

CÁLCULO I

Para todos los Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid
Departamento de Matemáticas



Capítulo 3. Sucesiones y series

3.1 Sucesiones de números

3.2 Series de números

3.3 Series de Taylor

Sucesiones

Preliminares

- Una sucesión es la imagen de una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & n & \rightarrow a_n = f(n) \end{array}$$

- Los términos de la sucesión se escriben $a_1, a_2, a_3, \dots$ (en ocasiones se consideran también sucesiones comenzando por a_0 o a_k)
- El término general es $a_n = f(n)$. La sucesión se suele escribir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- También se pueden considerar sucesiones definidas en forma recurrente

$$a_{n+1} = g(a_n), \quad n \geq 1, \quad a_1 \text{ dado.}$$

Sucesiones

Preliminares

- Una sucesión es la imagen de una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow a_n = f(n) \end{aligned}$$

- Los términos de la sucesión se escriben $a_1, a_2, a_3, \dots$ (en ocasiones se consideran también sucesiones comenzando por a_0 o a_k)
- El término general es $a_n = f(n)$. La sucesión se suele escribir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- También se pueden considerar sucesiones definidas en forma recurrente

$$a_{n+1} = g(a_n), \quad n \geq 1, \quad a_1 \text{ dado.}$$

Sucesiones

Preliminares

- Una sucesión es la imagen de una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & n & \rightarrow a_n = f(n) \end{array}$$

- Los términos de la sucesión se escriben $a_1, a_2, a_3, \dots$ (en ocasiones se consideran también sucesiones comenzando por a_0 o a_k)
- El término general es $a_n = f(n)$. La sucesión se suele escribir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- También se pueden considerar sucesiones definidas en forma recurrente

$$a_{n+1} = g(a_n), \quad n \geq 1, \quad a_1 \text{ dado.}$$

Sucesiones

Preliminares

- Una sucesión es la imagen de una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ & n & \rightarrow a_n = f(n) \end{array}$$

- Los términos de la sucesión se escriben $a_1, a_2, a_3, \dots$ (en ocasiones se consideran también sucesiones comenzando por a_0 o a_k)
- El término general es $a_n = f(n)$. La sucesión se suele escribir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- También se pueden considerar sucesiones definidas en forma recurrente

$$a_{n+1} = g(a_n), \quad n \geq 1, \quad a_1 \text{ dado.}$$

Sucesiones

Convergencia

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para monótona decreciente.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si $a_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para acotada inferiormente.

Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sucesiones

Convergencia

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para monótona decreciente.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si $a_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para acotada inferiormente.

Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sucesiones

Convergencia

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para monótona decreciente.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si $a_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para acotada inferiormente.

Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sucesiones

Convergencia

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para monótona decreciente.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si $a_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para acotada inferiormente.

Sucesión convergente

Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_0.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sucesiones

Límites

- Se dice que una sucesión no es convergente cuando el límite no existe (la sucesión es oscilante sin acercarse a ningún valor) o el límite existe pero es infinito (o menos infinito). La definición de límite infinito es la análoga sustituyendo la expresión $|a_n - \ell| < \varepsilon$ por $a_n > M$.
- Ejemplos:

$$a_n = (-1)^n, \quad a_n = 2n + 3.$$

Sucesiones

Límites

- Se dice que una sucesión no es convergente cuando el límite no existe (la sucesión es oscilante sin acercarse a ningún valor) o el límite existe pero es infinito (o menos infinito). La definición de límite infinito es la análoga sustituyendo la expresión $|a_n - \ell| < \varepsilon$ por $a_n > M$.
- Ejemplos:

$$a_n = (-1)^n, \quad a_n = 2n + 3.$$

Sucesiones

Propiedades de los límites

Cuando existan los límites involucrados, se tienen las siguientes propiedades

- Linealidad: el límite de la suma es la suma de los límites; las constantes multiplicativas conmutan con el límite.
- El límite del producto es el producto de los límites. Igual con el cociente si el denominador no es cero.
- El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ y h es una función continua en ℓ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = h(\ell).$$

Sucesiones

Propiedades de los límites

Cuando existan los límites involucrados, se tienen las siguientes propiedades

- Linealidad: el límite de la suma es la suma de los límites; las constantes multiplicativas conmutan con el límite.
- El límite del producto es el producto de los límites. Igual con el cociente si el denominador no es cero.
- El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ y h es una función continua en ℓ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = h(\ell).$$

