

EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 3: Sucesiones y series

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García



Índice

3. Sucesiones y series.	1
3.1. Sucesiones de números reales.	1
3.2. Series de números reales	4
3.3. Series de Taylor.	6

3. Sucesiones y series.

3.1. Sucesiones de números reales.

Problema 3.1.1

- I) Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente e $\{y_n\}$ una divergente; ¿qué se puede decir de la sucesión producto $\{x_n y_n\}$, suma $\{x_n + y_n\}$, y cociente $\{y_n/x_n\}$ (suponiendo que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$)?
- II) Prueba que si $\{x_n\}$ es convergente, entonces la sucesión $\{|x_n|\}$ también es convergente. ¿Es cierto el recíproco?
- III) ¿Qué se puede decir de una sucesión de números enteros que es convergente?
- IV) Demuestra que toda sucesión convergente es acotada.

Problema 3.1.2 Dadas las siguientes sucesiones en forma recurrente, escribe el término general y calcula el límite.

$$i) a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}; \quad ii) b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \sqrt{2b_n}.$$

Problema 3.1.3 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, \quad (a > 0), & ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3/n}, \\ iii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad (a, b > 0), & iv) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n, \quad (a, b > 0), \\ v) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n), & vi) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}), \\ vii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}, & viii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 - 3n} \right)^{\frac{n^2 - 1}{2n}}. \end{aligned}$$

Problema 3.1.4 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\pi} \operatorname{sen} n\pi, & ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(e^{1/n} - e^{\operatorname{sen} 1/n})}{1 - n \operatorname{sen} 1/n}, \\ iii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}, & iv) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \\ v) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}, & vi) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}, \\ vii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n}, & viii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + \cdots + n\sqrt[n]{n}}{n^2}. \end{aligned}$$

Problema 3.1.5 Calcula los siguientes límites:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{b}{n} + a \operatorname{sen} \frac{b}{n} \right)^n; \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a - bu_n}{a + u_n}}, \quad \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad a > 0.$$

Problema 3.1.6 Calcula los siguientes límites:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}}{\log n}, \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (2k-1)^{1/n^2}, \quad iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \operatorname{sen} \frac{1}{k}.$$

Problema 3.1.7 Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, halla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}}{\log(n+1)}.$$

Problema 3.1.8 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos que verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = L$.

- I) Demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$.
 II) Demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log(a_n/n) = L$.

Problema 3.1.9 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos que verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Calcula, utilizando el criterio de Stolz, el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{\frac{a_n^n}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}}.$$

Problema 3.1.10 Demuestra que las siguientes sucesiones son monótonas, estudia si son acotadas, y calcula el límite caso de existir.

$$\begin{aligned} i) & \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots & ii) & \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots \\ iii) & u_{n+1} = 3 + \frac{u_n}{2}, \quad u_0 = 0. & iv) & u_{n+1} = 3 + 2u_n, \quad u_0 = 0. \\ v) & u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 6}{7}, & a) & u_0 = 1/2, \quad b) u_0 = 3/2, \quad c) u_0 = 3. \end{aligned}$$

Problema 3.1.11 Se considera la sucesión definida por $a_{n+1} = \sqrt{1+3a_n} - 1$, $a_0 = 1/2$.

- I) Demuestra que es convergente y calcula su límite.
 II) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1}$.

Problema 3.1.12 Sea la sucesión definida por $b_{n+1} = 1 - \frac{b_n}{2}$, con $b_0 = 0$.

- I) Comprueba que se trata de una sucesión oscilante, $\operatorname{signo}(b_{n+1} - b_n) = -\operatorname{signo}(b_n - b_{n-1})$.
 II) Calcula el posible límite ℓ .
 III) Demuestra que se tiene $|b_{n+1} - \ell| = \frac{1}{2}|b_n - \ell|$.

IV) Demuestra que efectivamente $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell$.

Indicación: iii) $|b_n - \ell| = (\frac{1}{2})^n \ell$.

Problema 3.1.13 Considera la sucesión definida por $c_{n+1} = f(c_n)$, donde $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $c_0 = 0$. Demuestra que es convergente mediante los pasos siguientes:

- I) Calcula el posible límite ℓ .
- II) Demuestra que si $x \in [1/2, 1]$ entonces $f(x) \in [1/2, 1]$.
- III) Comprueba que se tiene $|f'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [1/2, 1]$.
- IV) Demuestra que $c_n \in [1/2, 1]$ para todo $n \geq 1$.
- V) Demuestra la estimación $|c_{n+1} - \ell| \leq k^n |c_1 - \ell|$ para todo $n \geq 1$.

Problema 3.1.14

I) Utiliza la técnica del problema anterior con la sucesión

$$d_0 = \frac{1}{2}, \quad d_{n+1} = 2 + \frac{4}{d_n}, \quad n \geq 0,$$

y el intervalo $[3, 10/3]$.

II) Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1} - \ell}{d_n - \ell}$.

Problema 3.1.15 Se considera la sucesión de números reales definida de forma recurrente

$$x_1 = 1, \quad x_n = \frac{x_{n-1}(1 + x_{n-1})}{1 + 2x_{n-1}}.$$

Demuestra que es convergente y calcula su límite.

