Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 2: Cálculo diferencial de una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

2. Cálculo diferencial de una variable.

2.1. Derivabilidad.

Problema 2.1.1 *i)* $h'(x) = \dfrac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}$.

ii) $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$.

iii) $h'(x) = \Big[f'(g(x))g'(x) + f(g(x))f'(x)\Big]e^{f(x)}$.

iv) $h'(x) = \dfrac{g'(x)\operatorname{sen}(f(x)) + g(x)f'(x)\cos(f(x))}{g(x)\operatorname{sen}(f(x))}$.

v) $h'(x) = (f(x))^{g(x)}[g'(x)\log(f(x)) + \dfrac{g(x)f'(x)}{f(x)}]$.

vi) $h'(x) = \dfrac{-[f'(x) + 2g(x)g'(x)]}{[\log(f(x) + g^2(x))]^2\,[f(x) + g^2(x)]}$.

Problema 2.1.2 *i)* Por ejemplo, para $1 \le |x| \le 2$, podemos tomar $f(x) = 2 - |x|$.
ii) Por ejemplo, para $1 \le x \le 2$, podemos tomar $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, y su simétrica par en $-2 \le x \le -1$. Otra más fácil sería $f(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x/2)$ en $1 \le |x| \le 2$.

Problema 2.1.3 Es inmediato. Por ejemplo

$$(\operatorname{senh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

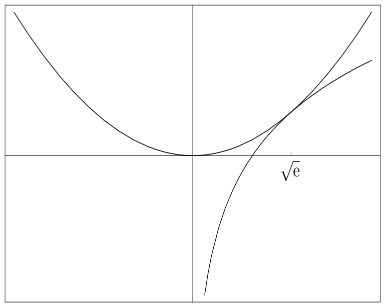
Problema 2.1.4 Es inmediato. Por ejemplo
ii) $xf' - f - f^2 - x^2 = x\Big(\operatorname{tg} x + x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\Big) - x\operatorname{tg} x - (x\operatorname{tg} x)^2 - x^2 = 0$.

Problema 2.1.5 La derivada de las tres funciones es cero en su dominio, por lo que deben ser constantes en cada intervalo del mismo. Por ejemplo

$$(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x})' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

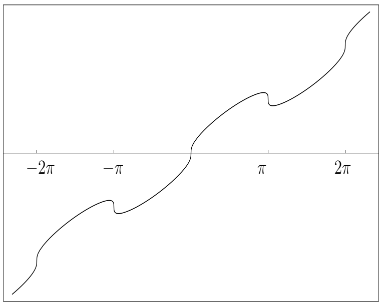
i) En $x = 1$ se tiene $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/2$ (también se podría tomar el límite para $x \to 0^+$, o para $x \to \infty$).
ii) En $x = 0$ se tiene $\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} 0 = \pi/4$.
iii) En $x = 1$ se tiene $2\operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,sen} 1 = \pi$.
Obsérvese, por ejemplo, que la primera función es impar, por lo que vale $-\dfrac{\pi}{2}$ para $x < 0$, y no es continua en $x = 0$.

Problema 2.1.6



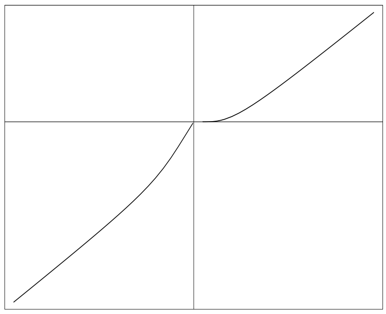
El sistema $\left\{\begin{array}{l} ax^2 = \log x \\ 2ax = 1/x \end{array}\right.$, da $x = \sqrt{\mathrm{e}}$, $a = 1/2\mathrm{e}$, y la recta tangente es $y = \dfrac{x}{\sqrt{\mathrm{e}}} - \dfrac{1}{2}$.

Problema 2.1.7



En los puntos donde se anula el seno, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

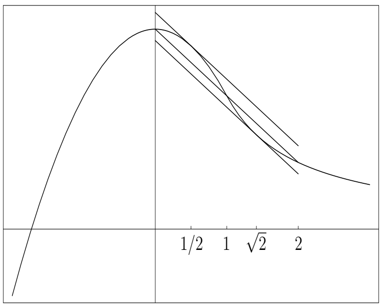
Problema 2.1.8



$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/h}} = 0$, $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/h}} = 1$.

El ángulo que forman las tangentes es entonces $\operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$.

Problema 2.1.9 *i*) Es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.



ii) Sí se puede aplicar el teorema del valor medio en $[0, 2]$:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = -1/2 \quad = f'(c) \\ \qquad = \left\{\begin{array}{ll} -c & \text{si } c < 1, \\ -1/c^2 & \text{si } c > 1. \end{array}\right.$$

Se tienen los dos valores $c = 1/2 < 1$ y $c = \sqrt{2} > 1$.

