

CÁLCULO I

Para todos los Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez y Héctor Pijeira Cabrera

uc3m

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas



Capítulo 4. Integración en una variable

4.1 Cálculo de primitivas

4.2 Teorema fundamental del cálculo

4.3 Aplicaciones

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Definición

Una función F es una **primitiva** o integral de la función f si $F' = f$, y escribimos:

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Llamamos **integrando** a f .

Si F es una primitiva de f , también lo es $g(x) = F(x) + c$, con c constante, luego

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

donde c es la **constante de integración**.

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Definición

Una función F es una **primitiva** o integral de la función f si $F' = f$, y escribimos:

$$\int f(x) dx = F(x).$$

Llamamos **integrando** a f .

Si F es una primitiva de f , también lo es $g(x) = F(x) + c$, con c constante, luego

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

donde c es la **constante de integración**.

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Teorema (linealidad)

Si f y g son funciones y k una constante:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$

Es cierto también para una cantidad finita de sumandos.

No hay fórmulas similares para el producto y el cociente.

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Teorema (linealidad)

Si f y g son funciones y k una constante:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$

Es cierto también para una cantidad finita de sumandos.

No hay fórmulas similares para el producto y el cociente.

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Teorema (linealidad)

Si f y g son funciones y k una constante:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$

Es cierto también para una cantidad finita de sumandos.

No hay fórmulas similares para el producto y el cociente.

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$① \int a \, dx = ax + c,$$

$$② \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$③ \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$④ \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$⑤ \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$⑥ \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$⑦ \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$\textcircled{1} \int a \, dx = ax + c,$$

$$\textcircled{2} \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$\textcircled{4} \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\textcircled{5} \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$\textcircled{6} \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\textcircled{7} \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$\textcircled{1} \int a \, dx = ax + c,$$

$$\textcircled{2} \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$\textcircled{4} \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\textcircled{5} \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$\textcircled{6} \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\textcircled{7} \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$① \int a \, dx = ax + c,$$

$$② \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$③ \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$④ \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$⑤ \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$⑥ \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$⑦ \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$\textcircled{1} \int a \, dx = ax + c,$$

$$\textcircled{2} \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$\textcircled{4} \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\textcircled{5} \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$\textcircled{6} \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\textcircled{7} \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$① \int a \, dx = ax + c,$$

$$② \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$③ \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$④ \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$⑤ \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$⑥ \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$⑦ \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Primeras integrales inmediatas:

$$\textcircled{1} \int a \, dx = ax + c,$$

$$\textcircled{2} \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \text{ con } a \neq -1.$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + c,$$

$$\textcircled{4} \int e^x \, dx = e^x + c,$$

$$\textcircled{5} \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c, \text{ para } a \neq 0.$$

$$\textcircled{6} \int \sin x \, dx = -\cos x + c,$$

$$\textcircled{7} \int \cos x \, dx = \sin x + c,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\operatorname{sen} x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sen^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\sen x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\sin x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\sin x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\sin x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Integrales menos inmediatas:

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x = \tan x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{cosec}^2 x = -\cotan x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + c ,$$

$$\textcircled{5} \int \tan x = -\log |\cos x| + c ,$$

$$\textcircled{6} \int \cotan x = \log |\sin x| + c ,$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Otras integrales a recordar:

$$\textcircled{1} \int \sec x \tan x = \sec x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \operatorname{cosec} x \cotan x = -\operatorname{cosec} x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \sec x = \log |\sec x + \tan x| + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cosec} x = -\log |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + c ,$$

Ejemplo:

$$\int \sec x = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \log |\sec x + \tan x| + c .$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Otras integrales a recordar:

$$\textcircled{1} \int \sec x \tan x = \sec x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \operatorname{cosec} x \cotan x = -\operatorname{cosec} x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \sec x = \log |\sec x + \tan x| + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cosec} x = -\log |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + c ,$$

Ejemplo:

$$\int \sec x = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \log |\sec x + \tan x| + c .$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Otras integrales a recordar:

$$\textcircled{1} \int \sec x \tan x = \sec x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \operatorname{cosec} x \cotan x = -\operatorname{cosec} x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \sec x = \log |\sec x + \tan x| + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cosec} x = -\log |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + c ,$$

