uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

TEORÍA DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 2: Cálculo diferencial de una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

TEMA 2. Cálculo diferencial de una variable

2.1 Derivabilidad

Primeras definiciones y propiedades

- *Velocidad media* en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, si $u(t)$ es la posición:

$$v_m = \frac{u(t_0 + h) - u(t)}{h}.$$

- *Pendiente* del segmento que une dos puntos de la gráfica $y = f(x)$ de abscisas x_0 y $x_0 + h$:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La recta secante correspondiente es

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Derivada: Dada una función f, la derivada de f en un punto x_0 se define como el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

- Se dice que f es derivable en x_0 si el límite anterior existe y es finito. Se dice que f es derivable en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si es derivable en todos sus puntos. La función f' existe para los puntos del dominio de f donde sea derivable.

- Notación alternativa $\quad f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0).$

- Definición alternativa $\quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

Teorema: Si f es derivable en x_0 entonces es continua en x_0.

- Versión alternativa: Si f no es continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

- **Recta tangente**

La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- **Primeras derivadas**

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) & \rightsquigarrow & f'(x) = nx^{n-1} \\
f(x) = \operatorname{sen} x & \rightsquigarrow & f'(x) = \cos x \\
f(x) = \cos x & \rightsquigarrow & f'(x) = -\operatorname{sen} x \\
f(x) = e^x & \rightsquigarrow & f'(x) = e^x \\
f(x) = \log x & \rightsquigarrow & f'(x) = 1/x
\end{array}$$

- **Propiedades**

- La derivada es una operación lineal: $(cf)' = cf'$, $(f+g)' = f' + g'$.

- Derivada de un producto: $(fg)' = f'g + fg'$.

- Derivada de un cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- *Idea:* Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

- **Más derivadas**

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) & \rightsquigarrow & f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \\
f(x) = a^x \quad (a > 0) & \rightsquigarrow & f'(x) = a^x \log a \\
f(x) = \log_a x \quad (a > 0) & \rightsquigarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x \log a} \\
f(x) = \operatorname{arc\,tg} x & \rightsquigarrow & f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\
f(x) = \sec x & \rightsquigarrow & f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x \\
f(x) = \log x & \rightsquigarrow & f'(x) = 1/x
\end{array}$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = a^x = e^{x \log a}$,

$$f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Resultados sobre derivabilidad.

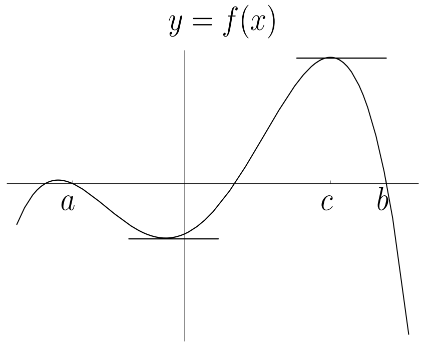
- Si x_0 es un máximo o un mínimo (extremo) local de f y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

- *Ejemplo de mínimo*: Si $f(x_0) \leq f(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \qquad \text{si} \quad h > 0$$
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \text{si} \quad h < 0$$

Por tanto el límite, como existe, debe ser cero.

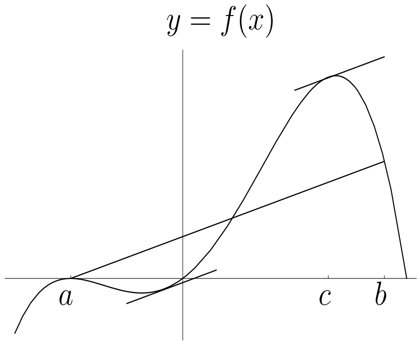
> *Teorema de Rolle:* Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.



Como f es continua en $[a,b]$, alcanza el máximo y el mínimo. Si los dos se alcanzan en a y en b, entonces f es constante. Si no, el máximo o el mínimo está en el interior y es un extremo local. La derivada allí debe ser cero.

Teorema del valor medio: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



La función $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle.

- **Aplicaciones**

- Si f es continua en (a,b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a,b), es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, a < x < y < b.$$

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución en ese intervalo.

- *Regla de L'Hôpital*

Teorema de L'Hôpital-Bernoulli: Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- La regla de L'Hôpital se aplica también si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, y también si $\alpha = \infty$.

- *Ejemplo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

2.2 Extremos de funciones

- Resultados necesarios:

> Una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza el máximo y el mínimo.

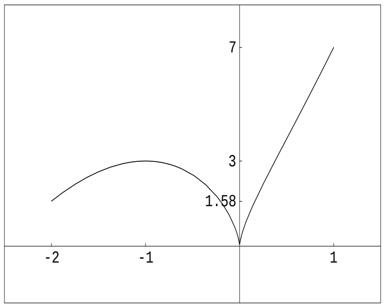
> En un punto de máximo o mínimo local de una función, si existe la derivada debe ser cero.