Problema 2.1.10 Es continua en $[-2, -1]$, que proviene de $\{x + 2 \geq 0\} \bigcap \{-1 \leq x + 2 \leq 1\}$, y derivable en $(-2, -1)$, pues $f'(x) = \dfrac{\arccos(x+2)}{2\sqrt{x+2}} - \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$, y los denominadores se anulan respectivamente en $x = -2$ y en $x = -1$.

Problema 2.1.11 f es derivable si y sólo si la ecuación $\alpha x^2 - x + 3 = 0$ no tiene dos raíces distintas; usando el discriminante la condición es $1 - 12\alpha \leq 0$, es decir $\alpha \geq \dfrac{1}{12}$.

Problema 2.1.12 f no es derivable en $x = 0$.

Problema 2.1.13 Si $c \leq 0$ la función se reduce a $f(x) = |x|^{-1}$, que no es continua en $x = 0$. Para $c > 0$, como f es simétrica basta estudiar $x = c$, donde se obtiene $a + bc^2 = \dfrac{1}{c}$, $2bc = -\dfrac{1}{c^2}$, que implica $a = \dfrac{3}{2c}$, $b = -\dfrac{1}{2c^3}$.

Problema 2.1.14 Sea $f(x) = x^{2/3}$. Aplicando el TVM en $[26, 27]$ se tiene

$$\frac{27^{2/3} - 26^{2/3}}{27 - 26} = \frac{2}{3} x^{-1/3}, \quad \text{para algún } x \in (26, 27) \subset (8, 27),$$

que implica $9 - 26^{2/3} \in \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$, y finalmente $\frac{78}{9} < 26^{2/3} < \frac{79}{9}$.
Si definimos ahora $g(x) = \log x$ y aplicamos el TVM en $[1, 3/2]$, obtenemos $\frac{1}{3} < \log(3/2) < \frac{1}{2}$.

Problema 2.1.15 Los límites de 1.3.2 son inmediatos por L'Hôpital; por ejemplo

$$iii) \quad L = \lim_{x\to 64} \frac{1/(2x^{1/2})}{1/(3x^{2/3})} = 3.$$

En algunos límites de 1.3.3 será necesario primero realizar alguna operación para escribirlo como un cociente. Por ejemplo en *vi*), *viii*), *xi*) y *xii*) escribirlo en forma exponencial. Si hay que aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez, procura simplificar al máximo antes de volver a derivar. Por ejemplo

$$i) \quad L = \lim_{x\to 0} \frac{12x^2 \operatorname{sen} 2x^3 \cos 2x^3}{6x^5} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x^3}{x^3} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 \cos 2x^3}{3x^2} = 4.$$

Problema 2.1.16 *i*) Derivando dos veces, $L = 1/2$. *ii*) $L = 1$.

$$iii) \quad L = \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x-1)}{1/\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/(x-1)}{-1/(x\log^2 x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\log^2 x}{1-x} = -\lim_{x\to 1} \frac{2\log x}{x} = 0.$$

iv) $L = \exp(\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}) = 1$. *v*) Pongamos $x + 1 = t$ para simplificar las derivadas:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t\to 1} \frac{t^t - t^2 + t - 1}{(t-1)^3} = \lim_{t\to 1} \frac{t^t(\log t + 1) - 2t + 1}{3(t-1)^2} = \lim_{t\to 1} \frac{t^t(\log t + 1)^2 + t^{t-1} - 2}{6(t-1)} \\ &= \frac{1}{6} \lim_{t\to 1} \Big(t^2(\log t + 1)^3 + 2t^{t-1}(\log t + 1) + t^{t-1}(\log t + (t-1)/t \Big) = 1/2. \end{aligned}$$

vi) Poniendo $t = 1/x$, $L = 1$.

Problema 2.1.17 *i*) $L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = 0$. *ii*) $L = 0$. *iii*) $L = 1/2$.
iv) $L = \exp(\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2\arcsin x}) = 1$. *v*) $L = \lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{\cos \pi x} = -\frac{5}{\pi}$. *vi*) $L = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 4$.
vii) $L = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - 4x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4x}} = -2$. *viii*) $L = \mathrm{e}$.

Problema 2.1.18 Como $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = 1$, se tiene $h(0) = \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0$. Así, $h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0$. Finalmente, $h''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x)}{x}$. Pero aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene $1 = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{h'(x)}{2x}$, por lo que $h''(0) = 2$.