Ejemplo:

$$\int \sec x = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \log |\sec x + \tan x| + c .$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Otras integrales a recordar:

$$\textcircled{1} \int \sec x \tan x = \sec x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \operatorname{cosec} x \cotan x = -\operatorname{cosec} x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \sec x = \log |\sec x + \tan x| + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cosec} x = -\log |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + c ,$$

Ejemplo:

$$\int \sec x = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \log |\sec x + \tan x| + c .$$

Cálculo de primitivas

Integrales inmediatas

Otras integrales a recordar:

$$\textcircled{1} \int \sec x \tan x = \sec x + c ,$$

$$\textcircled{2} \int \operatorname{cosec} x \cotan x = -\operatorname{cosec} x + c ,$$

$$\textcircled{3} \int \sec x = \log |\sec x + \tan x| + c ,$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cosec} x = -\log |\operatorname{cosec} x + \cotan x| + c ,$$

Ejemplo:

$$\int \sec x = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \log |\sec x + \tan x| + c .$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

Primero dividimos y comprobamos si quedan integrales inmediatas:



$$\int \frac{u'}{u} dx = \log |u| + c, \quad \int u' u^a dx = \frac{u^{a+1}}{(a+1)} + c,$$



$$\int \frac{u'}{(u^2 + 1)} dx = \arctan(u) + c.$$

Descomposición en fracciones simples

El integrando se escribe como suma de fracciones a las que aplicamos las fórmulas anteriores (si se puede).

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

Primero dividimos y comprobamos si quedan integrales inmediatas:



$$\int \frac{u'}{u} dx = \log |u| + c, \quad \int u' u^a dx = \frac{u^{a+1}}{(a+1)} + c,$$



$$\int \frac{u'}{(u^2 + 1)} dx = \arctan(u) + c.$$

Descomposición en fracciones simples

El integrando se escribe como suma de fracciones a las que aplicamos las fórmulas anteriores (si se puede).

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

Primero dividimos y comprobamos si quedan integrales inmediatas:



$$\int \frac{u'}{u} dx = \log |u| + c, \quad \int u' u^a dx = \frac{u^{a+1}}{(a+1)} + c,$$



$$\int \frac{u'}{(u^2 + 1)} dx = \arctan(u) + c.$$

Descomposición en fracciones simples

El integrando se escribe como suma de fracciones a las que aplicamos las fórmulas anteriores (si se puede).

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 1:* $\int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx.$

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

Obtenemos: $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int (x-1)^{-2} dx + 3 \int (x-1)^{-3} dx \\ &= 2 \log |x-1| + (x-1)^{-1} - \frac{3}{2} (x-1)^{-2} + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 1:* $\int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx.$

$$\frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

Obtenemos: $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 6}{(x-1)^3} dx &= 2 \int \frac{dx}{x-1} - \int (x-1)^{-2} dx + 3 \int (x-1)^{-3} dx \\ &= 2 \log |x-1| + (x-1)^{-1} - \frac{3}{2} (x-1)^{-2} + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 2:* $\int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} dx.$

$$\frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2},$$

Obtenemos $A = -1$, $B = 3$ y $C = -2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} dx &= -\int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\log|x| + 3 \log|x-1| - 2 \log|x-2| + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

• Ejemplo 2: $\int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} dx.$

$$\frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2},$$

Obtenemos $A = -1$, $B = 3$ y $C = -2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{-x-2}{x(x-1)(x-2)} dx &= -\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\log|x| + 3\log|x-1| - 2\log|x-2| + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 3:* $\int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} dx.$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1},$$

Llegamos a $B = -1$, $C = 1$ y $D = -1$, $A = 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} dx &= -\int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{x} + \log|x-1| - \log|x+1| + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

• *Ejemplo 3:* $\int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} dx.$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1},$$

Llegamos a $B = -1$, $C = 1$ y $D = -1$, $A = 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)(x+1)} dx &= -\int x^{-2} dx + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{x} + \log|x-1| - \log|x+1| + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 4:* $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx.$

$$\frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

Calculamos: $A = 3$, $B = 2$ y $C = -1$,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx &= 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 3 \log |x| + \log(x^2 + 1) - \arctan x + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 4:* $\int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx.$

$$\frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1},$$

Calculamos: $A = 3$, $B = 2$ y $C = -1$,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - x + 3}{x(x^2 + 1)} dx &= 3 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= 3 \log |x| + \log(x^2 + 1) - \arctan x + c. \end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 5:* un polinomio de segundo grado en el denominador sin raíces se trata completando en el numerador su derivada y si queda una constante en el numerador se completan cuadrados en el denominador.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

porque:

$$x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1.$$

- No hemos tratado casos como $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 5:* un polinomio de segundo grado en el denominador sin raíces se trata completando en el numerador su derivada y si queda una constante en el numerador se completan cuadrados en el denominador.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

porque:

