uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 1: Funciones de variable real

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

1. Funciones de variable real.

1.1. La recta real.

Problema 1.1.1 *i)* Cálculo directo; por ejemplo

$$a < \sqrt{ab} \iff a^2 < ab \iff a < b.$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \iff 4ab < a^2 + b^2 + 2ab \iff 0 < a^2 + b^2 - 2ab \iff 0 < (a-b)^2 \iff a \neq b.$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k} \iff a(b+k) < b(a+k) \iff ak < bk \iff a < b.$$

Hemos usado la hipótesis sobre los signos de a, b y k; algunas de las operaciones anteriores son falsas con otro signo.
ii)

$$|a+b| = |a| + |b| \iff a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2|a|\,|b| \iff ab = |ab| \iff ab \geq 0.$$

iii) Por la desigualdad triangular, $|a| = |a - b + b| \leq |a-b| + |b|$, por lo que $|a-b| \geq |a| - |b|$; por la misma razón, $|a-b| \geq |b| - |a|$.

iv) $\displaystyle \frac{x+y+|x-y|}{2} = \begin{cases} \dfrac{x+y+x-y}{2} & \text{si} \quad x \geq y \\ \dfrac{x+y-x+y}{2} & \text{si} \quad x \leq y. \end{cases}$ *v)* $\displaystyle f(x) = \max\{x, 0\} = \frac{x+|x|}{2}.$

Problema 1.1.2 *i)* $n^2 - n = n(n-1)$. Uno de los dos factores es par.
ii) $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$. Al menos uno de los factores es par, y uno es múltiplo de tres.
iii) $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$. Los dos factores son pares, pero además, uno es múltiplo de 4.

Problema 1.1.3 *i)* $\displaystyle \sum_{j=1}^{n+1} j = n + 1 + \sum_{j=1}^{n} j = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$

ii) $\displaystyle \sum_{j=1}^{n+1} j^2 = (n+1)^2 + \sum_{j=1}^{n} j^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$

iii) $\displaystyle \sum_{j=0}^{n+1} r^j = r^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} r^j = r^{n+1} + \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{r^{n+2}-1}{r-1}.$

Problema 1.1.4 *i)* Si $10^n - 1 = 9k$, entonces $10^{n+1} - 1 = 10^{n+1} - 10^n + 10^n - 1 = 9(10^n + k)$.
ii) Si $\displaystyle \sum_{j=0}^{N} a_j = 9m$, entonces $\displaystyle n = \sum_{j=0}^{N} a_j 10^j = 9m + \sum_{j=1}^{N} (10^j - 1) a_j = 9(m + \sum_{j=1}^{N} m_j a_j)$, pues $10^j - 1 = 9m_j$ por el apartado anterior.

Problema 1.1.5 Sea $n = z^2 r$, donde r no contiene ningún factor cuadrado. Si existen $p,\ q \in \mathbb{Z}$, con m.c.d$(p,q) = 1$, tales que $p^2/q^2 = n$, se tiene $p^2 = z^2 q^2 r$, que implica $p = kr$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así, $k^2 r^2 = z^2 q^2 r$, que implica $q = mr$ para algún $m \in \mathbb{Z}$. Finalmente m.c.d$(p,q) \geq r$.