- Método de obtención de extremos: función continua en un intervalo cerrado y acotado

- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

- *Ejemplo:*

Sea $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$. Se tiene $f'(x) = \dfrac{10}{3}(x+1)x^{-1/3}$. Así, no existe $f'(0)$, mientras que $f'(-1) = 0$. Comparando los valores $f(0) = 0$, $f(-1) = 3$, $f(-2) = 2^{2/3}$, $f(1) = 7$, se tiene máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 0$.



Si el conjunto no es cerrado, o no es acotado, o la funci'on a considerar no es continua en algún punto aislado, la existencia de máximo o mínimo no está garantizada. Es necesario estudiar los límites en los puntos destacados.

2.3 Estudio local. Propiedades de las gráficas de funciones

Crecimiento

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b).

- Análogamente para función decreciente.

- Si f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces f tiene un máximo local en x_0.

- Análogamente para un mínimo local.

- Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, así como sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

Convexidad

- Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera en el conjunto el segmento que los une está completamente contenido en él.

> - Se dice que una función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\, y \geq f(x)\}$ es convexo.
> - Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.

- Definiciones alternativas de función convexa.

  - $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall\, a < x < b.$
  - $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \quad \forall\, a < x,\, y < b, \quad 0 < \lambda < 1.$
  - $f'(x) \leq f'(y) \qquad \forall\, a < x < y < b.$
  - $f''(x) \geq 0 \qquad \forall\, a < x < b.$

Se dice que x_0 es un punto de inflexión de una función f si ésta cambia de convexidad a ambos lados del punto.

> Si x_0 es un punto de inflexión de f y existe la segunda derivada allí, entonces $f''(x_0) = 0$.

- Para determinar los intervalos de convexidad de una función, así como sus puntos de inflexión, hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

Asíntotas

- f tiene una asíntota vertical en $x = x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una asíntota horizontal $y = a$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una asíntota inclinada $y = mx + b$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - mx - b \Big) = 0$.

En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - mx \Big)$.

2.4 Polinomio de Taylor

Construcción

Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado, por un polinomio. La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto.

Empecemos con $x_0 = 0$. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

el cálculo de sus derivadas en $x = 0$ es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(0) = k!\, a_k \,.$$

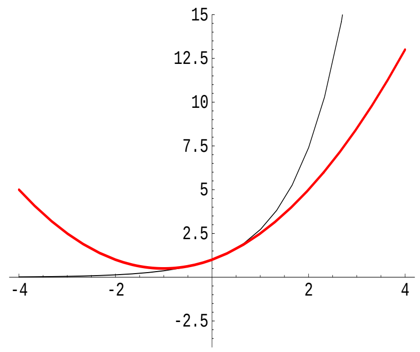
Para que coincidan estos valores con $\dfrac{d^k f}{dx^k}(0)$, basta tomar $a_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k f}{dx^k}(0) = \dfrac{f^{k)}(0)}{k!}$.

Así el polinomio de Taylor de grado n de f alrededor del punto $x = 0$, es

$$P_{n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$$

- *Ejemplo*
Sea $f(x) = e^x$. Como $f^{k)}(0) = 1$ para toDo $k \geq 0$, el polinomio de Taylor es

$$P_{n,0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



$$f(x) = e^x, \quad P_{2,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \,.$$

Tomemos ahora x_0 cualquiera. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \end{aligned}$$

el cálculo de sus derivadas en x_0 es fácil, $P_n^{k)}(x_0) = k!\, a_k$. Para que coincidan estos valores con $f^{k)}(x_0)$ basta tomar $a_k = \dfrac{f^{k)}(x_0)}{k!}$.

> *Definición:* El polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del punto $x = x_0$ es
> $$P_{n,x_0}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Cuando $x_0 = 0$ se suele denominar también polinomio de McLaurin.

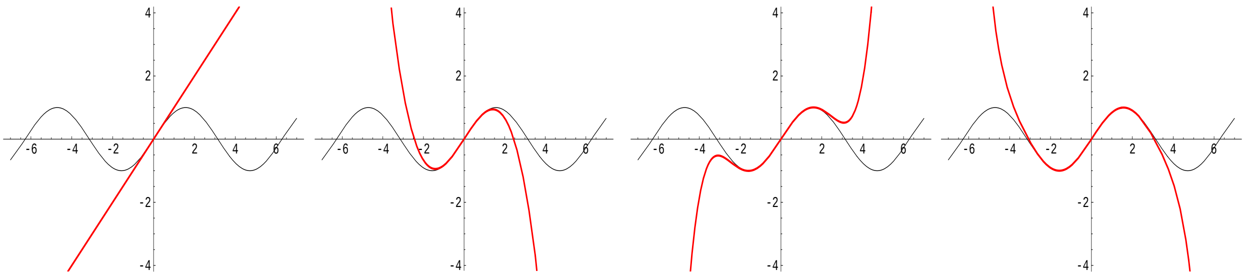
En los siguientes desarrollos tomamos $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{sen} x & \rightsquigarrow & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x & \rightsquigarrow & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\dfrac{1}{1-x} & \rightsquigarrow & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\
\log(1+x) & \rightsquigarrow & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}
\end{array}$$

