

EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 1: Funciones de variable real

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García



Índice

1. Funciones de variable real.	1
1.1. La recta real.	1
1.2. Funciones elementales.	3
1.3. Límites de funciones.	6
1.4. Continuidad	7

1. Funciones de variable real.

1.1. La recta real.

Problema 1.1.1

I) Sean los números reales $0 < a < b$, $k > 0$. Demuestra las desigualdades

$$1) \quad a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b, \quad 2) \quad \frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

II) Demuestra que $|a+b| = |a| + |b| \iff ab \geq 0$.

III) Demuestra la desigualdad $|a-b| \geq ||a| - |b||$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

IV) Demuestra que:

$$a) \quad \max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad b) \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

V) Expresa con una sola fórmula la función $f(x) = (x)_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Problema 1.1.2 Descompón las expresiones en n en producto de factores para demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

I) $n^2 - n$ es par;

II) $n^3 - n$ es múltiplo de 6;

III) $n^2 - 1$ es múltiplo de 8 si n es impar.

Problema 1.1.3 Utiliza el método de inducción para demostrar las siguientes fórmulas:

$$i) \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}; \quad ii) \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad iii) \quad \sum_{j=0}^n r^j = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Problema 1.1.4

I) Demuestra por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $10^n - 1$ es múltiplo de 9.

II) Demuestra que un número es múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo

de 9; es decir, $n = \sum_{j=0}^N a_j 10^j$ es múltiplo de 9 si y sólo si $\sum_{j=0}^N a_j$ es múltiplo de 9.

Problema 1.1.5 Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ no es un cuadrado perfecto entonces $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Indicación: escribe $n = z^2 r$, donde r no contiene ningún factor cuadrado.

Problema 1.1.6 Encuentra el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ que verifican:

$$i) \quad A = \{|x-3| \leq 8\},$$

$$ii) \quad B = \{0 < |x-2| < 1/2\},$$

$$iii) \quad C = \{x^2 - 5x + 6 \geq 0\},$$

$$iv) \quad D = \{x^3(x+3)(x-5) < 0\},$$

$$v) \quad E = \left\{ \frac{2x+8}{x^2+8x+7} > 0 \right\},$$

$$vi) \quad F = \left\{ \frac{4}{x} < x \right\},$$

$$vii) \quad G = \{4x < 2x+1 \leq 3x+2\},$$

$$viii) \quad H = \{|x^2 - 2x| < 1\},$$

$$ix) \quad I = \{|x-1||x+2| = 10\},$$

$$x) \quad J = \{|x-1| + |x-2| > 1\}.$$

Problema 1.1.7 Dados dos números reales $a < b$, definimos, para cada $t \in \mathbb{R}$ el número $x(t) = (1-t)a + tb$. Describe los siguientes conjuntos de números:

- i) $A = \{x(t) : t = 0, 1, 1/2\}$, ii) $B = \{x(t) : t \in (0, 1)\}$,
 iii) $C = \{x(t) : t < 0\}$, iv) $D = \{x(t) : t > 1\}$.

Problema 1.1.8 Halla el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (caso de existir), de los siguientes conjuntos de números reales:

- I) $A = \{-1\} \cup [2, 3)$;
 II) $B = \{3\} \cup \{2\} \cup \{-1\} \cup [0, 1]$;
 III) $C = \{x = 2 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$;
 IV) $D = \{x = (n^2 + 1)/n : n \in \mathbb{N}\}$;
 V) $E = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 \leq 0\}$;
 VI) $F = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$, con $a < b < c < d$ fijados;
 VII) $G = \{x = 2^{-p} + 5^{-q} : p, q \in \mathbb{N}\}$;
 VIII) $H = \{x = (-1)^n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}\}$.

