uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 4: Integración en una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Índice

4. Integración en una variable

4.1. Cálculo de primitivas.

Problema 4.1.1 Calcula las siguientes primitivas:

1. $\displaystyle\int x\,\mathrm{tg}^2(2x)\,dx$,
2. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x \sec^4 x\,dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}\,dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{(x+3)^3}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\,dx$,
5. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx$,
6. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$,
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}^2 x\cos^5 x}{\mathrm{tg}^3 x}\,dx$,
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x-\cos x}{\mathrm{sen}\,x+\cos x}\,dx$,
9. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,\pi x\,dx$,
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$,
11. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x\,dx$,
12. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4 x\,dx$,
13. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$,
14. $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$,
15. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2 x\cos^2 x\,dx$,
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{2x+5}}$,
17. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$,
18. $\displaystyle\int \mathrm{arc\,tg}\,\sqrt[3]{x}\,dx$,
19. $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}+1}\,dx$,
20. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx$,
21. $\displaystyle\int \sqrt{2+\mathrm{e}^x}\,dx$,
22. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,x}\cos^3 x\,dx$,
23. $\displaystyle\int \mathrm{sen}^5 x\,dx$,
24. $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx$,
25. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$,
26. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$,
27. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$,
28. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x+3\cos x}{\mathrm{sen}\,x\cos x+2\,\mathrm{sen}\,x}\,dx$,
29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,x+3\cos x}{\mathrm{sen}\,x+2\cos x}\,dx$,
30. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2(3x)\sec^3(3x)\,dx$,
31. $\displaystyle\int \frac{4x^4-x^3-46x^2-20x+153}{x^3-2x^2-9x+18}\,dx$,
32. $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx$,
33. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{4x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+2}\,dx$,
34. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$,
35. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{5/2}}\,dx$,
36. $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-2x+2}\,dx$,
37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$,
38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+2}}$,
39. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^{5/2}}\,dx$,
40. $\displaystyle\int x^2(1-x^2)^{-3/2}\,dx$,
41. $\displaystyle\int \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx$,
42. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{x^2(x-1)}\,dx$,

43. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$ 44. $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\,dx,$ 45. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-1}\,dx,$

46. $\displaystyle\int \sec^6 x\,dx,$ 47. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx,$ 48. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-4e^{-x}},$

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}},$ 50. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1-x}},$ 51. $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx,$

52. $\displaystyle\int x^2\log x\,dx,$ 53. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx,$ 54. $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx,$

55. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x\,dx,$ 56. $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx,$ 57. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x},$

58. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)dx,$ 59. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}},$ 60. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}},$ 62. $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx,$ 63. $\displaystyle\int \frac{x^5-2x^3}{x^4-2x^2+1}\,dx,$

64. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-2x)^2}-\sqrt{1-2x}},$ 65. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}},$ 66. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)},$

67. $\displaystyle\int x^m\log x\,dx,$ 68. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx,$ 69. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}\sqrt{x^3}\,dx,$

70. $\displaystyle\int \cos^2(\log x)\,dx,$ 71. $\displaystyle\int (\log x)^3\,dx,$ 72. $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx.$

Indicaciones: aquí IPP significa integración por partes y CV cambio de variable.

1. IPP con $dv=\operatorname{tg}^2(2x)dx$.
2. CV $t=\operatorname{tg} x$.
3. CV $t=\sqrt{x}$.
4. CV $t=\sqrt{1-(x+1)^2}$.
5. Fracciones simples.
6. CV $x=\sec t$.
7. CV $t=\cos x$.
8. La derivada del denominador casi está en el numerador.
9. IPP dos veces con $dv=e^x dx$.
10. CV $t=\operatorname{tg} x$.
11, 12, 13, 14 y 15. Usa las fórmulas del ángulo doble.
16. CV $t=\sqrt{2x+5}$.
17. CV $t=\sqrt{(x-1)/(x+1)}$.
18. CV $x=t^3$ y luego IPP con $dv=t^2dt$.
19. CV $t=\sqrt{\sqrt{x}+1}$.
20. CV $t=\sqrt{x+2}$.
21. CV $t=\sqrt{e^x+2}$.
22. CV $t=\operatorname{sen} x$ y luego IPP dos veces con $dv=e^t dt$.
23. CV $t=\cos x$.
24. CV $t=\operatorname{sen} x$.
25. $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$.
26. CV $t=\operatorname{tg} x$.
27. CV $t=\sqrt{1-x^2}$.
28 y 29. CV $t=\operatorname{tg}(x/2)$.
30. CV $t=\operatorname{sen}(3x)$.
31. Fracciones simples.
32. IPP dos veces con $dv=dx$.
33. CV $t=e^x$.
34. CV $t=\sqrt{1+x^{1/3}}$.
35. CV $x=\operatorname{tg} t$.
36. Completa cuadrados.

