uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

TEORÍA DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 3: Sucesiones y series

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

BY NC SA

TEMA 3. Sucesiones y series
3.1 Sucesiones de números

Preliminares

- Una sucesión es la imagen de una aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \to & a_n = f(n) \end{array}$$

- Los términos de la sucesión se escriben a_1, a_2, $a_3, \cdots$ (en ocasiones se consideran también sucesiones comenzando por a_0 o a_k). El término general es $a_n = f(n)$. La sucesión se suele escribir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
- También se pueden considerar sucesiones definidas en forma recurrente

$$a_{n+1} = g(a_n), \quad n \geq 1, \quad a_1 \text{ dado.}$$

- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para monótona decreciente.
- Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente si $a_n \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente para acotada inferiormente.

Límites

Definición: Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;:\; |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_0.$$

- *Ejemplo:* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

- Se dice que una sucesión no es convergente cuando el límite no existe (la sucesión es oscilante sin acercarse a ningún valor) o el límite existe pero es infinito (o menos infinito). La definición de límite infinito es la análoga sustituyendo la expresión $|a_n - \ell| < \varepsilon$ por $a_n > M$.

- *Ejemplo:*

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_n = 2n + 3\,.$$

Propiedades de los límites

Cuando existan los límites involucrados, se tienen las siguientes propiedades
- Linealidad: el límite de la suma es la suma de los límites; las constantes multiplicativas conmutan con el límite.
- El límite del producto es el producto de los límites. El límite del cociente es el cociente de los límites si el denominador no es cero.
- El límite conmuta con las funciones continuas. Es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y h es una función continua en ℓ, entonces

$$\lim_{n\to\infty} h(a_n) = h(\lim_{n\to\infty} a_n) = h(\ell).$$

Para calcular límites de sucesiones utilizaremos alguna de las siguientes técnicas:

- Concepto de límites de funciones y cálculo diferencial.
- Lema del sandwich.
- Criterio de Stolz.
- Fórmula de Stirling.
- Sucesiones monótonas y acotadas.
- Teorema del punto fijo.

• Si $a_n = f(n)$, donde f es una función definida en todos los reales (o al menos en los positivos), entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

si este último límite existe. Para calcularlo se pueden utilizar las técnicas del cálculo diferencial, como la regla de L'Hôpital o el Teorema de Taylor. Es especialmente útil en la forma $a_n = g(1/n)$, en cuyo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to 0} g(x).$$

- *Ejemplo:* $\lim_{n\to\infty} \big(\cos(3/n)\big)^{n^2} = \lim_{x\to 0} \big(\cos(3x)\big)^{1/x^2} = exp[\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{x^2}] = e^{-9/2}$.

• *Lema del sandwich.* Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ y $a_n \le b_n \le c_n$ para todo $n \ge k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.

- *Ejemplo:* $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$ pues

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\operatorname{sen} n}{n} \le \frac{1}{n}\,.$$

• *Criterio de Stolz.* Si se verifica alguna de las dos propiedades
- $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ creciente, o
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, decrecientes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \qquad \left(\text{o } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \right)$$

siempre que este último límite exista.
Es útil cuando aparezcan sumas cuyo número de sumandos depende de n.

- *Ejemplo:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+4+\cdots+2^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-2^n} = 2.$$

• *Fórmula de Stirling.* El siguiente límite es útil para calcular límites que involucren factoriales:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} = 1\,.$$

- *Ejemplo:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{en}{n(2\pi n)^{1/2n}} = e.$$

• *Sucesiones monótonas y acotadas.*

Teorema: Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Análogamente toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.

- *Ejemplo:* $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ es monótona creciente, pues $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. Además $a_n \leq 1$ para todo n. Por tanto es una sucesión convergente. El límite es fácil de calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x}{1+2x} = 1$.

• *Sucesiones recurrentes.*

- Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, entonces la sucesión es monótona si $g' \geq 0$ y oscilante si $g' \leq 0$.

$$a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1}) = g'(c)(a_n - a_{n-1}), \qquad \text{para algún } \ c.$$

- Si la sucesión es convergente, el límite $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ debe verificar $\ell = g(\ell)$.

- *Ejemplo:* $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ con $a_1 = 1$ es monótona creciente, pues $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ y $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$. Además es acotada (por inducción) $a_n \leq 2$. Por tanto es convergente y el límite debe verificar $\ell = \sqrt{2\ell}$, es decir $\ell = 0$ o $\ell = 2$. Pero $\ell > a_1 = 1$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

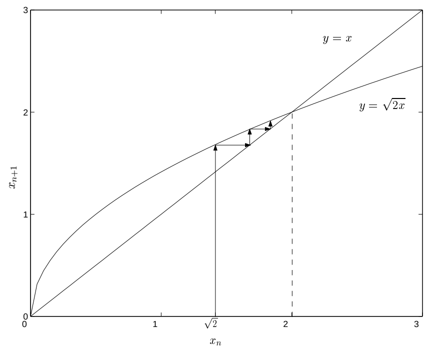
Teorema del punto fijo: Si $a_{n+1} = g(a_n)$, con g una función definida en $\mathbb{R}$ derivable, con $\lvert g'(x)\rvert \leq \lambda < 1$ en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y se verifica $a_n \in I$ para todo $n \geq k$ para algún k, entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y su límite ℓ es el único punto fijo $\ell = g(\ell)$ en I.

- *Ejemplo:* $a_{n+1} = 1 - \dfrac{a_n}{2}$, con $a_1 = 10$, es una sucesión convergente, pues $\lvert g'(x)\rvert = \dfrac{1}{2}$ (oscilante pues $g' < 0$) con límite la solución de $\ell = 1 - \dfrac{\ell}{2}$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$.