Problema 3.1.16 Describe el comportamiento de las sucesiones recurrentes de los problemas anteriores, representando en dos ejes cartesianos cada par de términos consecutivos (*diagrama de la telaraña*).

3.2. Series de números reales

Problema 3.2.1 Estudia la convergencia de las siguientes series de términos positivos:

$$\begin{array}{lll}
 i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n, & ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}, & iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^4+1}}, \\
 iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, & v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^2+n}, & vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right), \\
 vii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), & viii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}, & ix) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}, \\
 x) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n, & xi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} 3^{-n}, & xii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}, \\
 xiii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}, & xiv) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(\log n)^n}, & xv) \quad \sum_{n=2}^{\infty} [\sqrt{n^2+1}-n], \\
 xvi) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right), & xvii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}, & xviii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}.
 \end{array}$$

Indicaciones: (en general se puede aplicar más de un criterio); *i)*, *viii)*, *x)*, *xi)*, *xiii)*, *xiv)*, criterio de la raíz; *ix)*, criterio del cociente; *ii)*, *iii)*, *iv)*, *v)*, *vi)*, *vii)*, *xv)*, *xvi)*, *xvii)*, *xviii)*, comparación; *xii)*, calcula el límite (ver ?? *ii)*).

Problema 3.2.2 Demuestra que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2n-1} - \frac{b}{2n+1}\right)$$

es convergente si y sólo si $a = b$.

Problema 3.2.3

- I) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+a)^n e^{-an}$, según los valores de $a > -1$.
- II) La misma pregunta para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^n n!}$, según los valores de $a > 0$.
- III) La misma pregunta para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+a}}$, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

Indicaciones: *ii)* y *iii)* utiliza la fórmula de Stirling.

Problema 3.2.4 Estudia la convergencia absoluta y condicional de las siguientes series alter-

nadas:

$$\begin{array}{ll}
 i) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}, & ii) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi n + 1/n), \\
 iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{arc\,tg} 1/n)^2, & iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\operatorname{arc\,tg} n)^2, \\
 v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n^2 - 1} - n], & vi) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \\
 vii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos(1/n)), & viii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(e^n + e^{-n})}.
 \end{array}$$

Problema 3.2.5 Utilizando el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{arc\,tg} x$, estudia la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Problema 3.2.6 Calcula cuántos términos hay que tomar para aproximar las siguientes sumas con un error menor que 10^{-3} :

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Problema 3.2.7 Calcula la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
 i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n-3}}{4^n}, & ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, & iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+1}{3^n}, \\
 iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}, & v) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right].
 \end{array}$$

Problema 3.2.8

- I) Demuestra que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 10^{-n}$, donde $b_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ para $n \geq 1$ y $b_0 \in \mathbb{Z}$, converge. ¿Qué representa esta serie y cuál es su importancia?
- II) Calcula la suma anterior para los casos:

$$a) \quad b_n = 9, \quad n \geq 0; \quad b) \quad b_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 2 & n = 2k + 1 \end{cases}, \quad k \geq 0.$$

Problema 3.2.9

- I) Demuestra que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene una única solución λ_n en cada intervalo $((2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- II) Prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ es convergente.

Problema 3.2.10 Sea la sucesión definida por $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$, $x_0 = 1$.

I) Demuestra que es convergente y calcula su límite.

II) Calcula los límites

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n.$$

III) Estudia la convergencia de las series

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2.$$

3.3. Series de Taylor.

Problema 3.3.1 Halla el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\begin{array}{lll} i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^2}, & ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}, & iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 10^{n-1}}, \\ iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, & v) \sum_{n=1}^{\infty} (3 - 2x)^n, & vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{2n}}. \end{array}$$

Problema 3.3.2 Desarrolla en serie de potencias la función $f_k(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$, para $k = 1, 2, 3$.

Problema 3.3.3 Calcula el radio de convergencia y la suma de las siguientes series de potencias:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)2^{-n}x^n.$$

Problema 3.3.4 Desarrolla en serie de potencias, indicando el dominio de validez del desarrollo, las funciones:

$$\begin{array}{lll} i) f(x) = \operatorname{sen}^2 x, & ii) f(x) = \frac{x}{a+bx}, \quad \text{con } a, b > 0, \\ iii) f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, & iv) f(x) = \frac{1}{2-x^2}, & v) f(x) = e^{x^2}. \end{array}$$

Problema 3.3.5 Calcula la suma de las siguientes series

$$\begin{array}{ll} i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}, & ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \\ iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}, & iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{array}$$

Problema 3.3.6 Sea C_0 un círculo de radio r .

I) Obtén un rectángulo Q_0 , inscrito en C_0 , de área máxima.

II) Sea ahora C_1 el círculo máximo interior a ese rectángulo, concéntrico con C_0 , e inscribe un rectángulo Q_1 de área máxima en C_1 . Calcula la suma de las áreas de la sucesión $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ de círculos obtenidos iterando el proceso.

Problema 3.3.7 Dada la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{n!}$, calcula los valores de $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$.

Problema 3.3.8 Halla una función $f(x)$, desarrollable en serie de potencias, que verifique

$$f'(x) = f(x) + x, \quad f(0) = 2.$$