Problema 1.1.9 Representa en el plano $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:

- i) $A = \{|x - y| < 1\}$, ii) $B = \{x^2 < y < x\}$,
 iii) $C = \{x + y \in \mathbb{Z}\}$, iv) $D = \{|2x| + |y| = 1\}$,
 v) $E = \{(x-1)^2 + (y+2)^2 < 4\}$, vi) $F = \{|1-x| = |y-1|\}$,
 vii) $G = \{4x^2 + y^2 \leq 4, xy \geq 0\}$, viii) $H = \{1 \leq x^2 + y^2 < 9, y \geq 0\}$.

Problema 1.1.10 Demuestra que las rectas $y = mx + b$, $y = nx + c$ son ortogonales si $mn = -1$.

Problema 1.1.11 Sea el triángulo en el plano formado por los puntos $(a, 0)$, $(-b, 0)$ y $(0, c)$, con $a, b, c > 0$.

- I) Calcula el punto de corte de las tres alturas.
 II) Calcula el punto de corte de las tres medianas.
 III) ¿Cuándo coinciden estos dos puntos?

Problema 1.1.12

- I) Sea la parábola $G = \{y = x^2\}$, y el punto $P = (0, 1/4)$. Halla $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que los puntos de G equidistan de P y de la recta horizontal $L = \{y = \lambda\}$.
 II) Inversamente, el conjunto G tal que sus puntos equidistan de un punto $P = (a, b)$ y de una recta $L = \{y = \lambda\}$, es la parábola $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Halla α, β, γ .

Problema 1.1.13

- I) Halla el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $F_1 = (c, 0)$ y $F_2 = (-c, 0)$ es $2a$, ($a > c$).
 II) La misma cuestión sustituyendo suma por diferencia (con $a < c$).

1.2. Funciones elementales.**Problema 1.2.1** Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
i) & f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \\
ii) & f(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}, \\
iii) & f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{1 - x^2}}, \\
iv) & f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}, \\
v) & f(x) = \frac{1}{1 - \log x}, \\
vi) & f(x) = \log(x - x^2), \\
vii) & f(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{\log x}, \\
viii) & f(x) = \arcsen(\log x).
\end{array}$$

Problema 1.2.2

- I) Si f y g son dos funciones impares, ¿cómo son $f + g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$?
 II) ¿Y si f es par y g impar?

Problema 1.2.3 Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
i) & f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \\
ii) & f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}, \\
iii) & f(x) = \frac{\sen x}{x}, \\
iv) & f(x) = (\cos x^3)(\sen x^2)e^{-x^4}, \\
v) & f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}, \\
vi) & f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} - x).
\end{array}$$

Indicación: vi) es impar.**Problema 1.2.4** ¿Para qué números $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se tiene que la función $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ satisface $f \circ f = I$ (la identidad) en el dominio de f ?**Problema 1.2.5** Comprueba que la función $f(x) = \frac{x + 3}{1 + 2x}$ es biyectiva definida de $\mathbb{R} - \{-1/2\}$ en $\mathbb{R} - \{1/2\}$ y calcula su inversa.**Problema 1.2.6**

- I) Estudia cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, hallando su inversa en caso de que lo sean, o un ejemplo de dos puntos con la misma imagen en caso de que no lo sean.

$$\begin{array}{ll}
a) & f(x) = 7x - 4, \\
b) & f(x) = \sen(7x - 4), \\
c) & f(x) = (x + 1)^3 + 2, \\
d) & f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}, \\
e) & f(x) = x^2 - 3x + 2, \\
f) & f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \\
g) & f(x) = e^{-x}, \\
h) & f(x) = \log(x + 1).
\end{array}$$

- II) Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sí es inyectiva en $(3/2, \infty)$.
- III) Demuestra que la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sí es inyectiva en $(1, \infty)$ y encuentra $f^{-1}(\sqrt{2}/3)$.
- IV) Estudia si las funciones anteriores son sobreyectivas y si son biyectivas definidas en su dominio $D(f)$ en $\mathbb{R}$.