Sucesiones

Propiedades de los límites

Cuando existan los límites involucrados, se tienen las siguientes propiedades

- Linealidad: el límite de la suma es la suma de los límites; las constantes multiplicativas conmutan con el límite.
- El límite del producto es el producto de los límites. Igual con el cociente si el denominador no es cero.
- El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ y h es una función continua en ℓ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = h\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = h(\ell).$$

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos además alguna de las siguientes técnicas:

- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

Sucesiones

Límites

Lema del sandwich

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \ell$ y $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \geq k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ pues

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Sucesiones

Límites

Criterio de Stolz

Si se verifica alguna de las dos propiedades

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ creciente, o
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, decrecientes, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

siempre que este último límite exista.

Es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n .

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 2^n} = 2.$

Sucesiones

Límites

Criterio de Stolz

Si se verifica alguna de las dos propiedades

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ creciente, o
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, decrecientes, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

siempre que este último límite exista.

Es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n .

- Ejemplo:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 4 + \dots + 2^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 2^n} = 2.$$

Sucesiones

Límites

Fórmula de Stirling

El siguiente límite es útil para calcular límites que involucren factoriales:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{n(2\pi n)^{1/2n}} = e.$

Sucesiones

Límites

Fórmula de Stirling

El siguiente límite es útil para calcular límites que involucren factoriales:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{en}{n(2\pi n)^{1/2n}} = e.$

Sucesiones

Límites

- Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

si este último límite existe. Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor. Es especialmente útil en la forma $a_n = g(1/n)$, en cuyo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(3/n))^{n^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{1/x^2} =$
 $\exp\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}\right] = e^{-9/2}.$

Sucesiones

Límites

- Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

si este último límite existe. Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor. Es especialmente útil en la forma $a_n = g(1/n)$, en cuyo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(3/n))^{n^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{1/x^2} =$
 $\exp\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}\right] = e^{-9/2}.$

Sucesiones

Límites

- Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

si este último límite existe. Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor. Es especialmente útil en la forma $a_n = g(1/n)$, en cuyo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

- Ejemplo: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(3/n))^{n^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(3x))^{1/x^2} =$
 $\exp\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{x^2}\right] = e^{-9/2}.$

Sucesiones

Límites

Sucesiones monótonas y acotadas

Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Análogamente toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

- Ejemplo: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ es monótona creciente, pues

$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Además $a_n \leq 1$ para todo n . Por tanto es una sucesión convergente. El límite es fácil de calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1+2x} = 1.$$

Sucesiones

Límites

Sucesiones monótonas y acotadas

Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Análogamente toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

- Ejemplo: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ es monótona creciente, pues

$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$. Además $a_n \leq 1$ para todo n . Por tanto es una sucesión convergente. El límite es fácil de calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1+2x} = 1.$$

Sucesiones

Sucesiones recurrentes

- Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, entonces la sucesión es monótona si $g' \geq 0$ y oscilante si $g' \leq 0$.

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1}) = g'(c)(a_n - a_{n-1}), \quad \text{para algún } c.$$

- Si la sucesión es convergente, el límite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ debe verificar $\ell = g(\ell)$.

- Ejemplo: $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$ es monótona creciente, pues $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ y $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$. Además es acotada (por inducción) $a_n \leq 2$. Por tanto es convergente y el límite debe verificar $\ell = \sqrt{2\ell}$, es decir $\ell = 0$ o $\ell = 2$. Pero $\ell > a_1 = 1$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Sucesiones

Sucesiones recurrentes

- Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, entonces la sucesión es monótona si $g' \geq 0$ y oscilante si $g' \leq 0$.

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1}) = g'(c)(a_n - a_{n-1}), \quad \text{para algún } c.$$

- Si la sucesión es convergente, el límite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ debe verificar $\ell = g(\ell)$.

- Ejemplo: $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$ es monótona creciente, pues $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ y $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$. Además es acotada (por inducción) $a_n \leq 2$. Por tanto es convergente y el límite debe verificar $\ell = \sqrt{2\ell}$, es decir $\ell = 0$ o $\ell = 2$. Pero $\ell > a_1 = 1$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Sucesiones

Sucesiones recurrentes

- Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, entonces la sucesión es monótona si $g' \geq 0$ y oscilante si $g' \leq 0$.

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1}) = g'(c)(a_n - a_{n-1}), \quad \text{para algún } c.$$

- Si la sucesión es convergente, el límite $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ debe verificar $\ell = g(\ell)$.

