uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

TEORÍA DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 1: Funciones de una variable real

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

CAPÍTULO 1. Funciones de variable real

1.1 La recta real

Clases de números

- $\mathbb{N} = \{(0), 1, 2, 3, \cdots\}$.

Propiedades: $(+)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro (0),
$(\cdot)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro (1),
$(+, \cdot)$ distributiva.
Problema: $x + 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{N}$.

- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.

Propiedades: $(+)$ elemento inverso.
Problema: $2x + 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,:\, p,\, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\}$.

Propiedades: $(\cdot)$ elemento inverso salvo para el 0.
Problema: $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Q}$.

- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$ números con infinitas cifras decimales no periódicas $\}$ (en principio).

Propiedades: Completitud.
Problema: $x^2 + 2 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ números complejos!!

Métodos de demostración matemática

- Demostración directa. $P \Rightarrow Q$.
- Demostración por reducción al absurdo. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a (no Q) $\Rightarrow$ (no P).
- Demostración por inducción.

Principio de inducción: La propiedad P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se verifica *i*) P_1 es cierta; *ii*) si P_k es cierta también lo es P_{k+1}.

Desigualdades. Valor absoluto

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
- $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
- $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$

  $|a| \geq 0 \,\forall\, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia** $dist(a, b) = |a - b|$.

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$. **Abierto**.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$. **Cerrado**.
- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, x \leq M \,\forall\, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

> *Principio de completitud:* Todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

Equivalencia de notación

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, dist(x,-1) \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x+1| \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -5 \leq x \leq 3\} = [-5,3]$$

El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \,:\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$

- **Distancia** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, se define $dist(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

- Curvas elementales

  Recta. $y = ax + b$.

  Parábola. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

  Circunferencia. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.

  Elipse. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.

  Hipérbola. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.

  Cónicas. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

1.2 Funciones elementales

<u>*Primeras definiciones y propiedades*</u>

> Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Se escribe $f : A \to \mathbb{R}$. $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x.

El dominio de una función es el conjunto de números para los que está definida, y se denota por $Dom(f)$. La imagen es el conjunto $Im(f) = \{f(x) : x \in Dom(f)\}$.

- **Funciones elementales**: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.

- **Dominio**.

  Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
  Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
  $\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
  $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
  $\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
  e^x: $D = \mathbb{R}$.
  $\log x$: $D = \{x > 0\}$.

- **Inyectividad**.

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).

- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.

- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva ($\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A : f(x) = y$).

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

- **Simetrías**.

- f es simétrica **par** si $f(-x) = f(x)$. Ejemplos: x^2, $\cos x$.

- f es simétrica **impar** si $f(-x) = -f(x)$. Ejemplos: x^3, $\operatorname{sen} x$.

- **Composición**.

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

$$h = g \circ f : A \to C$$

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

En general $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) \,:\, f(x) \in Dom(g)\}$.

- **Función inversa**.

- $f\,:A \to B$ y $g\,:B \to A$ son funciones inversas si la composición es la función identidad,

$$\begin{array}{ll} g \circ f = Id\,:A \to A & f \circ g = Id\,:B \to B \\ g \circ f(x) = x \;\forall\, x \in A & f \circ g(x) = x \;\forall\, x \in B \end{array}$$

Se escribe $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$. Existe la función inversa de $f\,:A \to B$ si f es biyectiva.
Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} f\,:\,[0,\infty) \to [0,\infty), & f(x) = x^2, & f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \\ f\,:\,\mathbb{R} \to (0,\infty), & f(x) = e^x, & f^{-1}(x) = \log x, \\ f\,:\,[-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1], & f(x) = \operatorname{sen} x, & f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x, \\ f\,:\,[0,\pi] \to [-1,1], & f(x) = \cos x, & f^{-1}(x) = \arccos x, \\ f\,:\,(-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}, & f(x) = \operatorname{tg} x, & f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x. \end{array}$$

Operaciones con gráficas de funciones.

- **Traslaciones**: horizontal $y = f(x + c)$, vertical $y = f(x) + c$.

- **Dilataciones**: horizontal $y = f(cx)$, vertical $y = cf(x)$.

- **Simetrías**: horizontal $y = f(|x|)$, vertical $y = |f(x)|$.

- **Inversiones**: horizontal $y = f(1/x)$, vertical $y = 1/f(x)$.

Coordenadas polares.

$$\begin{array}{lll} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\rightsquigarrow & r = \sqrt{x^2+y^2}, & \theta = \operatorname{arc\,tg} y/x, \\ (r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \;\rightsquigarrow & x = r\cos\theta & y = r \operatorname{sen}\theta. \end{array}$$

1.3 Límites de funciones

Primeras definiciones y propiedades

> *Límite:* Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (y se lee: el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.

- Ejemplo: $\lim_{x\to 4}(3x-7) = 5$ pues $|3x-7-5| = 3|x-4| < 3\delta$; basta elegir $\delta = \varepsilon/3$.

- Si existe el límite es único. Es decir, si l y m verifican la definición, entonces $l = m$.

- **Propiedades:** Si existen $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,, \quad \text{si } c \in \mathbb{R}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}\,, \quad \text{si } m \neq 0\,.$$

- **Más ejemplos:**

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)\,, \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}\,, \quad \text{si } x_0 > 0\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0\,, \quad \text{si } a > 0,\ x_0 > 0\,.$$

- **Límite de la composición**

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to l} h(x) = m$ entonces $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = m$.