37. Es inmediata.
38. CV $x+2=t^3$.
39. CV $t=(x^2+1)^{1/2}$.
40. CV $x=\operatorname{sen} t$.
41. CV $t=\sqrt{e^x-1}$.
42. Fracciones simples.
43. CV $t=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.
44. Multiplica y divide por $1-\cos x$.
45. CV $t=\sqrt{x-1}$.
46. CV $t=\operatorname{tg} x$.
47. CV $t=1+x^2$.
48. CV $t=e^x$.
49. CV $t^2=1+x$.
50. CV $t^3=1-x$.
51. IPP dos veces con $dv=e^x dx$.
52. IPP con $dv=x^2 dx$.
53. CV $t=\cos x$.
54. Usa las fórmulas del ángulo doble.
55. CV $t=\operatorname{tg} x$.
56. CV $t=\operatorname{sen} x$.
57. Multiplica y divide por $1+\operatorname{sen} x$.
58. CV $t=\log x$.
59. CV $t=\operatorname{sen} x$.
60. CV $t^2=1+x^2$.
61. CV $t^2=e^{2x}-1$.
62. CV $t=e^x$.
63. Fracciones simples.
64. CV $t^2=1-2x$.
65. CV $x=3\operatorname{sen} t$.
66. Completa cuadrados.
67. IPP con $dv=x^3x$.
68. CV $t=\operatorname{sen} x$.
69. CV $t^2=x^3$.
70. CV $t=\log x$ y las fórmulas del ángulo doble.
71. IPP con $dv=dx$.
72. IPP con $dv=xdx$.

Problema 4.1.2 Halla una función continua f tal que $f(0)=0$ y

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2} & x<0 \\ e^{\sqrt{x}} & x>0. \end{cases}$$

Problema 4.1.3 Calcula $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ mediante sumas superiores e inferiores asociadas a particiones regulares del intervalo $[a,b]$.

Problema 4.1.4

I) Demuestra que si g es una función impar e integrable en $[-a,a]$, entonces, $\displaystyle\int_{-a}^{a} g=0$. Aplica este resultado para calcular

$$\int_6^{10} \operatorname{sen}[\operatorname{sen}\{(x-8)^3\}]dx\,.$$

II) Demuestra que si h es una función par e integrable en $[-a,a]$, entonces, $\displaystyle\int_{-a}^{a} h=2\int_0^a h$.

Problema 4.1.5 Demuestra e interpreta las siguientes afirmaciones:

$$i) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx,$$

$$ii) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx,$$

$$iii) \qquad \int_{-a}^{a} [f(x) - f(-x)]\,dx = 0,$$

$$iv) \qquad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$v) \qquad \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x} = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Problema 4.1.6 Calcula los siguientes límites asociándolos a alguna integral definida:

$$i) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right],$$

$$ii) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right],$$

$$iii) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}^2} + \sqrt[n]{\mathrm{e}^4} + \cdots + \sqrt[n]{\mathrm{e}^{2n}}}{n},$$

$$iv) \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2-0^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right].$$

Problema 4.1.7 Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n})^{1/n}.$$

Problema 4.1.8 Calcula $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ con $x \in [-1,1]$, para las siguientes funciones:

$$i) \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1; \end{cases} \qquad\qquad ii) \qquad f(x) = |x|\,e^{-|x|};$$

$$iii) \qquad f(x) = |x - 1/2|; \qquad\qquad iv) \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 1 & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$v) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ x+1 & 0 < x \leq 1; \end{cases} \qquad\qquad vi) \qquad f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ -x+2 & 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$vii) \qquad f(x) = \max\{\operatorname{sen}(\pi x/2), \cos(\pi x/2)\}.$$

Problema 4.1.9 Calcula las integrales definidas siguientes, cambiando los límites de integración si se realiza algún cambio de variable:

$$i)\quad \int_0^{\log 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\, dx, \qquad ii)\quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx.$$

4.2. Teorema fundamental del cálculo.

Problema 4.2.1 Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ con f integrable.

I) Demuestra que si $|f| \leq M$ entonces $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$, de donde se deduce la continuidad de F.

II) ¿Es F necesariamente derivable? ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que es derivable?

Problema 4.2.2 Deriva las siguientes funciones:

$$i)\quad F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt, \qquad ii)\quad F(x) = \int_{-x^3}^{x^3} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t},$$

$$iii)\quad F(x) = \int_3^{\int_1^x \operatorname{sen}^3 t dt} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}, \qquad iv)\quad F(x) = \int_2^{\mathrm{e}^{\int_1^{x^2} \operatorname{tg}\sqrt{t}\, dt}} \frac{ds}{\log s}$$

$$v)\quad F(x) = \int_0^x x^2 f(t) dt, \quad \text{con } f \text{ continua en } I\!R,$$

$$vi)\quad F(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt \right) dy \right).$$

Problema 4.2.3 Calcula el máximo y el mínimo en $[1,\infty)$ de la función:

$$f(x) = \int_0^{x-1} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \mathrm{e}^{-2t} \right)\, dt.$$

sabiendo que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}-1}{2}\,.$$

Problema 4.2.4

I) Demuestra que la ecuación

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\, dt = 1$$

tiene una única solución en $I\!R$ y que se encuentra en el intervalo $(0,1)$.