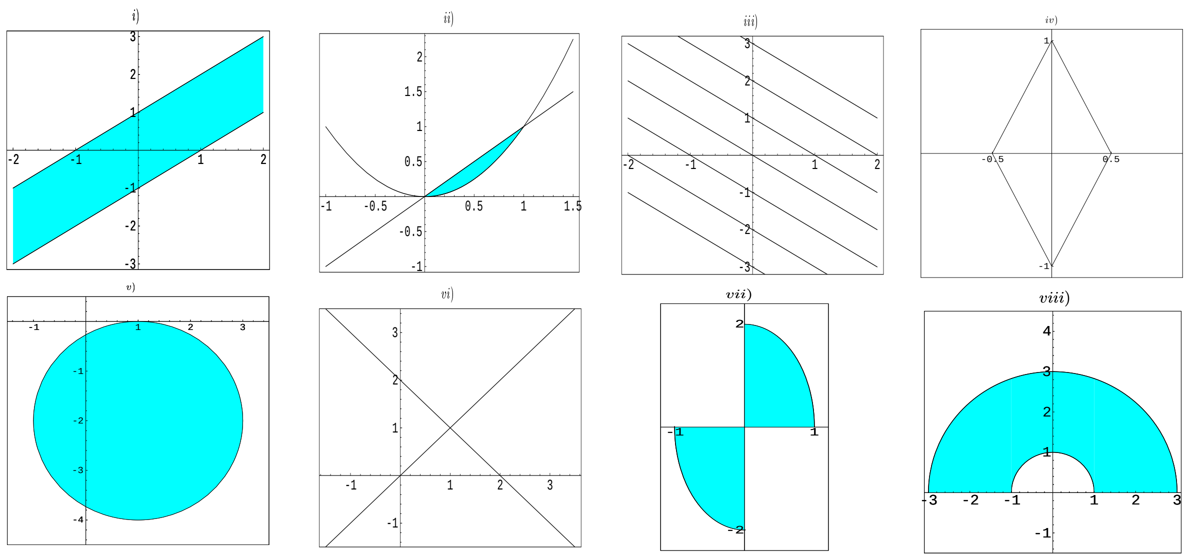
Problema 1.1.6 *i)* $A = \{-8 \leq x - 3 \leq 8\} = [-5, 11]$. *ii)* $B = (3/2, 2) \cup (2, 5/2)$.
iii) $C = \{\, (x-2)(x-3) \geq 0 \,\} = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$. *iv)* $D = (-\infty, -3) \cup (0, 5)$.
v) $E = \{\, \dfrac{x+4}{(x+1)(x+7)} > 0 \,\} = (-7, -4) \cup (-1, \infty)$.
vi) $F = \{\, x^2 > 4,\ x > 0 \,\} \cup \{\, x^2 < 4,\ x < 0 \,\} = (-2, 0) \cup (2, \infty)$.
vii) $G = [-1, 1/2)$. *viii)* $H = (1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$. *ix)* $I = \{\, 3,\ -4 \,\}$.
x)

$$\begin{aligned} J &= \{x - 1 + x - 2 > 1,\ x \geq 1,\ x \geq 2\} \cup \{x - 1 + 2 - x > 1,\ x \geq 1,\ x \leq 2\} \\ &\quad \cup \{1 - x + x - 2 > 1,\ x \leq 1,\ x \geq 2\} \cup \{1 - x + 2 - x > 1,\ x \leq 1,\ x \leq 2\} \\ &= \{x > 2\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (2, \infty). \end{aligned}$$

Problema 1.1.7 *i)* $A = \{\, a, \dfrac{a+b}{2}, b\}$. *ii)* $B = (a,b)$. *iii)* $C = (-\infty, a)$. *iv)* $D = (b, \infty)$.

Problema 1.1.8
i) $\sup A = 3$, $\text{ínf}\, A = \text{mín}\, A = -1$, no hay máximo.
ii) $\sup B = \text{máx}\, B = 3$, $\text{ínf}\, B = \text{mín}\, B = -1$.
iii) $\sup C = \text{máx}\, C = 3$, $\text{ínf}\, C = 2$, no hay mínimo.
iv) $\text{ínf}\, D = \text{mín}\, D = 2$, no hay máximo ni supremo.
v) $\sup E = \text{máx}\, E = 3$, $\text{ínf}\, E = \text{mín}\, E = 1/3$.
vi) $\sup F = d$, $\text{ínf}\, F = a$, no hay máximo ni mínimo.
vii) $\sup G = \text{máx}\, G = 7/10$, $\text{ínf}\, G = 0$, no hay mínimo.
viii) $\sup H = \text{máx}\, H = 2$, $\text{ínf}\, H = -1$, no hay mínimo.

Problema 1.1.9 *i)* El interior de una banda. *ii)* La región acotada entre una parábola y una recta. *iii)* Infinitas rectas paralelas. *iv)* Un rombo. *v)* El interior de un círculo. *vi)* Dos rectas secantes. *vii)* El interior de dos cuartos de elipse, incluyendo el borde. *viii)* El interior de medio anillo, incluyendo el borde inferior y la semicircunferencia menor.



Problema 1.1.10 Los vectores directores son $(1, m)$ y $(1, n)$. Son ortogonales si su producto escalar es nulo, $1 + mn = 0$.

Problema 1.1.11 *i)* $P_1 = \{x = 0\} \cap \{y = \dfrac{a}{c}(x+b)\} = (0, \dfrac{ab}{c})$.
ii) $P_2 = \{y = c - \dfrac{2c}{a-b}x\} \cap \{y = \dfrac{c}{a+2b}(x+b)\} = (\dfrac{a-b}{3}, \dfrac{c}{3})$. *iii)* $a = b$, $c = a\sqrt{3}$, es decir, el triángulo es equilátero.