- Ejemplos:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}\,, \quad \text{si } l > 0\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = l^m, \quad \text{si el resultado es distinto de } 0^0.$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a(l), \quad \text{si } a > 0 \text{ y } l > 0\,.$$

- **Límites laterales.**

- Decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee límite cuando x tiende a x_0 por la derecha) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- Análogamente por la izquierda, $x \to x_0^-$.

- Se tiene que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

- **Límites infinitos y en el infinito.**

- Decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.
- Análogamente para límite $-\infty$.

- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real N tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x > N$.
- Análogamente para $x \to -\infty$.

- Decimos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número real M existe un número real N tal que $f(x) > M$ cuando $x > N$.

- Las propiedades sobre límites (de la suma, producto, etc...) dadas al principio también son válidas cuando alguno o ambos de los límites l y m son infinitos, siempre que las expresiones que aparecen con los límites estén definidas o tengan sentido. Dichas expresiones y sus correspondientes valores son los siguientes. Se entienden en el siguiente sentido.
"$a^\infty = \infty$ para $a > 1$ quiere decir: $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$".
Operaciones:

$$\begin{aligned}
a + \infty &= \infty\,, & a - \infty &= -\infty\,,\\
\infty + \infty &= \infty\,, & -\infty - \infty &= -\infty\,,\\
\infty \cdot \infty &= \infty\,, & -\infty \cdot \infty &= -\infty\,,\\
\frac{a}{\infty} &= 0\,, & a \cdot \infty &= \infty\,,\ \text{ si } a > 0\,,\\
\frac{a}{0} = \infty\,,&\ \text{ si } a > 0\,, & \frac{a}{0} &= -\infty\,,\ \text{ si } a < 0\,,\\
\infty^a = \infty\,,&\ \text{ si } a > 0\,, & \infty^a &= 0\,,\ \text{ si } a < 0\,,\\
\infty^\infty &= \infty\,, & \infty^{-\infty} &= 0\,,\\
a^\infty = \infty\,,&\ \text{ si } a > 1\,, & a^\infty &= 0\,,\ \text{ si } 0 \le a < 1\,.
\end{aligned}$$

<u>*Indeterminaciones*</u>

- Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos *indeterminaciones*, y las más importantes son las siguientes:

$$\infty - \infty\,,\ \ \frac{\infty}{\infty}\,,\ \ \frac{0}{0}\,,\ \ 0 \cdot \infty\,,\ \ \infty^0\,,\ \ 0^0\,,\ \ 1^\infty\,,\ \ 1^{-\infty}\,.$$

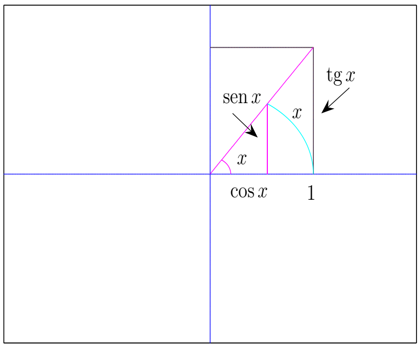
En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes, mediante alguna operación previa para identificar estos factores. Son útiles los dos resultados siguientes:

- Si $f(x) = g(x)$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

- Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 3}{x - 2} = 6.$

Lema del sandwich: Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $0 < |x - x_0| < \delta$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

- Ejemplo: $x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \Rightarrow \cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$



Por simetría, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

- **Límites relacionados con la exponencial.**

Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ es ∞ entonces

$$\lim_{x \to \alpha} \big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to \alpha} (f(x)-1)g(x)},$$

si existe el límite, donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

- Ejemplo: Ejemplo: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-7}\right)^{x+5} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} (x+5)\, \frac{10}{2x-7}} = e^5.$

1.4 Continuidad

Primeras definiciones y propiedades

Continuidad: Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él. $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$.

- Definición alternativa
$$\lim_{h\to 0}\Big(f(x_0 + h) - f(x_0)\Big) = 0.$$

- f es continua en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos; se escribe $f \in \mathcal{C}(a, b)$.

- f es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en (a, b), existen los límites laterales interiores en a y en b, y coinciden con los valores de f en esos puntos (continuidad por la derecha en a y continuidad por la izquierda en b):
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

- **Ejemplo de funciones continuas:**

- De acuerdo a los límites que se obtienen por sustitución directa, son continuas las funciones: polinomios, seno y coseno, raíz cuadrada (en $\{x \geq 0\}$), exponencial, logaritmo (en $\{x > 0\}$).

- **Propiedades**

- La suma de funciones continuas es continua; igual que el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).

- La composición de funciones continuas es continua: si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

- Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$ y g es continua en l entonces $\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(l)$. Aquí α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ o $-\infty$. Es decir,
$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\alpha} f(x)).$$

- *Ejemplo:*
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e.$$

- Si existe el límite de f en x_0 pero no coincide con el valor $f(x_0)$, o f no está definida allí, se dice que f tiene una discontinuidad evitable en ese punto. Se evita la discontinuidad definiendo correctamente el valor $f(x_0)$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{es discontinua en } x_0 = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{es continua en } \mathbb{R}.$$

Resultados sobre continuidad.

Teorema de Bolzano: Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios: Si f es una función continua en $[a, b]$ con, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces para todo $z \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$. Se dice también: f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema de acotación: Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$ y además alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$. Es decir, existen puntos x_m, $x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Contraejemplos:

$$f(x) = 1/x \quad \text{en } [-1, 1]; \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } (0, 1];$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{en } [0, 1); \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } [1, \infty).$$