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

- No hemos tratado casos como $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Cálculo de primitivas

Integrales racionales y descomposición en fracciones simples

- *Ejemplo 5:* un polinomio de segundo grado en el denominador sin raíces se trata completando en el numerador su derivada y si queda una constante en el numerador se completan cuadrados en el denominador.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \int \frac{2}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1) + c,\end{aligned}$$

porque:

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1.$$

- No hemos tratado casos como $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$.

Cálculo de primitivas

Integración por partes

Teorema

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

Si $u(x)$ es una función derivable llamamos **diferencial** de u a $du = u'(x) dx$. Haciendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$ el teorema es:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Cálculo de primitivas

Integración por partes

Teorema

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

Si $u(x)$ es una función derivable llamamos **diferencial** de u a $du = u'(x) dx$. Haciendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$ el teorema es:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Cálculo de primitivas

Integración por partes

- Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, integramos por partes en:

$$\int p(x) e^{ax+b} dx, \quad \int p(x) (ax+b)^\alpha dx, \\ \int p(x) \operatorname{sen}(ax+b) dx, \quad \int p(x) \cos(ax+b) dx,$$

haciendo $u = p(x)$ tantas veces como su grado.

- En:

$$\int p(x) \log(ax+b) dx,$$

tomamos $dv = p(x) dx$, porque la derivada del logaritmo es muy fácil.

Cálculo de primitivas

Integración por partes

- Si $p(x)$ es un polinomio y $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, integramos por partes en:

$$\int p(x) e^{ax+b} dx, \quad \int p(x) (ax+b)^\alpha dx, \\ \int p(x) \operatorname{sen}(ax+b) dx, \quad \int p(x) \cos(ax+b) dx,$$

haciendo $u = p(x)$ tantas veces como su grado.

- En:

$$\int p(x) \log(ax+b) dx,$$

tomamos $dv = p(x) dx$, porque la derivada del logaritmo es muy fácil.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

Teorema (Método de sustitución)

Si f y g son funciones y g es derivable, entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Hacemos $x = g(t) \implies dx = g'(t) dt$.

Tras resolver la integral **hay que deshacer el cambio**.

Es la versión integral de la regla de la cadena.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

Teorema (Método de sustitución)

Si f y g son funciones y g es derivable, entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Hacemos $x = g(t) \implies dx = g'(t) dt$.

Tras resolver la integral **hay que deshacer el cambio**.

Es la versión integral de la regla de la cadena.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

Teorema (Método de sustitución)

Si f y g son funciones y g es derivable, entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Hacemos $x = g(t) \implies dx = g'(t) dt$.

Tras resolver la integral **hay que deshacer el cambio**.

Es la versión integral de la regla de la cadena.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

Teorema (Método de sustitución)

Si f y g son funciones y g es derivable, entonces

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Hacemos $x = g(t) \implies dx = g'(t) dt$.

Tras resolver la integral **hay que deshacer el cambio**.

Es la versión integral de la regla de la cadena.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① En expresiones con e^x , se puede tomar

$$t = e^x \implies x = \log t, dx = dt/t.$$

- ② Con varias raíces de la misma expresión, por ejemplo,

$$\sqrt{1+x}, \sqrt[3]{1+x}, \sqrt[4]{1+x} \rightsquigarrow 1+x = t^{12}$$

transforma todas las raíces en potencias enteras positivas.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① En expresiones con e^x , se puede tomar

$$t = e^x \implies x = \log t, dx = dt/t.$$

- ② Con varias raíces de la misma expresión, por ejemplo,

$$\sqrt{1+x}, \sqrt[3]{1+x}, \sqrt[4]{1+x} \rightsquigarrow 1+x = t^{12}$$

transforma todas las raíces en potencias enteras positivas.