- Ejemplo: $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$ es monótona creciente, pues $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ y $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$. Además es acotada (por inducción) $a_n \leq 2$. Por tanto es convergente y el límite debe verificar $\ell = \sqrt{2\ell}$, es decir $\ell = 0$ o $\ell = 2$. Pero $\ell > a_1 = 1$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Sucesiones

Sucesiones recurrentes

Teorema del punto fijo

Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, con $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y se verifica $a_k \in I$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y su límite ℓ es el único punto fijo $\ell = g(\ell)$ en I .

- Ejemplo: $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}$, con $a_1 = 10$, es una sucesión convergente, pues $|g'(x)| = \frac{1}{2}$ (oscilante pues $g' < 0$) con límite la solución de $\ell = 1 - \frac{\ell}{2}$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Sucesiones

Sucesiones recurrentes

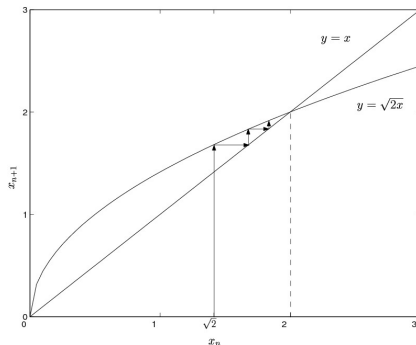
Teorema del punto fijo

Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, con $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y se verifica $a_k \in I$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y su límite ℓ es el único punto fijo $\ell = g(\ell)$ en I .

- Ejemplo: $a_{n+1} = 1 - \frac{a_n}{2}$, con $a_1 = 10$, es una sucesión convergente, pues $|g'(x)| = \frac{1}{2}$ (oscilante pues $g' < 0$) con límite la solución de $\ell = 1 - \frac{\ell}{2}$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$.

Sucesiones

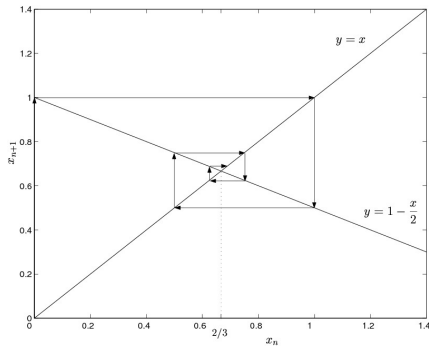
Diagrama de la telaraña



$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad x_1 = \sqrt{2}.$$

Sucesiones

Diagrama de la telaraña



$$x_{n+1} = 1 - \frac{x_n}{2}, \quad x_1 = 0.$$

Series

Preliminares

- Una serie (infinita) es la suma de todos los términos de una sucesión.

Definición

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el límite de las sumas parciales existe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L.$$

Se dice entonces que la suma de la serie es L .

Series

Preliminares

- Una serie (infinita) es la suma de todos los términos de una sucesión.

Definición

Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el límite de las sumas parciales existe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = L.$$

Se dice entonces que la suma de la serie es L .

Series

Convergencia

- Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^{N+1} - r}{r - 1} = \frac{r}{1 - r}$$

siempre que $|r| < 1$. Si $r \geq 1$ el límite es infinito; si $r \leq -1$ el límite ni siquiera existe.

- Una condición necesaria para la convergencia de una serie es que el término general tienda a cero. Pero no es una condición suficiente. El ejemplo estándar es la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ que diverge.}$$

Series

Convergencia

- Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{r^{N+1} - r}{r - 1} = \frac{r}{1 - r}$$

siempre que $|r| < 1$. Si $r \geq 1$ el límite es infinito; si $r \leq -1$ el límite ni siquiera existe.

- Una condición necesaria para la convergencia de una serie es que el término general tienda a cero. Pero no es una condición suficiente. El ejemplo estándar es la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ que diverge.}$$

Series

Términos positivos

En general, dada una serie concreta convergente, no se podrá determinar el valor exacto de la suma, pero es imprescindible poder conocer su convergencia para aplicar algún método numérico de aproximación.

Veremos pues criterios que determinen cuándo una serie de términos positivos es convergente o no.

Series

Términos positivos

- *Criterio del cociente.* Supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ell = 1 & \text{el criterio no decide.} \end{array} \right.$$

Series

Términos positivos

- *Criterio de la raíz.* Supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ell = 1 & \text{el criterio no decide.} \end{array} \right.$$

- (Si al intentar aplicar el criterio del cociente se obtiene $\ell = 1$, no se debe aplicar el criterio de la raíz pues el límite será el mismo).

