uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 2: Cálculo diferencial de una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Índice

2. Cálculo diferencial de una variable.

2.1. Derivabilidad

Problema 2.1.1 Sean f, g funciones derivables en todo $I\!R$. Escribe la derivada de las siguientes funciones en su dominio:

$$i)\quad h(x) = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \qquad ii)\quad h(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right),$$

$$iii)\quad h(x) = f(g(x))\mathrm{e}^{f(x)}, \qquad iv)\quad h(x) = \log(g(x)\operatorname{sen}(f(x))),$$

$$v)\quad h(x) = (f(x))^{g(x)}, \qquad vi)\quad h(x) = \frac{1}{\log(f(x) + g^2(x))}.$$

Problema 2.1.2

I) Construye una función continua en todo $I\!R$ tal que se anule para $|x| \geq 2$, y valga uno para $|x| \leq 1$.

II) Construye otra que además sea derivable.

Problema 2.1.3 A partir de las funciones hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$, definimos las funciones $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$ y $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$. Demuestra las fórmulas

$$i)\quad (\operatorname{senh} x)' = \cosh x, \qquad ii)\quad (\cosh x)' = \operatorname{senh} x,$$

$$iii)\quad (\operatorname{tgh} x)' = \operatorname{sech}^2 x, \qquad iv)\quad (\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x.$$

Problema 2.1.4 Comprueba que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales especificadas, donde c, c_1 y c_2 son constantes.

$$i)\quad f(x) = \frac{c}{x}, \qquad xf' + f = 0;$$

$$ii)\quad f(x) = x \operatorname{tg} x, \qquad xf' - f - f^2 = x^2;$$

$$iii)\quad f(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x, \qquad f'' + 9f = 0;$$

$$iv)\quad f(x) = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-3x}, \qquad f'' - 9f = 0;$$

$$v)\quad f(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{5x}, \qquad f'' - 7f' + 10f = 0;$$

$$vi)\quad f(x) = \log(c_1\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) + c_2, \qquad f'' + (f')^2 = 1.$$

Problema 2.1.5 Demuestra las identidades

$$i)\quad \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad x > 0;$$

$$ii)\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{4}, \qquad x < 1;$$

$$iii)\quad 2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sen}\frac{2x}{1+x^2} = \pi, \qquad x \geq 1.$$

Indicación: deriva y sustituye en algún punto del intervalo. El resultado *no* es cierto fuera de los intervalos especificados.

Problema 2.1.6 Calcula el valor de $a \in I\!R$ para el cual la parábola $f(x) = ax^2$ es tangente a la curva $g(x) = \log x$, y escribe la ecuación de la tangente común.

Problema 2.1.7 Calcula en qué puntos la gráfica de la función $f(x) = x + (\operatorname{sen} x)^{1/3}$ tiene tangente vertical.

Problema 2.1.8 Calcula el ángulo que forman las tangentes por la derecha y por la izquierda en el origen a la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Problema 2.1.9 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (3 - x^2)/2 & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

I*)* estudia su continuidad y derivabilidad;

II*)* ¿se puede aplicar el teorema del valor medio en [0,2]? En caso afirmativo halla el punto (o puntos) de la tesis del teorema.

Problema 2.1.10 Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \sqrt{x+2}\, \arccos(x+2).$$

Problema 2.1.11 Calcula el mínimo valor de α para el que la función $f(x) = |\alpha x^2 - x + 3|$ es derivable en todo $I\!R$.

Problema 2.1.12 La función $f(x) = 1 - x^{2/3}$ se anula en -1 y en 1 y, sin embargo, $f'(x) \neq 0$ en $(-1, 1)$. Explica esta aparente contradicción con el teorema de Rolle.

Problema 2.1.13 Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c \\ |x|^{-1} & \text{si } |x| > c \end{cases}$, con $c > 0$, calcula a y b para que sea continua y derivable en todo $I\!R$.