También, para $x_0 = 1$:

$$\log x \quad \rightsquigarrow \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

- *Ejemplo:* $f(x) = \operatorname{sen} x$ comparado con sus polinomios de Taylor en el origen de grados 1, 3, 5 y 7.



> *Teorema de Taylor:*
> $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}f(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Es decir, el polinomio aproxima a la función cerca del punto considerado y esta aproximación es mejor cuanto mayor es el grado.

Este resultado también se puede escribir, con la notación de Landau

$$f(x) = P_{n,x_0}f(x) + o(|x - x_0|^n) \qquad \text{para } x \to x_0.$$

Definición: Se dice que $f(x) = o(g(x))$, y se lee "o pequeña de", para x cerca de x_0 si $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- *Ejemplos:*

$$\begin{aligned} &\cos x - 1 = o(\operatorname{sen} x) && \text{para } x \to 0 \\ &e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) && \text{para } x \to 0 \\ &\log x = o(x) && \text{para } x \to \infty. \end{aligned}$$

<u>Cálculo de límites</u>

Para calcular límites usamos el Teorema de Taylor con el grado del polinomio conveniente.

- *Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x + x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 - (1 + x + x^2/2) + x + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

<u>Resto de Taylor</u>

Según el Teorema de Taylor, el resto

$$R_{n,x_0}f(x) = f(x) - P_{n,x_0}f(x),$$

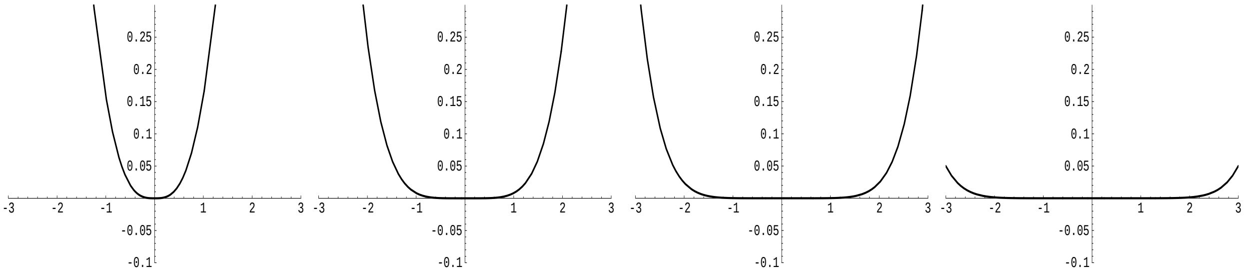
verifica que tiende a cero para $x \to x_0$, y lo hace más deprisa cuanto mayor es n.

En el ejemplo anterior de la función seno, podemos dibujar el valor absoluto del resto (el error) para los cuatro polinomios calculados:

Para estimarlo cuantitativamente utilizamos la fórmula de Lagrange

$$R_{n,x_0}f(x) = \frac{f^{n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algún $c \in (x, x_0)$ o $c \in (x_0, x)$.



- *Ejemplo:* si $f(x) = \operatorname{sen} x$, para estimar $\operatorname{sen} 1$ mediante el polinomio de grado 5, utilizamos

$$|R_{5,0}f(1)| \leq \frac{1}{6!}$$

y obtenemos

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| \leq \frac{1}{720}$$

El valor obtenido es $\operatorname{sen} 1 \approx 0{,}8416$, con un error de $0{,}0014$. El valor exacto con 6 cifras decimales es $0{,}841471$.

<u>Caracterización de extremos y puntos de inflexión</u>

Utilizando el Teorema de Taylor, podemos caracterizar los puntos críticos según la primera derivada no nula.

> *Teorema:* Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{k-1)}(a) = 0$, $f^{k)}(a) \neq 0$, $k \geq 1$. Entonces
>
> - Si k es par y $f^{k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
> - Si k es par y $f^{k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
> - Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

La idea es que cerca del punto $x = a$ se tiene

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Si k es par, $(x-a)^k$ es positivo y $f(x)$ será mayor o menor que $f(a)$ según el signo de $f^{k)}(a)$. Si k es impar entonces el último término siempre cambia de signo a ambos lados de $x = a$.