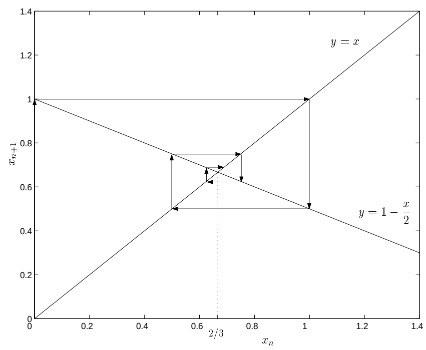
• *Diagrama de la telaraña.*

En las siguientes figuras representamos dos sucesiones definidas en forma recurrente convergentes, una monótona y otra oscilante.

$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad x_1 = \sqrt{2}\,. \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 2.$



$x_{n+1} = 1 - \dfrac{x_n}{2}, \quad x_1 = 0\,. \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 2/3.$



3.2 Series de números

Preliminares

- Una serie (infinita) es la suma de todos los términos de una sucesión.

> *Definición:* Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si el límite de las sumas parciales existe
> $$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = L.$$
> Se dice entonces que la suma de la serie es L.

- *Ejemplo:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty} \frac{r^{N+1}-r}{r-1} = \frac{r}{1-r}$$

siempre que $|r| < 1$. Si $r \geq 1$ el límite es infinito; si $r \leq -1$ el límite ni siquiera existe.

- Una condición necesaria para la convergencia de una serie es que el término general tienda a cero. Pero no es una condición suficiente. El ejemplo estándar es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.

Series de términos positivos

En general, dada una serie concreta convergente, no se podrá determinar el valor exacto de la suma, pero es imprescindible poder conocer su convergencia para aplicar algún método numérico de aproximación.
Veremos pues criterios que determinen cuándo una serie es convergente o no. Comenzamos estudiando series de términos positivos

• *Serie geométrica.* La serie $\sum^{\infty} r^n$ se denomina serie geométrica de razón r. Se verifica

$$\begin{cases} r < 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} r^n \text{ converge,} \\ r \geq 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} r^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

• *Serie p-armónica.* La serie $\sum^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se denomina serie p-armónica, generalización de la serie armónica ($p = 1$). Se verifica

$$\begin{cases} p > 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge,} \\ p \leq 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ diverge.} \end{cases}$$

• *Criterio del cociente.* Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Entonces

$$\begin{cases} \ell < 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ \ell = 1 \text{ el criterio no decide.} \end{cases}$$

- *Ejemplo:* $\sum^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge pues $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$.

• *Criterio de la raíz.* Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Entonces

$$\begin{cases} \ell < 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \ell > 1 & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ diverge,} \\ \text{si } \ \ell = 1 \text{ el criterio no decide.} \end{cases}$$

(Si al intentar aplicar el criterio del cociente se obtiene $\ell = 1$, no se debe aplicar el criterio de la raíz pues el límite será el mismo).

- *Ejemplo:* $\sum^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+5}\right)^n$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$.

• *Criterio de comparación directa.* Supongamos que se verifica $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq k$ para algún k. Entonces

$$\begin{cases} \sum^{\infty} b_n \text{ converge} & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ converge,} \\ \sum^{\infty} a_n \text{ diverge} & \Rightarrow \quad \sum^{\infty} b_n \text{ converge.} \end{cases}$$

• *Criterio de comparación en el límite.* Supongamos que se verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, donde $0 < c < \infty$. Entonces ambas series tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen.

- *Ejemplo:* $\sum^{\infty} \operatorname{arc\,sen}(1/\sqrt{n})$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{-1/2}} = 1$, y la serie 1/2-armónica diverge.

Series alternadas

Una serie alternada tiene la forma $\sum^{\infty} (-1)^n b_n$, donde $b_n \geq 0$.

Si la serie de términos positivos $\sum^{\infty} b_n$ converge entonces la serie alternada $\sum^{\infty} (-1)^n b_n$ también converge, pero el recíproco no es cierto. Así pues se considera, para una serie de términos con signo cualquiera $\sum^{\infty} a_n$:

- Se dice que converge absolutamente si la serie $\sum^{\infty} |a_n|$ converge. En ese caso la serie dada también converge.
- Se dice que converge condicionalmente si converge pero no absolutamente.

• *Criterio de Leibniz.* Si la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente con $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, entonces la serie alternada $\sum\limits^{\infty}(-1)^n b_n$ converge.

- *Ejemplo:* $\sum\limits^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente.

Suma de algunas series

• *Serie geométrica.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\,, \qquad \text{si } \ |r| < 1 \qquad \Big(\sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}\Big).$$

• *Serie aritmético-geométrica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{r}{(1-r)^2}\,, \qquad \text{si } \ |r| < 1.$$

• *Serie telescópica.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

3.3 Series de Taylor

Preliminares

- Una serie de potencias es una suma de la forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

- El conjunto de convergencia es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie es convergente. Siempre es un intervalo simétrico $(x_0-\rho, x_0+\rho)$, aunque puede incluir o no los extremos. El número $\rho \in [0,\infty]$ se denomina radio de convergencia.
El radio de convergencia se calcula con la fórmula

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

donde se utiliza la convención $1/0=\infty$, $1/\infty = 0$.

Teorema: Si f admite todas las derivadas en un cierto intervalo $I \ni x_0$, y el resto del polinomio de Taylor de f, $R_{n,x_0}f(x)$ tiende a cero cuando $n\to\infty$ para todo $x \in I$, entonces f coincide en I con su serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

- *Algunas series de Taylor:*

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \qquad -1 < x < 1.$
- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1.$