Problema 2.1.14 Utilizando el teorema del valor medio aproxima $26^{2/3}$ y $\log(3/2)$.

Problema 2.1.15 Calcula los límites de los problemas **??** y **??** utilizando la regla de L'Hôpital, escribiéndolos previamente en la forma adecuada.

Problema 2.1.16 Calcula los siguientes límites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}$, *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log|\operatorname{sen} 7x|}{\log|\operatorname{sen} x|}$,

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \log x \cdot \log(x-1)$, *iv)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$,

v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1+x} - 1 - x - x^2}{x^3}$, *vi)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\Big(\operatorname{tg}(2/x) - \operatorname{tg}(1/x)\Big)$.

Problema 2.1.17 Calcula los siguientes límites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{x-1}}{(x-1)^x}$, *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - \mathrm{e}^x}{\operatorname{arc\,tg} x}$,

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$, *iv)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{3/(2\operatorname{arc\,sen} x)}$,

v) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} (2x^2+3x-2)\operatorname{tg}(\pi x)$, *vi)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\operatorname{sen} x}{\sec x - 1}$,

vii) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$, *viii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/\log x}$.

Problema 2.1.18 Sea h una función dos veces derivable, y sea

$$f(x) = \begin{cases} h(x)/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Sabiendo que f es continua, calcula $h(0)$, $h'(0)$ y $h''(0)$.

Problema 2.1.19 Halla a para que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x - x}{x^2}$ sea finito y calcula el valor del límite.

Problema 2.1.20 Calcula los siguientes límites:

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\Big((1+1/x)^x - \mathrm{e}\Big)$, *ii)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+1/x)^{x^2}}{\mathrm{e}^x}$,

iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{2^{1/x}+18^{1/x}}{2}\Big)^x$, *iv)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} a_i^{1/x}\Big)^x$, $p \in I\!N$, $a_i > 0$.

Problema 2.1.21 Dada una función f derivable, que satisface $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{5x^3} = 1$,

I*)* justifica que $f(0) = 0$;

II*)* prueba que $f'(0) = 5/2$;

III*)* calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(2x)}{f^{-1}(3x)}$.

Problema 2.1.22 La ecuación

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-f} f' = 2 + \operatorname{tg} x \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

define una función f uno a uno en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$, derivable. Se define la función $g(x) = f^{-1}(x+1)$. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{g(x)}.$$

Problema 2.1.23

I*)* Sea $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ derivable. Si f admite $k \geq 2$ raíces en $[a,b]$, entonces f' admite al menos $k-1$ raíces en $[a,b]$.

II) Si f es n veces derivable en $[a,b]$ y se anula en $n+1$ puntos distintos de $[a,b]$, prueba que $f^{(n)}$ se anula al menos una vez en $[a,b]$.

Problema 2.1.24 Calcula cuántas soluciones tienen las ecuaciones siguientes en los intervalos especificados:

i)	$x^7+4x=3$,	en $\mathbb{R}$;	*ii)*	$x^5=5x-6$,	en $\mathbb{R}$;
iii)	$x^4-4x^3=1$,	en $\mathbb{R}$;	*iv)*	$\operatorname{sen} x=2x-1$,	en $\mathbb{R}$;
v)	$x^x=2$,	en $[1,\infty)$;	*vi)*	$x^2=\log(1/x)$,	en $(1,\infty)$.

2.2. Extremos de funciones.

Problema 2.2.1 Sea la función $f(x)=|x^3(x-4)|-1$.

I) Estudia su continuidad y derivabilidad.

II) Calcula sus extremos relativos.

III) Prueba que la ecuación $f(x)=0$ tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$.

Problema 2.2.2 Una empresa de tomate en salsa quiere fabricar latas cilíndricas de volumen fijo V. ¿Cuál deberá ser la relación entre el radio r de la base de la lata y su altura h, para que la construcción requiera el mínimo gasto de material?

Problema 2.2.3 Halla el área del rectángulo, de lados paralelos a los ejes e inscrito en la elipse $(x/a)^2+(y/b)^2=1$, de área máxima.