Series

Términos positivos

- *Criterio de la raíz.* Supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ell = 1 & \text{el criterio no decide.} \end{array} \right.$$

- (Si al intentar aplicar el criterio del cociente se obtiene $\ell = 1$, no se debe aplicar el criterio de la raíz pues el límite será el mismo).

Series

Términos positivos

- *Criterio de comparación directa.* Supongamos que se verifica $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$ para algún k . Entonces

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{n=k}^{\infty} b_n \text{ converge} & \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ diverge} & \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} b_n \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

- *Criterio de comparación en el límite.* Supongamos que se verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, donde $0 < c < \infty$. Entonces ambas series tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen.

Series

Términos positivos

- *Criterio de comparación directa.* Supongamos que se verifica $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$ para algún k . Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=k}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} b_n \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

- *Criterio de comparación en el límite.* Supongamos que se verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, donde $0 < c < \infty$. Entonces ambas series tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen.

Series

Términos positivos

- *Serie geométrica.* La serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ se denomina serie geométrica de razón r . Se verifica

$$\begin{cases} r < 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ converge,} \\ r \geq 1 & \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Series

Términos positivos

- *Serie p -armónica.* La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se denomina serie p -armónica, generalización de la serie armónica ($p = 1$). Se verifica

$$\begin{cases} p > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge,} \\ p \leq 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge.} \end{cases}$$

Series

Series alternadas

- Una serie alternada tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$, donde $b_n \geq 0$.

Si la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge entonces la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ también converge, pero el recíproco no es cierto. Así pues se considera, para una serie de términos con signo cualquiera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

- Se dice que converge absolutamente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso la serie dada también converge.
- Se dice que converge condicionalmente si converge pero no absolutamente.

Series

Series alternadas

- Una serie alternada tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$, donde $b_n \geq 0$.

Si la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge entonces la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ también converge, pero el recíproco no es cierto. Así pues se considera, para una serie de términos con signo cualquiera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

- Se dice que converge absolutamente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso la serie dada también converge.
- Se dice que converge condicionalmente si converge pero no absolutamente.

Series

Series alternadas

- Una serie alternada tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$, donde $b_n \geq 0$.

Si la serie de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge entonces la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ también converge, pero el recíproco no es cierto. Así pues se considera, para una serie de términos con signo cualquiera $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

- Se dice que converge absolutamente si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso la serie dada también converge.
- Se dice que converge condicionalmente si converge pero no absolutamente.

Series

Series alternadas

- *Criterio de Leibniz.* Si la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, entonces la serie alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge.

Series

Suma de algunas series

- *Serie geométrica.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie aritmético-geométrica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie telescópica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b_1.$$

Series

Suma de algunas series

- *Serie geométrica.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie aritmético-geométrica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie telescópica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b_1.$$

Series

Suma de algunas series

- *Serie geométrica.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie aritmético-geométrica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}, \quad \text{si } |r| < 1.$$

- *Serie telescópica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b_1.$$

Series

Aproximación de sumas

- *Serie alternada.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^N (-1)^n b_n + \varepsilon.$$

Series

Series de potencias

- Una serie de potencias es una suma de la forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

- El conjunto de convergencia es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente. Siempre es un intervalo simétrico $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, aunque puede incluir o no los extremos. El número $\rho \in [0, \infty]$ se denomina **radio de convergencia**.

Series

Series de potencias

- Una serie de potencias es una suma de la forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

- El conjunto de convergencia es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente. Siempre es un intervalo simétrico $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, aunque puede incluir o no los extremos. El número $\rho \in [0, \infty]$ se denomina **radio de convergencia**.

Series

Series de potencias

- El radio de convergencia se calcula con la fórmula

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

donde se utiliza la convención $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$.

Series

Series de Taylor

Teorema

Si f admite todas las derivadas en un cierto intervalo $I \ni x_0$, y el resto del polinomio de Taylor de f , $R_{n,x_0} f(x)$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in I$, entonces f coincide en I con su **serie de Taylor**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Series

Algunas series de Taylor

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$
 $-1 < x \leq 1.$

Series

Algunas series de Taylor

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$
 $-1 < x \leq 1.$

Series

Algunas series de Taylor

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$

Series

Algunas series de Taylor

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$

Series

Algunas series de Taylor

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots,$
 $-1 < x \leq 1.$