Problema 1.1.12 *i)* $x^2 + (x^2 - 1/4)^2 = (x^2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = -1/4$.
ii) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (y-\lambda)^2 \Rightarrow y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ con $\alpha = \dfrac{1}{2(b-\lambda)}$, $\beta = \dfrac{a}{\lambda - b}$, $\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - \lambda^2}{2(b-\lambda)}$.

Problema 1.1.13 *i)* $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, una elipse.
ii) $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, una hipérbola.

1.2. Funciones elementales.

Problema 1.2.1 *i)* $\mathbb{R}-\{2,3\}$. *ii)* $\{-1,1\}$. *iii)* $[-1,1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},1]$. *iv)* $\{\sqrt{3}\le|x|\le 2\}$. *v)* $(0,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},\infty)$. *vi)* $(0,1)$. *vii)* $(0,1)\cup(1,5]$. *viii)* $[1/\mathrm{e},\mathrm{e}]$.

Problema 1.2.2 *i)* $f+g$ es impar, fg es par y $f\circ g$ es impar. Por ejemplo, para la composición,

$$f\circ g(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-f\circ g(x).$$

ii) $f+g$ no es nada, fg es impar y $f\circ g$ es par. Por ejemplo, para el producto, $f(-x)g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)g(x)$.

Problema 1.2.3 Pares *iii)* y *iv)*; impares *i)* y *vi)*. Para la última observa que

$$\log(\sqrt{x^2+1}+x)=\log\Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\Big)=-\log(\sqrt{x^2+1}-x).$$

Problema 1.2.4 $\dfrac{a\,\frac{ax+b}{cx+d}+b}{c\,\frac{ax+b}{cx+d}+d}=x\Rightarrow a=-d$ con $a^2+bc\neq 0$ (pues si no el denominador es cero, o lo que es lo mismo, la función es constante y resulta imposible la conclusión), ó $a=d$, $b=c=0$.

Problema 1.2.5 Es inyectiva pues $\dfrac{x_1+3}{1+2x_1}=\dfrac{x_2+3}{1+2x_2}$ implica $x_1+2x_1x_2+3+6x_2=x_2+2x_1x_2+3+6x_1$, es decir, $x_1=x_2$. La imagen es $\mathbb{R}-\{1/2\}$ pues $f^{-1}(y)=\dfrac{y-3}{1-2y}$ está definida para todo $y\neq 1/2$.

Problema 1.2.6 *i)* *a)* Inyectiva, pues $7x_1-4=7x_2-4\Rightarrow x_1=x_2$; la inversa es $f^{-1}(y)=\dfrac{y+4}{7}$. *b)* No inyectiva, $f(x)=f(x+2\pi/7)$. *c)* Inyectiva, $f^{-1}(y)=(y-2)^{1/3}-1$. *d)* Inyectiva, $f^{-1}(y)=\dfrac{y-2}{1-y}$. *e)* No inyectiva, $f(0)=f(3)$. *f)* No inyectiva, $f(3)=f(1/3)$. *g)* Inyectiva, $f^{-1}(y)=-\log y$. *h)* Inyectiva, $f^{-1}(y)=\mathrm{e}^y-1$.
ii) $f(x_1)=f(x_2)$ implica $x_1+x_2=3$, que es imposible si $x_1,\,x_2>3/2$.
iii) $f(x_1)=f(x_2)$ implica $x_1x_2=1$, que es imposible si $x_1,\,x_2>1$. $f^{-1}(\sqrt{2}/3)=\sqrt{2}$.
iii) *a)* Biyectiva. *b)* No sobreyectiva: $Imagen(f)=[-1,1]$. *c)* Biyectiva. *d)* No sobreyectiva: $Imagen(f)=\mathbb{R}-\{1\}$. *e)* No sobreyectiva: $Imagen(f)=[-1/4,\infty)$. *f)* No sobreyectiva: $Imagen(f)=[-1/2,1/2]$. *g)* No sobreyectiva: $Imagen(f)=(0,\infty)$. *h)* Biyectiva.

Problema 1.2.7 $A(\operatorname{sen}x\cos B+\operatorname{sen}B\cos x)=a\operatorname{sen}x+b\cos x\Rightarrow A\cos B=a$, $A\operatorname{sen}B=b$ $\Rightarrow A=\sqrt{a^2+b^2}$, $B=\operatorname{arc\,tg}(b/a)$.