Problema 2.2.4 Halla el área del triángulo, formado por la tangente a la parábola $y=6-x^2$ y los semiejes positivos, que tiene área mínima.

Problema 2.2.5 Un triángulo rectángulo ABC tiene el vértice A en el origen, B sobre la circunferencia $(x-1)^2+y^2=1$, y el cateto AC sobre el eje horizontal. Calcula C para que el área del triángulo sea máxima.

Problema 2.2.6 Sea $P=(x_0,y_0)$ un punto del primer cuadrante. Traza una recta que pase por P y corte a los ejes en $A=(x_0+\alpha,0)$ y $B=(0,y_0+\beta)$ respectivamente. Calcula $\alpha,\beta>0$. de manera que sea mínima:

I) la longitud de AB;

II) la longitud de OA más la de OB;

III) el área del triángulo OAB.

Indicación: $\beta=x_0y_0/\alpha$.

Problema 2.2.7

I) Demuestra la desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^a\geq 1+ax$, para todo $a\geq 1$, $x>-1$.

II) Demuestra que $\mathrm{e}^x\geq 1+x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

III) Demuestra que $\dfrac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ para todo $x > -1$.

Indicación: minimiza las funciones apropiadas.

Problema 2.2.8

I) Demuestra que $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$.

II) Concluye que $\mathrm{e}^x > x^{\mathrm{e}}$ para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$.

Problema 2.2.9 Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$ en el intervalo $[-2, 1]$.

2.3. Representación gráfica.

Problema 2.3.1 Demuestra que si f y g son funciones convexas dos veces derivables, y f es creciente, entonces $h = f \circ g$ es convexa.

Problema 2.3.2

I) Esboza la gráfica de la función $f(x) = x + \log|x^2 - 1|$.

II) A partir de ella dibuja la gráfica de las funciones

$$a) \quad g(x) = |x| + \log|x^2 - 1|, \qquad b) \quad h(x) = \Big|x + \log|x^2 - 1|\Big|.$$

Problema 2.3.3 Representa gráficamente las funciones siguientes:

i) $y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$, *ii)* $y = \sqrt{x^2 - 1} - 1$, *iii)* $y = x\mathrm{e}^{1/x}$,

iv) $y = x^2\mathrm{e}^x$, *v)* $y = (x-2)x^{2/3}$, *vi)* $y = (x^2 - 1)\log\dfrac{1+x}{1-x}$,

vii) $y = \dfrac{x}{\log x}$, *viii)* $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, *ix)* $y = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{1-x}$,

x) $y = \log[(x-1)(x-2)]$, *xi)* $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x(x-1)}$, *xii)* $y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$,

xiii) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$, *xiv)* $y = \sqrt{|x-4|}$, *xv)* $y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$,

xvi) $y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x - 1}$, *xvii)* $y = \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x$, *xviii)* $y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

Problema 2.3.4 Representa la gráfica de las funciones siguientes:

i) $f(x) = \text{mín}\,\{\log|x^3 - 3|, \log|x+3|\}$, *ii)* $g(x) = \dfrac{1}{|x|-1} - \dfrac{1}{|x-1|}$,

iii) $h(x) = \dfrac{1}{1+|x|} - \dfrac{1}{1+|x-a|}$, $a > 0$, *iv)* $k(x) = x\sqrt{|x^2 - 1|}$,

v) $p(x) = \operatorname{arc\,tg}(\log(|x^2 - 1|))$, *vi)* $w(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Problema 2.3.5 Representa la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{1+x}, \qquad x \neq 0; \qquad f(0) = 0.$$

y estudia razonadamente cuántas soluciones tiene la ecuación $\dfrac{e^{1/x}}{1+x} = x^3$ en $\mathbb{R}$.