II) Halla y clasifica los extremos relativos en $(0,\infty)$ de la función

$$G(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen} t\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\, dt\,.$$

Problema 4.2.5 Calcula la recta tangente a la curva $y = \int_{x^2}^{\sqrt{\pi}/2} \operatorname{tg}(t^2)\, dt$ en $x = \sqrt[4]{\pi/4}$.

Problema 4.2.6 Calcula los siguientes límites:

$$i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt - x}{x^3}, \qquad ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}.$$

Problema 4.2.7 Calcula los límites laterales en el origen de la función

$$f(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{tg}(\sqrt{t})\, dt}{2x^3}.$$

Problema 4.2.8 Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

i) Utilizando el desarrollo de la función seno, escribe el desarrollo de Taylor de f alrededor del origen.

ii) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{1-\cos x}$.

iii) Estudia la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$.

Problema 4.2.9 Si la integral $\int_{-1/x}^{x} \frac{dt}{a^2+t^2}$ no depende de x, di sin calcular la integral cuánto vale a.

Problema 4.2.10 Se consideran las funciones $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $g(x) = 3 + \int_0^x f(t)\, dt$.

i) Escribe el desarrollo de Taylor de g alrededor del origen.

ii) Determina si g tiene en el origen un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

Problema 4.2.11 La ecuación

$$\int_0^{g(x)} (e^{t^2} + e^{-t^2})\, dt - x^3 - 3 \operatorname{arc\,tg} x = 0,$$

define una función g derivable y uno a uno en $\mathbb{R}$. Calcula:

i) $g(0)$, $g'(0)$ y $(g^{-1})'(0)$;

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$.

4.3. Aplicaciones.

Problema 4.3.1 Calcula el área delimitada por las curvas siguientes:

i) $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $y = (2-x)/6$;

ii) $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$;

III) $y = \dfrac{1-x}{1+x},\ y = \dfrac{2-x}{1+x},\ y = 0,\ y = 1;$

IV) bucle de la curva $y^2 = (x-a)(x-b)^2$, con $a < b$.

Problema 4.3.2 Halla el área acotada comprendida entre la gráfica de $f(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^{3/2}}$ y el eje horizontal.

Problema 4.3.3 Calcula el área delimitada por las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

I) espiral de Arquímedes: $r = a\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ y el segmento $\{0 \le x \le 2\pi a,\ y = 0\}$;

II) un pétalo de la rosa de tres pétalos: $r = a\cos 3\theta, \quad -\pi/6 \le \theta \le \pi/6$;

III) la mitad de la lemniscata: $r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \quad -\pi/4 \le \theta \le \pi/4$.

Problema 4.3.4

I) Calcula el área entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ y su asíntota.

II) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, su asíntota para $x \to +\infty$ y el eje vertical.

III) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}}$ y sus asíntotas.

IV) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \dfrac{x-4}{(x+4)\sqrt{x}}$ y $f_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ para $x \ge 4$.

Problema 4.3.5 Sea A el conjunto limitado por las curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de A y el volumen de revolución obtenido al girar A alrededor del eje horizontal.

Problema 4.3.6 Calcula los volúmenes generados al girar los siguientes conjuntos alrededor del eje X:

I) $0 \le y \le 1 + \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 2\pi$;

II) $x^2 + (y-2a)^2 \le a^2$ (la figura es un toro);

III) $R^2 \le x^2 + y^2 \le 4R^2$ (un anillo esférico);

IV) superficie encerrada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x$, con $x \in [0, \pi]$.

Problema 4.3.7

I) Calcula los volúmenes generados al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ alrededor de los dos ejes.

II) Calcula el volumen del sólido de base la elipse anterior cuyas secciones perpendiculares al eje OX son triángulos isósceles de altura 2.

Problema 4.3.8

I) Calcula el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

II) Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$.

III) Comprueba el resultado del problema anterior (apartado i)) como un caso particular.

Indicación: observa que al cortar el elipsoide por planos paralelos a los coordenados se obtienen elipses.

Problema 4.3.9 Calcula la longitud de los siguientes tramos de curva:

I) catenaria: $y = \mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$

II) cicloide: $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t),\ y(t) = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

III) hipocicloide o astroide: $x^{2/3} + y^{2/3} = 4;$

IV) tractriz: $y = a \log\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a/2 \leq x \leq a.$

V) cardioide: $r = 1 + \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$