Problema 1.2.8 *i)* $\operatorname{tg}x=\dfrac{\frac12+\frac13}{1-\frac12\cdot\frac13}=1$, así que $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$. Como $\operatorname{arc\,tg}\dfrac12$ y $\operatorname{arc\,tg}\dfrac13$ pertenecen ambos a $(0,\dfrac{\pi}{4})$, se tiene que $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, por lo que $x=\dfrac{\pi}{4}$.
ii) $\operatorname{tg}x=\dfrac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1\Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;

$\operatorname{arc\,tg}2,\ \operatorname{arc\,tg}3\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})\Rightarrow x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$.

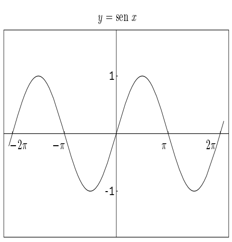
iii) $\operatorname{tg}x=\dfrac{\frac12+\frac{1/5+1/8}{1-1/40}}{1-\frac12\cdot\frac{1/5+1/8}{1-1/40}}=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$;

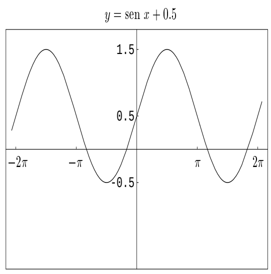
$\operatorname{arc\,tg}\dfrac12,\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac15,\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac18\in(0,\dfrac{\pi}{4})\Rightarrow x\in(0,\dfrac{3\pi}{4})\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}$.

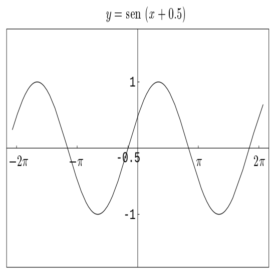
Problema 1.2.9 Hay que tener cuidado con el signo.
i) $\operatorname{arc\,cos} x \in [0,\pi] \Rightarrow \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x) = \sqrt{1-x^2}$.
ii) $\operatorname{arc\,sen} x \in [-\pi/2,\pi/2] \Rightarrow \cos(\operatorname{arc\,sen} x) \geq 0 \Rightarrow$
$\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen} x) = 2\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
iii) Por el primer apartado, $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,cos} x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos} x)}{\cos(\operatorname{arc\,cos} x)} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
iv) $\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,tg} x) = 2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\cos^2(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
v) $\cos^2(2\operatorname{arc\,tg} x) = 1 - \left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2 = \left(\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\right)^2$; para saber el signo al tomar la raíz, observamos que $|x| \leq 1 \Rightarrow 2\operatorname{arc\,tg} x \in [-\pi/2,\pi/2] \Rightarrow \cos(2\operatorname{arc\,tg} x) \geq 0 \Rightarrow \cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; análogamente $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x) \leq 0$ para $|x| \geq 1$, es decir, $\cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ en todos los casos. *vi*) $e^{4\log x} = x^4$.

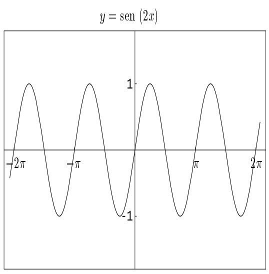
Problema 1.2.10 $x^{3x} = (3x)^x \Rightarrow 3x\log x = x\log(3x) \Rightarrow 2\log x = \log 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$, $y = 3\sqrt{3}$.

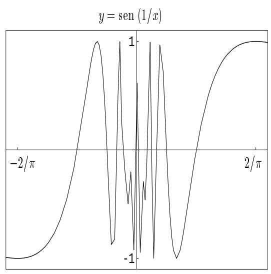
Problema 1.2.11 *i*) Traslación vertical. *ii*) Traslación horizontal. *iii*) Dilatación o contracción horizontal. *iv*) Inversión en el eje horizontal. *v*) Reemplazar la parte $\{x<0\}$ por la simétrica respecto del eje vertical de la parte $\{x>0\}$.