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ❶ Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ❷ Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

$$x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

$$x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$$

- ❸ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

$$x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan u, \quad dx = \sec u \tan u \, du.$$

$$x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

•
$$x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

•
$$x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

•
$$x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$$

•
$$x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

- $x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$

- $x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

- $x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$

- $x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

- $x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$

- $x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

- $x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$

- $x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

- $x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$

- $x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

- $x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$

- $x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

- $x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$

- $x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

- $x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$

- $x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$

Cálculo de primitivas

Cambio de variable

- ① Para $\sqrt{1-x^2}$ hacemos el cambio $x = \sin t$, pues:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t \, dt.$$

- ② Si aparece $\sqrt{1+x^2}$ podemos tomar

- $x = \tan t, \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\cos t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$

- $x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \cosh t, \quad dx = \cosh t \, dt.$

- ③ En integrales con $\sqrt{x^2-1}$ podemos hacer :

- $x = \sec u, \quad \sqrt{x^2-1} = \tan t, \quad dx = \sec t \tan t \, dt.$

- $x = \cosh t, \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh t, \quad dx = \sinh t \, dt.$

Cálculo de primitivas

Integrales trigonométricas

- Fórmulas **básicas**:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- Fórmulas del **ángulo doble**

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x) \cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

- Fórmulas del **cuadrado**:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Fórmulas del **seno y coseno de la suma**:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).\end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales trigonométricas

- Fórmulas **básicas**:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- Fórmulas del **ángulo doble**

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x) \cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

- Fórmulas del **cuadrado**:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Fórmulas del **seno y coseno de la suma**:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).\end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales trigonométricas

- Fórmulas **básicas**:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- Fórmulas del **ángulo doble**

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x) \cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

- Fórmulas del **cuadrado**:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Fórmulas del **seno y coseno de la suma**:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).\end{aligned}$$

Cálculo de primitivas

Integrales trigonométricas

- Fórmulas **básicas**:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- Fórmulas del **ángulo doble**

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x) \cos(x), \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).\end{aligned}$$

- Fórmulas del **cuadrado**:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

- Fórmulas del **seno y coseno de la suma**:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + y) &= \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \operatorname{sen}(y), \\ \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y).\end{aligned}$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Definición

Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Sea $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Las **suma superior** y **suma inferior** de f asociadas a P son:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Definición

Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Sea $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,
 $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Las **suma superior** y **suma inferior** de f asociadas a P son:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Definición

Una **partición** del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Sea $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

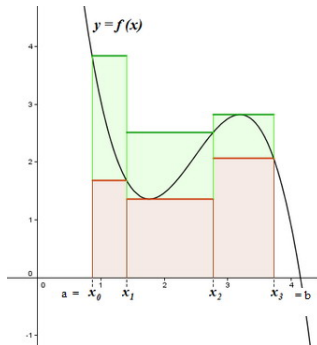
Las **suma superior** y **suma inferior** de f asociadas a P son:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L_f(P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

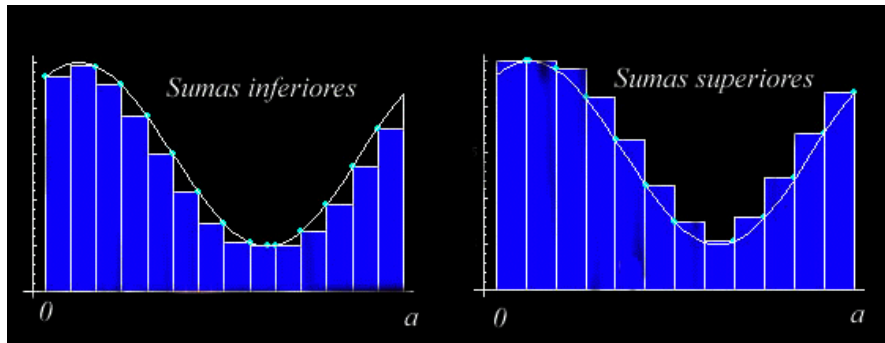
Ejemplo de suma superior y suma inferior:



Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Ejemplo de suma superior y suma inferior:



Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Definición

Una función f **acotada** en $[a, b]$ es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número I tal que:

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I.$$

lo llamamos **integral definida** o **integral de Riemann** de f en $[a, b]$ y escribimos:

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Definición

Una función f **acotada** en $[a, b]$ es **integrable** en $[a, b]$ si existe un número I tal que:

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I.$$

lo llamamos **integral definida** o **integral de Riemann** de f en $[a, b]$ y escribimos:

$$I = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Integral de Riemann

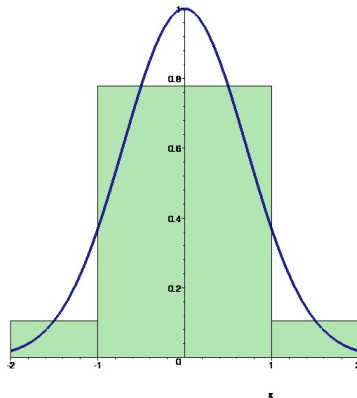
También se puede considerar cualquier punto en cada subintervalo
 $z_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Teorema fundamental del cálculo

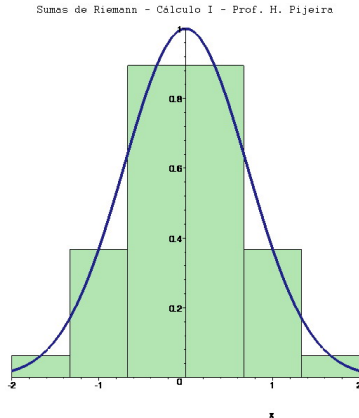
Integrales definidas

Sumas de Riemann - Cálculo I - Prof. H. Pijeira



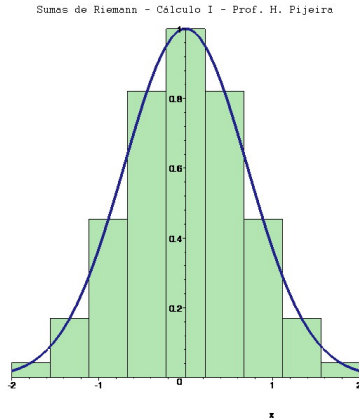
Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas



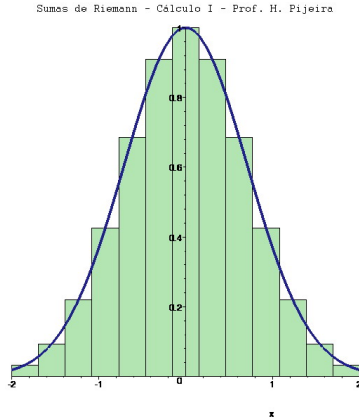
Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas



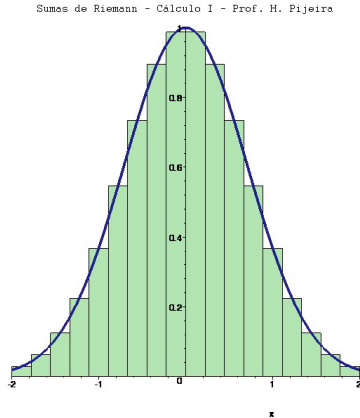
Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas



Teorema fundamental del cálculo

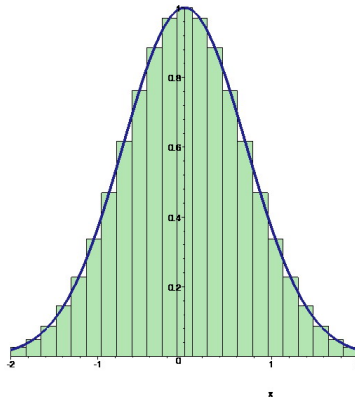
Integrales definidas



Teorema fundamental del cálculo

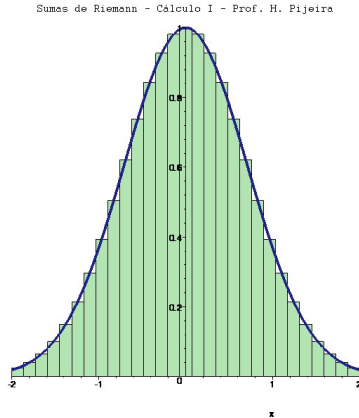
Integrales definidas

Sumas de Riemann - Cálculo I - Prof. H. Pijeira



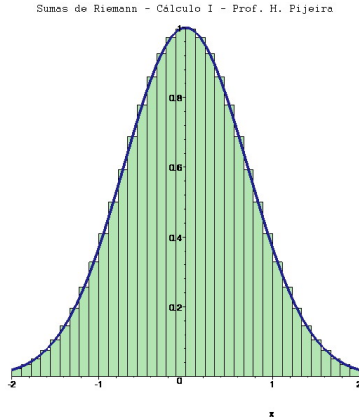
Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas



Teorema fundamental del cálculo

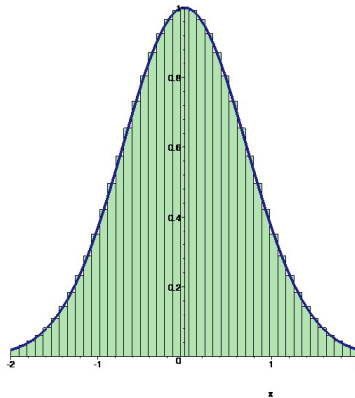
Integrales definidas



Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

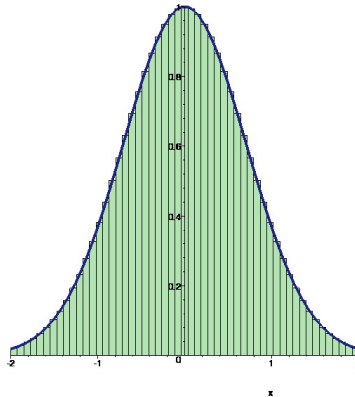
Sumas de Riemann - Cálculo I - Prof. H. Pijeira



Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Sumas de Riemann - Cálculo I - Prof. H. Pijeira



Teorema fundamental del cálculo

Integral de Riemann

También se puede considerar cualquier punto en cada subintervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Tomando subintervalos iguales, la integral se puede usar entonces para calcular límites

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i/n)$$

Ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (i/n)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Teorema fundamental del cálculo

Integral de Riemann

También se puede considerar cualquier punto en cada subintervalo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(z_i)(x_i - x_{i-1})$$

Tomando subintervalos iguales, la integral se puede usar entonces para calcular límites

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i/n)$$

Ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + (i/n)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Teorema

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Teorema

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Teorema

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Teorema

Si f y g son funciones integrables en $[a, b]$:

- $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Si $a < b$, se define $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Teorema

Si $a < b < c$ y f está definida en $[a, c]$, entonces es integrable en $[a, c]$ **si y sólo si** es integrable en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Además:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

En general, **aunque no estén ordenados** α, β y γ :

$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f.$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Si $a < b$, se define $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Teorema

Si $a < b < c$ y f está definida en $[a, c]$, entonces es integrable en $[a, c]$ **si y sólo si** es integrable en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Además:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

En general, **aunque no estén ordenados** α, β y γ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\gamma} f.$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

Si $a < b$, se define $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Teorema

Si $a < b < c$ y f está definida en $[a, c]$, entonces es integrable en $[a, c]$ **si y sólo si** es integrable en $[a, b]$ y en $[b, c]$. Además:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

En general, **aunque no estén ordenados** α, β y γ :

$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f.$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq 0.$$

- Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq 0.$$

- Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema fundamental del cálculo

Integrales definidas

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq 0.$$

- Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

- Si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Teorema fundamental del cálculo

Principales resultados

Teorema

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es continua en $[a, b]$.

No se necesita la continuidad de f .

Teorema fundamental del cálculo

Principales resultados

Teorema fundamental del cálculo

Si f es **continua** en $[a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es **derivable** en $[a, b]$ y:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Teorema fundamental del cálculo

Principales resultados

Regla de Barrow

Sean f y g continuas en $[a, b]$ y g derivable en (a, b) , tales que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ (g es una primitiva de f), entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) = \left[g(x) \right]_a^b.$$

Teorema fundamental del cálculo

Principales resultados

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$ y g y h son derivables en $[\alpha, \beta]$ y con valores en $[a, b]$, entonces la función

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

es derivable en $[\alpha, \beta]$ y su derivada es

$$A'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ejemplo: $F(x) = \int_0^{x^3} \cos t \, dt \implies F'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$

Teorema fundamental del cálculo

Principales resultados

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$ y g y h son derivables en $[\alpha, \beta]$ y con valores en $[a, b]$, entonces la función

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

es derivable en $[\alpha, \beta]$ y su derivada es

$$A'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ejemplo: $F(x) = \int_0^{x^3} \cos t \, dt \implies F'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$

Teorema fundamental del cálculo

Integración por partes y cambio de variable

Teorema

Si f' y g' son funciones continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx .$$

