los siguientes ejemplos tomamos $x_0 = 0$.

$$\bullet \text{ sen } x \rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\bullet \text{ cos } x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

$$\bullet \log(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

También, para $x_0 = 1$.

$$\bullet \log x \rightarrow (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$$

Polinomio de Taylor

Ejemplos

En los siguientes ejemplos tomamos $x_0 = 0$.

$$\bullet \text{ sen } x \rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\bullet \text{ cos } x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

$$\bullet \log(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

También, para $x_0 = 1$.

$$\bullet \log x \rightarrow (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$$

Polinomio de Taylor

Ejemplos

En los siguientes ejemplos tomamos $x_0 = 0$.

$$\bullet \text{ sen } x \rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\bullet \text{ cos } x \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\bullet \frac{1}{1-x} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

$$\bullet \log(1+x) \rightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

También, para $x_0 = 1$.

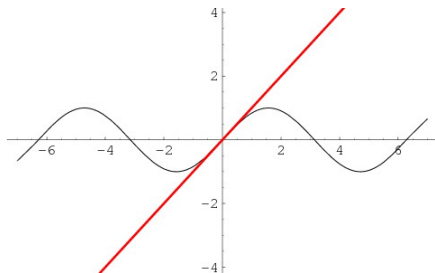
$$\bullet \log x \rightarrow (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^n}{n}$$

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}f(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$



$$f(x) = \sin x,$$

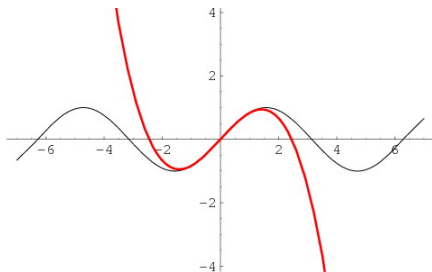
$$P_{1,0}(f)(x) = x.$$

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0} f(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$



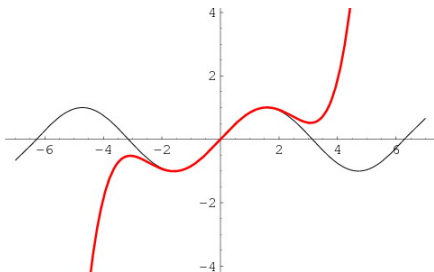
$$f(x) = \sin x,$$
$$P_{3,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0} f(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$



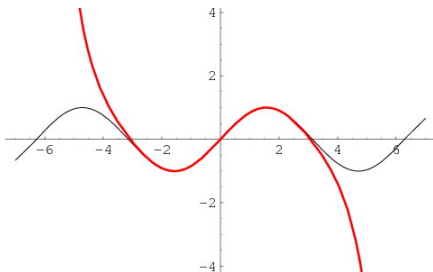
$$f(x) = \sin x,$$
$$P_{5,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Teorema de Taylor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0} f(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$



$$P_{7,0}f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}.$$

$f(x) = \sin x,$

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Este resultado también se puede escribir, con la notación de Landau

Teorema de Taylor

$$f(x) = P_{n,x_0} f(x) + o(|x - x_0|^n).$$

para $x \rightarrow x_0$.

- Ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

para $x \rightarrow 0$.

Polinomio de Taylor

Teorema de Taylor

Este resultado también se puede escribir, con la notación de Landau

Teorema de Taylor

$$f(x) = P_{n,x_0} f(x) + o(|x - x_0|^n).$$

para $x \rightarrow x_0$.

- Ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

para $x \rightarrow 0$.

Polinomio de Taylor

Notación de Landau

Definición

Se dice que $f(x) = o(g(x))$, y se lee “o pequeña de”, para x cerca de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- Ejemplos:

$$\cos x - 1 = o(\sin x)$$

$$\text{para } x \rightarrow 0$$

$$\log x = o(x)$$

$$\text{para } x \rightarrow \infty$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{para } x \rightarrow 0.$$

Polinomio de Taylor

Notación de Landau

Definición

Se dice que $f(x) = o(g(x))$, y se lee “o pequeña de”, para x cerca de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- Ejemplos:

$$\cos x - 1 = o(\sin x) \quad \text{para } x \rightarrow 0$$

$$\log x = o(x) \quad \text{para } x \rightarrow \infty$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{para } x \rightarrow 0.$$

Polinomio de Taylor

Cálculo de límites

Para calcular límites usamos el Teorema de Taylor con el grado del polinomio conveniente.

- Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x + x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2/2 - (1 + x + x^2/2) + x + o(x^2)}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1.$$

Polinomio de Taylor

Resto de Taylor

- Según el Teorema de Taylor, el resto

$$R_{n,x_0} f(x) = f(x) - P_{n,x_0} f(x),$$

verifica que tiende a cero para $x \rightarrow x_0$, y lo hace más deprisa cuanto mayor es n .

Polinomio de Taylor

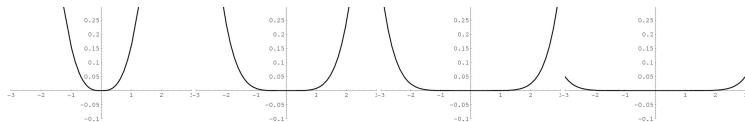
Resto de Taylor

- Según el Teorema de Taylor, el resto

$$R_{n,x_0} f(x) = f(x) - P_{n,x_0} f(x),$$

verifica que tiende a cero para $x \rightarrow x_0$, y lo hace más deprisa cuanto mayor es n .

- En el ejemplo anterior de la función seno, podemos dibujar el valor absoluto del resto (el error) para los cuatro polinomios calculados, $n = 1, 3, 5$ y 7 :



Polinomio de Taylor

Resto de Taylor

Para estimarlo cuantitativamente utilizamos la fórmula de Lagrange,

Resto de Taylor

$$R_{n,x_0} f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algún $c \in (x, x_0)$ o $c \in (x_0, x)$.

Polinomio de Taylor

Resto de Taylor

- Ejemplo: si $f(x) = \text{sen } x$, para estimar $\text{sen } 1$ mediante el polinomio de grado 5, utilizamos

$$|R_{5,0}f(1)| \leq \frac{1}{6!}$$

y obtenemos

$$\text{sen } 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \frac{1}{720}$$

El valor obtenido es $\text{sen } 1 \approx 0.8416$, con un error de 0.0014. El valor exacto con 6 cifras decimales es 0.841471.

Polinomio de Taylor

Aplicación a la caracterización de extremos

Caracterización de extremos

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.
Entonces

- Si k es par y $f^{(k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{(k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Polinomio de Taylor

Aplicación a la caracterización de extremos

Caracterización de extremos

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.
Entonces

- Si k es par y $f^{(k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{(k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Polinomio de Taylor

Aplicación a la caracterización de extremos

Caracterización de extremos

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.
Entonces

- Si k es par y $f^{(k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{(k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Polinomio de Taylor

Aplicación a la caracterización de extremos

Caracterización de extremos

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.
Entonces

- Si k es par y $f^{(k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{(k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Polinomio de Taylor

Aplicación a la caracterización de extremos

Caracterización de extremos

Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) \neq 0$.
Entonces

- Si k es par y $f^{(k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{(k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$