Problema 1.2.7 Demuestra que $a \sin x + b \cos x$ se puede escribir como $A \sin(x + B)$, y encuentra A y B .

Problema 1.2.8 Calcula

- i) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$
- ii) $\arctan 2 + \arctan 3,$
- iii) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$

Indicación: utiliza la fórmula de la tangente de la suma y estudia los signos.

Problema 1.2.9 Simplifica las siguientes expresiones

- i) $f(x) = \sin(\arccos x),$ ii) $f(x) = \sin(2 \arcsin x),$
- iii) $f(x) = \tan(\arccos x),$ iv) $f(x) = \sin(2 \arctan x),$
- v) $f(x) = \cos(2 \arctan x),$ vi) $f(x) = e^{4 \log x}.$

Problema 1.2.10 Resuelve el sistema de ecuaciones, para $x, y > 0$,

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ y = 3x. \end{cases}$$

Problema 1.2.11 Describe la función g en términos de f en los siguientes casos ($c \in \mathbb{R}$ es una constante). Dibújalas para $f(x) = x^2$ y $f(x) = \sin x$.

- i) $g(x) = f(x) + c,$ ii) $g(x) = f(x + c),$
- iii) $g(x) = f(cx),$ iv) $g(x) = f(1/x),$
- v) $g(x) = f(|x|),$ vi) $g(x) = |f(x)|,$
- vii) $g(x) = 1/f(x),$ viii) $g(x) = (f(x))_+ = \max\{f(x), 0\}.$

Problema 1.2.12 Esboza, con los mínimos cálculos posibles, la gráfica de las siguientes fun-

ciones:

$$\begin{array}{ll}
 i) & f(x) = (x+2)^2 - 1, \\
 ii) & f(x) = \sqrt{4-x}, \\
 iii) & f(x) = x^2 + 1/x, \\
 iv) & f(x) = 1/(1+x^2), \\
 v) & f(x) = \min\{x, x^2\}, \\
 vi) & f(x) = |e^x - 1|, \\
 vii) & f(x) = \sqrt{x - [x]}, \\
 viii) & f(x) = 1/[1/x], \\
 ix) & f(x) = |x^2 - 1|, \\
 x) & f(x) = 1 - e^{-x}, \\
 xi) & f(x) = \log(x^2 - 1), \\
 xii) & f(x) = x \operatorname{sen}(1/x).
 \end{array}$$

Indicación: $[x] = n$ denota la parte entera de x , es decir, el mayor entero $n \leq x$.

Problema 1.2.13 Definimos las funciones hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

I) Estudia su simetría.

II) Demuestra las fórmulas

$$a) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad b) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x.$$

III) Simplifica la función $f(x) = \sinh^{-1} x$.

IV) Esboza la gráfica de las funciones $\sinh x$ y $\cosh x$.

Problema 1.2.14 Esboza las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

$$\begin{array}{ll}
 i) & r = 1, \quad \theta \in [0, \pi], \\
 ii) & \theta = 3\pi/4, \quad r \geq 2, \\
 iii) & r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \\
 iv) & r = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\
 v) & r = e^\theta, \quad \theta \in [-2\pi, 2\pi], \\
 vi) & r = \sec \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2], \\
 vii) & r = 1 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\
 viii) & r = (\cos 2\theta)_+, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\
 ix) & r = |\cos 2\theta|, \quad \theta \in [0, 2\pi], \\
 x) & r = (\operatorname{sen} 3\theta)_+, \quad \theta \in [0, 2\pi/3].
 \end{array}$$

Problema 1.2.15 Esboza los siguientes conjuntos en el plano dados en coordenadas polares:

$$\begin{array}{ll}
 i) & A = \{1 < r < 4\}, \\
 ii) & B = \{\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3\}, \\
 iii) & C = \{r \leq \theta, 0 \leq \theta \leq 3\pi/2\}, \\
 iv) & D = \{r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.
 \end{array}$$