Teorema

Sea g una función tal que g' es continua en $[a, b]$ y sea f integrable en $[g(a), g(b)]$. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt .$$

Teorema fundamental del cálculo

Integración por partes y cambio de variable

Teorema

Si f' y g' son funciones continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Teorema

Sea g una función tal que g' es continua en $[a, b]$ y sea f integrable en $[g(a), g(b)]$. Entonces

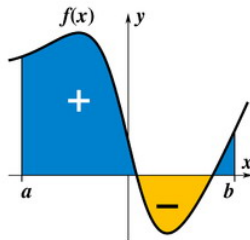
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) g'(t) dt.$$

Aplicaciones

Áreas planas en cartesianas

- El área comprendida entre la gráfica de una función continua f no necesariamente positiva, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$



- El área comprendida entre las gráficas de dos funciones

Aplicaciones

Áreas planas en cartesianas

- El área comprendida entre la gráfica de una función continua f no necesariamente positiva, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)| dx .$$

- El área comprendida entre las gráficas de dos funciones continuas f y g y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx .$$

Aplicaciones

Áreas en polares

- Dada una curva en polares, $r(\theta)$, continua y positiva en $[\alpha, \beta]$, el área encerrada entre la curva y las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta,$$

si $\beta - \alpha \leq 2\pi$.

- Ejemplo: Un sector circular de radio R y ángulo de abertura α tiene área:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} R^2 d\theta = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

Aplicaciones

Áreas en polares

- Dada una curva en polares, $r(\theta)$, continua y positiva en $[\alpha, \beta]$, el área encerrada entre la curva y las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es:

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta,$$

si $\beta - \alpha \leq 2\pi$.

- Ejemplo: Un sector circular de radio R y ángulo de abertura α tiene área:

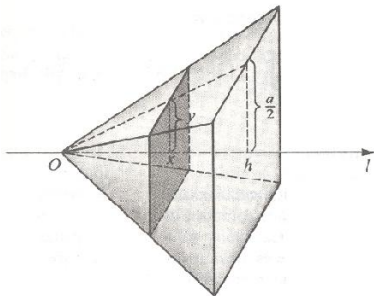
$$\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} R^2 d\theta = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

Aplicaciones

Volúmenes

- Sección transversal conocida, $A(x)$:

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

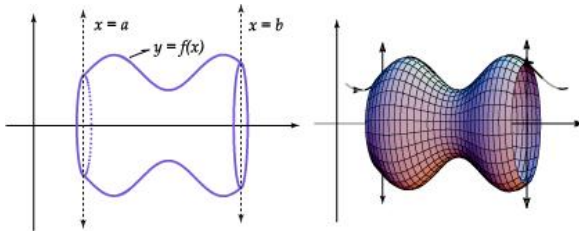


Aplicaciones

Volúmenes

- **Método del disco:** volúmenes generados al girar f alrededor del eje X :

$$A(x) = \pi \left(f(x) \right)^2 \implies V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

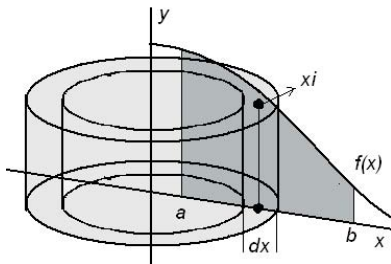


Aplicaciones

Volúmenes

- **Método de capas:** volúmenes generados al girar f alrededor del eje Y :

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$



Aplicaciones

Longitudes

- La **longitud de una curva en paramétricas**, dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con $t \in [a, b]$, con derivada continua a trozos es:

$$\int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt.$$

Aplicaciones

Longitudes

- La **longitud de la gráfica de una función** con derivada continua a trozos en $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

- La **longitud de una curva en polares** con derivada continua a trozos en $[\alpha, \beta]$ es:

$$\int_a^b \sqrt{\left(r(\theta)\right)^2 + \left(r'(\theta)\right)^2} d\theta.$$

Aplicaciones

Longitudes

- La **longitud de la gráfica de una función** con derivada continua a trozos en $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

- La **longitud de una curva en polares** con derivada continua a trozos en $[\alpha, \beta]$ es:

$$\int_a^b \sqrt{\left(r(\theta)\right)^2 + \left(r'(\theta)\right)^2} d\theta.$$