uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

TEOÍA DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 4: Integración en una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

TEMA 4. Integración en una variable

4.1 Cálculo de primitivas

Preliminares

- Geométricamente, el problema de la derivación surge al buscar la pendiente de una curva y el problema de la integración aparece cuando se pretende calcular el área bajo una curva. Newton encontró, en el S.XVIII, que estos dos problemas están relacionados, y que de hecho son inversos. Veremos con el Teorema Fundamental del Cálculo que las integrales definidas se pueden obtener calculando una primitiva.

> *Definición:* Se dice que una función g es una primitiva de f si $g' = f$.

Aunque en ese caso, si c es una constante cualquiera la función $g + c$ también es una primitiva de f, omitiremos las constantes aditivas y escribiremos

$$\int f = g, \qquad \text{o también} \qquad \int f(x)\,dx = g(x).$$

Técnicas de integración

- *Integrales inmediatas:*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1 \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \qquad \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

-*Integración por cambio de variable*

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

(y después deshacer el cambio.)

- *Integración por partes*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

o lo que es lo mismo,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

-*Integración de funciones racionales: descomposición en fracciones simples*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \;\text{ con } P,\ Q \text{ polinomios.}$$

1. Si grado$(P) \geq$ grado$(Q) \rightsquigarrow$ dividimos.

   $P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \to$
   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

2. $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con grado$(R) <$ grado(Q). Descomponemos el denominador en producto de factores simples.

   $$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots((x-r_1)^2+s_1^2)^{m_1}((x-r_2)^2+s_2^2)^{m_2}\cdots$$

   Un factor por cada raíz real, contando su multiplicidad, y un factor por cada par de raíces complejas conjugadas, también con su multiplicidad.

3. Descomponemos el cociente en suma de fracciones simples.

Factor en el denominador	Términos en la descomposición
$x-\alpha$	$\dfrac{A}{x-\alpha}$
$(x-\alpha)^k$	$\dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$
$(x-r)^2+s^2$	$\dfrac{Cx+D}{(x-r)^2+r^2}$
$\big((x-r)^2+s^2\big)^m$	$\dfrac{C_1x+D_1}{(x-r)^2+s^2} + \dfrac{C_2x+D_2}{\big((x-r)^2+s^2\big)^2} + \cdots + \dfrac{C_mx+D_m}{\big((x-r)^2+s^2\big)^m}$

Por cada factor del denominador $Q(x)$, añadimos el correspondiente término de la tabla y calculamos las constantes A_i, B_i, C_i, D_i igualando los denominadores.

4. Integramos. Los términos correspondientes a raíces reales se integran de manera inmediata. Los correspondientes a raíces complejas requerirán un cambio trigonométrico, $x-r = s \operatorname{tg} t$.

-*Integrales trigonométricas*

$$\int \operatorname{sen}^{2n} x\, dx,\ \int \cos^{2n} x\, dx \rightsquigarrow \text{fórmulas del ángulo doble: } \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\int \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^n \operatorname{sen} x\, dx$$

$$\int \cos^{2n+1} x\, dx = \int \cos^{2n} x \cos x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^n \cos x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx \rightsquigarrow \text{fórmulas del seno y coseno de la suma}$$

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx \rightsquigarrow \begin{array}{ll} R \text{ impar en } \operatorname{sen} x \to & t = \cos x \\ R \text{ impar en } \cos x \to & t = \operatorname{sen} x \\ R \text{ par en } \operatorname{sen} x \text{ y } \cos x \to & t = \operatorname{tg} x. \end{array}$$

-*Cambios de variables trigonométricos*

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \to x = a \operatorname{sen} t$
2. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \to x = a \sec t$
3. $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \to x = a \operatorname{tg} t$

4.2 Teorema Fundamental del Cálculo

<u>Preliminares</u>

- Si $f(x)$ es una función continua positiva en el intervalo $x \in [a,b]$, entonces la **integral definida**

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

representa el **area bajo la gráfica** de la función $f(x)$, sobre el eje X, en el intervalo $[a,b]$.

> *Definición:* Dada una función integrable $f(x)$ en $[a,b]$, dividimos el intervalo en n subintervalos $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, elegimos un punto cualquiera $x_i^\star$ de cada intervalo, definimos la integral de Riemann de $f(x)$ entre a y b como
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)(x_i - x_{i-1}).$$

Si $f(x_i^\star) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, las sumas anteriores se denominan sumas superiores.
Si $f(x_i^\star) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(X)$ se llaman sumas inferiores.

- *Propiedades de la integral:*

1. $\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\int_a^a f = 0$
4. $\int_a^b f = -\int_b^a f$
5. $\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$
6. $f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
7. $f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0$
   si $f \leq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \leq 0$
8. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
9. $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow$
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

- *Valor medio:*

Se denomina valor medio de una función f en el intervalo $[a,b]$ al número

$$VM(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Claramente, si $m \leq f \leq M$ en $[a,b]$, se tiene $m \leq VM(f) \leq M$.

<u>Función integral</u>

Sea f integrable en [a,b], y consideremos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

en $[a, b]$. Entonces F es continua en $[a, b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo
Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en c con

$$F'(c) = f(c).$$

- *Regla de Barrow:*

Si $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

-*Cambio de variables en la integral definida*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

- *TFC generalizado:*

Supongamos que las funciones involucradas son derivables.

- Sea $H(x) = F(g(x)) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\, dt$, entonces

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

- Sea $H(x) = \displaystyle\int_{l(x)}^{g(x)} f(t)\, dt$, entonces

$$H'(x) = f(g(x))g'(x) - f(l(x))l'(x).$$

4.3 Aplicaciones de la integral

Áreas

- Área entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, para x en el intervalo $[a, b]$,

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

- Área entre las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para x en el intervalo $[a, b]$,

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

- Área usando *ecuaciones paramétricas*: área entre la gráfica $\{x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ y el eje horizontal,

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\, dt \right|$$

- Área usando *coordenadas polares:* área entre la gráfica $\{r = r(\theta),\ \theta \in [\alpha, \beta]\}$ y el eje horizontal,

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta)\, d\theta$$

Volúmenes

- Volumen por secciones: si $A(x)$ es el área de la sección para cada $x \in [a, b]$,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

- Volumen por el método de discos: volumen del sólido obtenido al girar la región entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, alrededor de éste, para $x \in [a, b]$,

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

- Volumen por el método de capas: volumen del sólido obtenido al girar la región entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, alrededor del eje vertical, para $x \in [a, b]$,

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Longitudes

- Longitud del arco de curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$,

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- Longitud usando *ecuaciones paramétricas*: longitud del arco de curva $\{x = x(t),\ y = y(t),\, t \in [t_0, t_1]\}$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

- Longitud usando *coordenadas polares:*: longitud del arco de curva $\{r = r(\theta),\, \theta \in [\alpha, \beta]\}$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\, d\theta$$