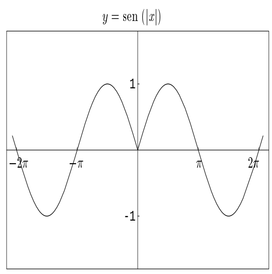






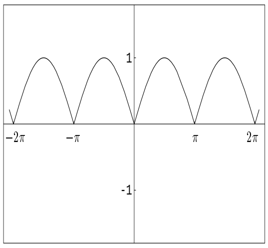




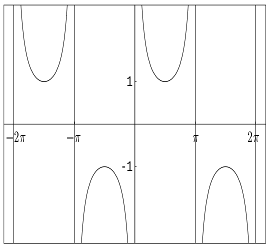


vi) Simetría respecto del eje horizontal de la parte negativa de la función. *vii*) Inversión en el eje vertical. *viii*) Parte positiva.

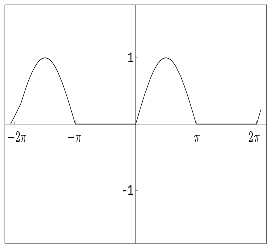
$y = |\text{sen } x|$



$y = 1/\text{sen } x$

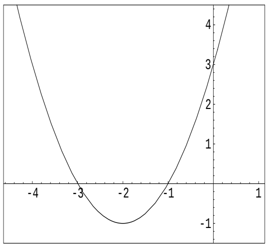


$y = \text{máx}\{\text{sen } x, 0\}$

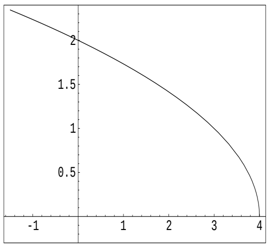


Problema 1.2.12

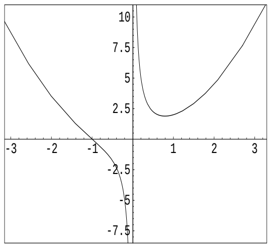
i)



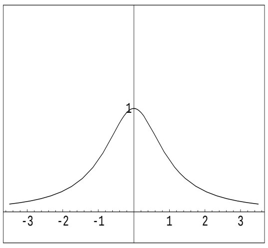
ii)



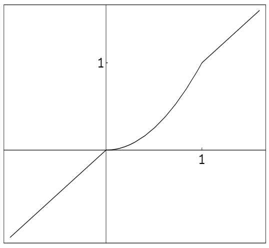
iii)



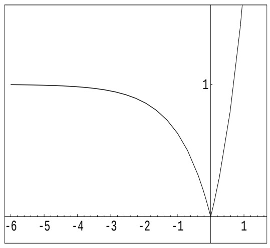
iv)



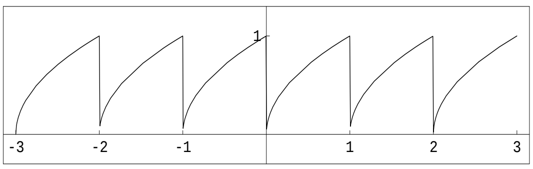
v)



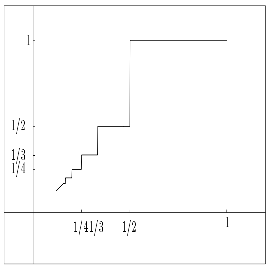
vi)



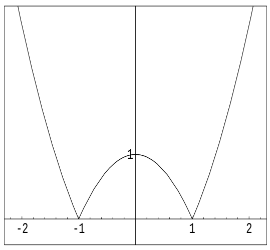
vii)



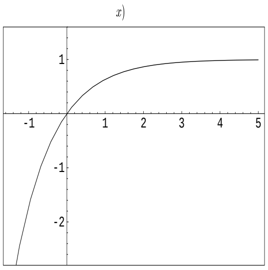
viii)



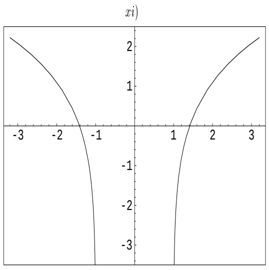
ix)



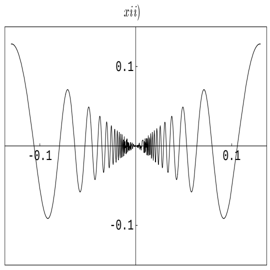
x)



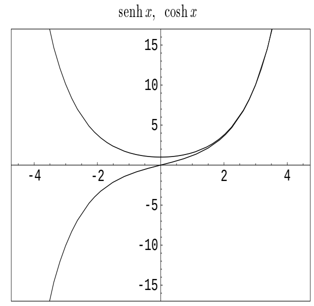
xi)



xii)