Problema 2.3.6 Dada la función $f(x) = \dfrac{1+x}{3+x^2}$, representa la gráfica de las funciones

$$i) \quad g(x) = \sup_{y>x} f(y), \qquad ii) \quad h(x) = \inf_{y>x} f(y).$$

Problema 2.3.7

I) Calcula la imagen de la función $f(x) = 1 + (\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

II) Calcula los valores de $A \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$g(x) = \frac{1}{A + \log f(x)},$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

III) Calcula el supremo y el ínfimo de g si $A = 1$.

IV) Esboza la gráfica de g en este último caso.

Problema 2.3.8 Se considera la función $f(x) = \log(1+x^2)$.

I) Calcula las rectas tangentes en sus puntos de inflexión y esboza la gráfica de f y de estas rectas.

II) Demuestra que la función $g(x) = \max\{\, f(x), |x| + \alpha \,\}$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en cualquier intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ si y sólo si $\alpha = \log 2 - 1$.

III) Para el anterior valor de α, obtén el punto o puntos cuya existencia garantiza el mencionado teorema aplicado a la función g en el intervalo $[-1, 2]$.

2.4. Polinomio de Taylor.

Problema 2.4.1 Escribe el polinomio de Taylor de orden 5 alrededor del origen para las funciones siguientes:

$$i) \quad e^x \operatorname{sen} x, \qquad ii) \quad e^{-x^2} \cos 2x, \qquad iii) \quad \operatorname{sen} x \cos 2x,$$

$$iv) \quad e^x \log(1-x), \qquad v) \quad (\operatorname{sen} x)^2, \qquad vi) \quad \frac{1}{1-x^3}.$$

Problema 2.4.2 Escribe el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ en potencias de $x - 4$.

Problema 2.4.3 Escribe el polinomio de Taylor de orden n alrededor del punto que se indica, de las siguientes funciones:

I) $f(x) = 1/x$ en $a = -1$;

II) $f(x) = xe^{-2x}$ en $a = 0$;

III) $f(x) = (1 + e^x)^2$ en $a = 0$.

Problema 2.4.4 Demuestra las fórmulas

$$
\begin{array}{rlll}
i) & \operatorname{sen} x = o(x^\alpha), \quad \forall\, \alpha < 1, & & \text{cuando } x \to 0; \\
ii) & \log(1 + x^2) = o(x), & & \text{cuando } x \to 0; \\
iii) & \log x = o(x), & & \text{cuando } x \to \infty; \\
iv) & \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = o(x^2), & & \text{cuando } x \to 0.
\end{array}
$$

Problema 2.4.5 Calcula los siguientes límites utilizando el Teorema de Taylor:

$$
\begin{array}{llll}
i) & \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{x^2}, & ii) & \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x + x^3/6}{x^5}, \\
iii) & \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1 - x}}{\operatorname{sen} x}, & iv) & \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \\
v) & \lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos 3x)}, & vi) & \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x + e^x - x - 2}{x^3}, \\
vii) & \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \right), & viii) & \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{x} - \cot x \right), \\
ix) & \lim_{x\to \infty} x^{3/2}(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x}), & x) & \lim_{x\to \infty} \left[x - x^2 \log(1 + 1/x) \right].
\end{array}
$$

Problema 2.4.6 Calcula el polinomio de Taylor de orden 4 en el origen para la función $f(x) = 1 + x^3 \operatorname{sen} x$ y decide si f tiene en ese punto un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.

Problema 2.4.7

I) Calcula aproximadamente el valor de $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}1}}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3. ¿Cuál es el error cometido?

II) Aproxima $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2. Evalúa el error cometido.

Problema 2.4.8

I) Aproxima la función $f(x) = \cos x + e^x$ mediante un polinomio de tercer grado alrededor del origen.

II) Estima el error cometido cuando se utiliza la aproximación anterior para $x \in [-1/4, 1/4]$.

Problema 2.4.9 ¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de Taylor alrededor del origen de la función $f(x) = e^x$ para obtener un polinomio que la aproxime en $[-1, 1]$ con tres cifras decimales exactas?