1.3. Límites de funciones.

Problema 1.3.1 Utilizando la definición ε - δ de límite prueba que:

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{x \rightarrow 2} x^2 &= 4, & ii) \quad \lim_{x \rightarrow 3} (5x - 1) &\neq 16, \\ iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \sin^2 x} &= 0, & iv) \quad \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} &= 3. \end{aligned}$$

Problema 1.3.2 Calcula los siguientes límites simplificando los factores comunes que puedan aparecer:

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, & \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \\ iii) \quad \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}, & \quad iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}, \\ v) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1-h)^3} - 1}{h}, & \quad vi) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2}{x - 1} \right). \end{aligned}$$

Problema 1.3.3 Utilizando los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, calcula los siguientes límites:

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x^3)^2}{x^6}, & \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \\ iii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2 + 2x}{x + x^2}, & \quad iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + a) - \sin a}{x}, \\ v) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x}, & \quad vi) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}, \\ vii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - 2x)}{\sin x}, & \quad viii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{2/x}, \\ ix) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}, & \quad x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \\ xi) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{\sin x - x}}, & \quad xii) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}, \\ xiii) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{(x - \pi)^2}, & \quad xiv) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}. \end{aligned}$$

Indicación: será preciso utilizar algún cambio de variables y el límite de la composición.

Problema 1.3.4 Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll}
 i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x - 7}{7x^2 - \sqrt{2x^6 + x^5}}, & ii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x^3}{5x + 6}, \\
 iii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}, & iv) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x), \\
 v) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x - 1}, & vi) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1}, \\
 vii) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{\sqrt{4x^2 + 1}}, & viii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{4x^2 + 1}}.
 \end{array}$$

Problema 1.3.5 Calcula los límites laterales:

$$\begin{array}{ll}
 i) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{t}\right)^{[t]}, & ii) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{t}\right)^{[t]}, \\
 iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{1/t}, & iv) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} e^{1/t}, \\
 iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{1/t}}{1 + e^{1/t}}, & iv) \quad \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{1/t}}{1 + e^{1/t}}, \\
 iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 7}{2x - 6}\right)^{\sqrt{4x^2 + x - 3}}, & iv) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 7}{2x - 6}\right)^{\sqrt{4x^2 + x - 3}}.
 \end{array}$$

Problema 1.3.6

I) Determina la relación entre a y b para que

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{a/(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{b/x^2}.$$

II) Si $f(x) = \log(\log x)$ y $\alpha > 0$, halla $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(\alpha x))$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(x^\alpha))$.

Problema 1.3.7

I) Demuestra que si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \operatorname{sen} 1/x = 0$.

II) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \operatorname{sen} 1/x}$.

1.4. Continuidad

Problema 1.4.1

I) Prueba que si f es continua en un punto a y g lo es en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a .

II) Demuestra que si f es continua, entonces $|f|$ también lo es. ¿Es cierto el recíproco?

III) ¿Qué puede decirse de una función continua que toma valores sólo en $\mathbb{Q}$?

Problema 1.4.2 Halla $\lambda \in \mathbb{R}$ para que la función $b(x) = \frac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}$ sea continua en:

- i) $\mathbb{R}$, ii) $[0, 1]$.

Problema 1.4.3 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- I) $f(x) = \frac{e^{-5x} + \cos x}{x^2 - 8x + 12}$;
 II) $g(x) = e^{3/x} + x^3 - 9$;
 III) $h(x) = x^3 \operatorname{tg}(3x + 2)$;
 IV) $j(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;
 V) $k(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x)^3$;
 VI) $m(x) = (x - 5) \log(8x - 3)$;

Problema 1.4.4 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

- I) $f(x) = x - [x]$;
 II) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0; \end{cases}$
 III) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{1/x} & \text{si } x < 0; \end{cases}$
 IV) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Problema 1.4.5 Demuestra los siguientes teoremas de punto fijo:

- I) Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.
 II) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$.
 Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.