Problema 1.2.13



i) senh x es impar y cosh x es par; por ejemplo

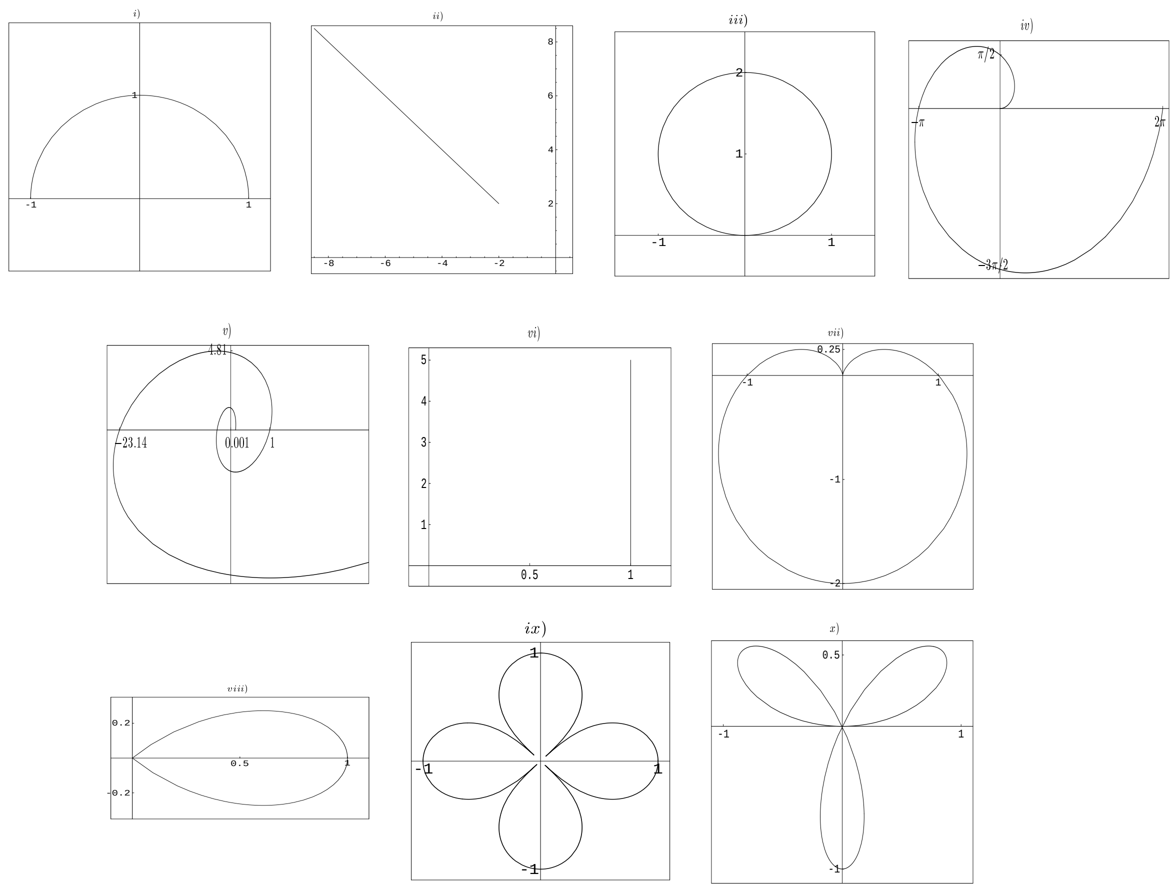
$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\operatorname{senh}(x).$$

ii) a) $\quad \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) = 1.$

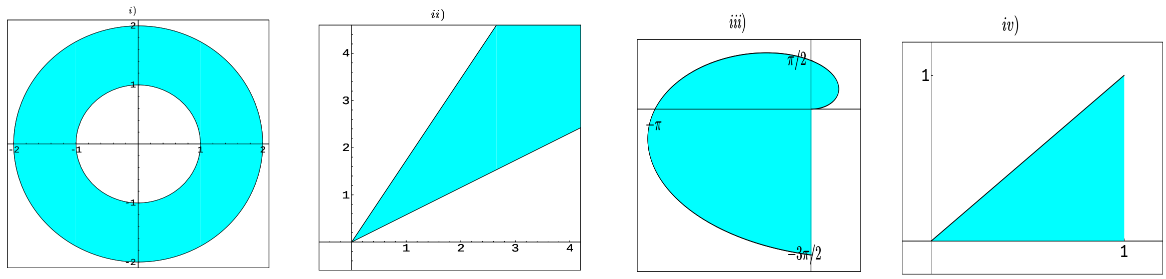
b) $\quad 2 \cdot \dfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}).$

iii) $x = \operatorname{senh}(y) = \dfrac{1}{2}(e^{y} - e^{-y})$; poniendo $t = e^{y} > 0$ se tiene $t - 1/t = 2x \Rightarrow t = x \pm \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \operatorname{senh}^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Problema 1.2.14 *i*) Media circunferencia. *ii*) Una semirrecta. *iii*) Una circunferencia. *iv*) Una espiral. *v*) Una espiral. *vi*) Una semirrecta. *vii*) Una cardioide. *viii*) Una lemniscata. *ix*) Una rosa de cuatro pétalos. *x*) Una rosa de tres pétalos.



Problema 1.2.15 *i*) El interior de un anillo. *ii*) Un sector angular. *iii*) El interior de un arco de espiral. *iv*) Un triángulo.



1.3. Límites de funciones.

Problema 1.3.1 *i*) Si $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ y $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|x+2| < 5$, por lo que

$$|x^2 - 4| = |x+2||x-2| < 5\delta \leq \varepsilon.$$

ii) Sea $\varepsilon = 1$. Dado cualquier $\delta > 0$, tomamos $x = 3 - \delta/2$ y se tiene $f(x) < 14$, por lo que

$$|x-3| = \delta/2 < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - 16| > 2 > \varepsilon.$$

iii) Basta tomar $\delta = \varepsilon$ pues $\left|\dfrac{x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right| \leq |x|$.
iv) Si $\delta = \min\{9, 3\varepsilon\}$ y $0 < |x-9| < \delta$, entonces $x > 0$ (y la raíz está definida) y $|\sqrt{x}+3| > 3$, por lo que

$$|\sqrt{x} - 3| = \frac{|x-9|}{|\sqrt{x}+3|} < \delta/3 \leq \varepsilon.$$

Problema 1.3.2 *i*) Por Ruffini,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}x^{n-k} = na^{n-1},$$

o por el binomio de Newton,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}h^{k-1} = na^{n-1}.$$

El factor común es $(x-a)$. *ii*) Multiplicando por el conjugado $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$, o escribiendo $y = \sqrt{x}$ y aplicando el límite anterior, $L = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. El factor común es $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$. *iii*) Poniendo $z = x^{1/6}$ se tiene

$$L = \lim_{z\to 2} \frac{z^3 - 8}{z^2 - 4} = \lim_{z\to 2} \frac{z^2 + 2z + 4}{z+2} = 3.$$

El factor común es $(x^{1/6} - 2)$. *iv*) Multiplicando por el conjugado, $L = 1/2$. El factor común es x^2. *v*) Por el binomio de Newton

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 3h + 3}{(1-h)^3} = 3.$$

El factor común es h. *vi*) $L = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1/2$. El factor común es $(\sqrt{x}-1)$.

Problema 1.3.3 *i)* $L = 4\Big(\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x^3}{2x^3}\Big)^2 = 4$. *ii)* Multiplicando por el conjugado, $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = 1/2$. *iii)* $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{\operatorname{sen} x^2}{x\cos x^2} + 2}{1+x} = 2$. *iv)* Desarrollando el seno de la suma, $L = \cos a$. *v)* Poniendo $y = \log(1+x)$, $L = \lim_{y\to 0} \dfrac{y}{\mathrm{e}^y - 1} = 1$. *vi)* Utilizando la forma exponencial y el límite anterior, $L = \mathrm{e}$. *vii)* Multiplicando y dividiendo por $-2x$, $L = -2$. *viii)* Escribiéndolo en forma exponencial y multiplicando y dividiendo el exponente por $\operatorname{sen} x$, $L = \mathrm{e}^2$, o también $L = \exp(\lim_{x\to 0} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x}) = \mathrm{e}^2$. *ix)* Sacando factor común $\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ y poniendo $y = x - \operatorname{sen} x$, $L = 1$. *x)* $L = 1/2$. *xi)* $L = \exp(\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x - x}(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} - 1)) = \mathrm{e}^{-1}$.
xii) $L = \exp(\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}) = \mathrm{e}^{-1/2}$. *xiii)* Poniendo $y = x - \pi$, $L = 1/8$.
xiv) $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x\log a} - 1 + 1 - \mathrm{e}^{x\log b}}{x} = \log(a/b)$.

Problema 1.3.4 *i)* Dividiendo numerador y denominador por x^3, $L = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. *ii)* Dividiendo numerador y denominador por x, $L = 1/5$, pues $\dfrac{\operatorname{sen} x^3}{x} \to 0$. *iii)* Dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x}$, $L = 1$. *iv)* Multiplicando por el conjugado, $L = 2$. *v)* $L = 1$.
vi) $L = 0$. *vii)* $L = 1/2$. *viii)* Observando que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ si $x < 0$, $L = -1/2$.

Problema 1.3.5 *i)* $L = 1$ pues $\left(\dfrac{1}{t}\right)^{[t]} = 1$ si $0 < t < 1$. *ii)* $L = 0$ pues $\left(\dfrac{1}{t}\right)^{[t]} = t$ si $-1 < t < 0$. *iii)* $L = \infty$. *iv)* $L = 0$. *v)* $L = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1-x}{1+x} = -1$. *vi)* $L = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1-x}{1+x} = 1$.
vii) $L = \exp\Big(\lim_{x\to\infty} \dfrac{13\sqrt{4x^2+x-3}}{2x-6}\Big) = \mathrm{e}^{13}$. *viii)* $L = \exp\Big(\lim_{x\to-\infty} \dfrac{13\sqrt{4x^2+x-3}}{2x-6}\Big) = \mathrm{e}^{-13}$.

Problema 1.3.6 *i)* $b = 2a$. *ii)* $\lim_{x\to\infty} \log\left(\dfrac{\log x}{\log\alpha + \log x}\right) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \log\left(\dfrac{\log x}{\alpha \log x}\right) = -\log\alpha$.

Problema 1.3.7 *i)* Por el lema del sandwich, pues $|f(x)\operatorname{sen} 1/x| \le |f(x)|$. *ii)* $L = 0$ por el lema del sandwich, pues $\left|\dfrac{x}{2+\operatorname{sen} 1/x}\right| \le |x|$.

1.4. Continuidad

Problema 1.4.1 *i)* Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - f(a)| < \delta_1$, se tiene $|g(x) - g(f(a))| < \varepsilon$, y a su vez existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_2$, se tiene $|f(x) - f(a)| < \delta_1$. Por tanto, si $|x - a| < \delta_2$, se tiene $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$.
ii) Aplicando el apartado anterior con la función $h(x) = |x|$, que es continua. El recíproco no es cierto, por ejemplo con la función $f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ge 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
iii) Si es continua y toma dos valores distintos debe tomar todos los valores intermedios. Pero entre dos números racionales existen infinitos números irracionales. Por tanto la función debe ser constante.

Problema 1.4.2 Si $\lambda = 0$ obviamente la función es continua, pues es constante $b(x) = 1$. Si $\lambda \ne 0$ las raíces del denominador son $1 \pm \sqrt{1 - 1/\lambda}$. *i)* Para que el denominador no se anule en $I\!\!R$ las raíces no deben ser reales, es decir el conjunto pedido es $D = \{0 \le \lambda < 1\}$. *ii)* Para que las raíces no pertenezcan al intervalo $[0,1]$, se debe tener $\lambda < 0$, que añadido al conjunto donde no hay raíces, se obtiene $D = \{\lambda < 1\}$.

Problema 1.4.3 Todas son continuas en su dominio. $D(f) = \mathbb{R} - \{2, 6\}$, $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, $D(h) = \mathbb{R} - \{3x + 2 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $D(j) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$, $D(k) = [-1, 1]$, $D(m) = (3/8, \infty)$.

Problema 1.4.4 *i*) Continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, pues en cada $a \in \mathbb{Z}$ tiene un salto unidad.
ii) Continua en $\mathbb{R}$, pues el límite en $a = 0$ es cero, y el resto de puntos no da problemas.
iii) Continua en $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k = 0,\ 1, \cdots\}$, pues los límites laterales en cero coinciden y son cero, y sólo hay qu tener en cuenta las discontinuidades positivas de la función tangente.
iv) Continua sólo en $a = 0$: si $a \neq 0$, la función oscila entre los valores $-a$ y a; si $a = 0$, el límite es cero por el lema del sandwich, $-|x| \leq f(x) \leq |x|$.

Problema 1.4.5 *i*) Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - x$ en $[0, 1]$: es continua y cambia de signo.
ii) Aplicar el teorema de Bolzano a la función $h(x) = f(x) - g(x)$ en $[a, b]$.