Problema 2.1.19

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x}{2} = \frac{a^2 - 1}{2},$$

pero para que tenga sentido la segunda aplicación de la regla de L'Hôpital, se debe tener $\lim_{x\to 0}(a\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^x - 1) = 0$ (en caso contrario el límite no existe), que implica $a = 2$ y así $L = 3/2$.

Problema 2.1.20

$$\begin{aligned} i) \quad L &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/t} - \mathrm{e}}{t} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} \Big(\frac{1}{t(t+1)} - \frac{\log(1+t)}{t^2} \Big) = \\ &= \mathrm{e} \lim_{t\to 0} \frac{t - (1+t)\log(1+t)}{t^2} = \mathrm{e} \lim_{t\to 0} \frac{-\log(1+t)}{2t} = -\frac{\mathrm{e}}{2}. \\ ii) \quad L &= \lim_{x\to\infty} \Big[\frac{(1+1/x)^x}{\mathrm{e}} \Big]^x = \exp \Big[\lim_{x\to\infty} x \Big(\frac{(1+1/x)^x}{\mathrm{e}} - 1 \Big) \Big] = \\ &= \exp \Big[\frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{x\to\infty} x \Big((1+1/x)^x - \mathrm{e} \Big) \Big] = \exp \Big[\frac{1}{\mathrm{e}} (-\frac{\mathrm{e}}{2}) \Big] = \mathrm{e}^{-1/2}, \end{aligned}$$

utilizando el límite anterior.

$$\begin{aligned} iii) \quad L &= \exp \Big[\lim_{x\to\infty} x \Big(\frac{2^{1/x} + 18^{1/x}}{2} - 1 \Big) \Big] = \exp \Big[\lim_{t\to 0} \frac{2^t + 18^t - 2}{2t} \Big] \\ &= \exp \Big[\frac{\log 2 + \log 18}{2} \Big] = 6\,. \end{aligned}$$

De hecho es un caso particular del siguiente, $L = \sqrt{2\cdot 18} = 6$.

$$\begin{aligned} iv) \quad L &= \exp \Big[\lim_{x\to\infty} x \Big(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} a_i^{1/x} - 1 \Big) \Big] = \exp \left[\lim_{t\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{p} a_i^t - p}{pt} \right] \\ &= \exp \Big[\lim_{t\to 0} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} a_i^t \log a_i \Big] = \exp \Big[\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \log a_i \Big] = \Big(\prod_{i=1}^{p} a_i \Big)^{1/p}, \end{aligned}$$

la media geométrica de los términos a_i.

Problema 2.1.21 *i)* $f(0) = 0$ para que exista el límite dado.

ii) $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x^3)}{2x^3} = \frac{5}{2}$.

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{(f\circ f)(2x)}{f^{-1}(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(f(f(2x))}{f(2x)} \frac{f(2x)}{2x} \frac{3x}{f^{-1}(3x)} \frac{2}{3} = \frac{125}{12}$.

Problema 2.1.22 Primero observamos que si f es continua entonces f' también lo es, pues $f' = \mathrm{e}^f(2 + \operatorname{tg} x)$. Y la inversa g también es continua. Se tiene

$$f(0) = 1, \quad g(0) = f^{-1}(1) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 2\mathrm{e}^{f(0)} = 2e.$$

Además, como $f'(0) \neq 0$, se tiene que el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

Ahora, aplicando L'Hôpital:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \cos x\, \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{g'(x)} = 4\mathrm{e}.$$

Si no queremos aplicar L'Hôpital, se puede descomponer el límite,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{g(x)}.$$

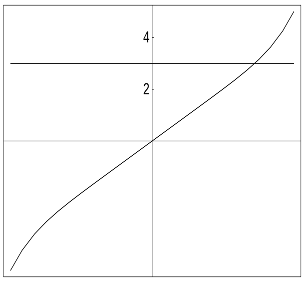
El primer límite es 2; para el segundo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{g(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - 1}{z} = f'(0) = 2\mathrm{e}.$$

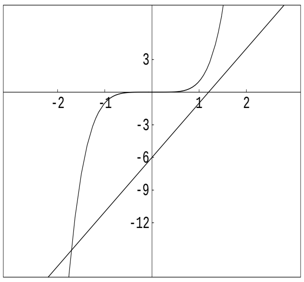
Problema 2.1.23 *i*) Aplicando el teorema de Rolle entre cada par de raíces de f vemos que f' debe tener como mínimo el número de raíces de f menos una.
ii) Aplicar el resultado anterior a las derivadas sucesivas de f.

Problema 2.1.24 Aplicando los teoremas de Bolzano y de Rolle, vemos que las ecuaciones *i*), *ii*), *iv*) y *v*) tienen una raíz, mientras que la ecuación *iii*) tiene dos y la ecuación *vi*) ninguna. Una vez sepamos dibujar gráficas de funciones, el problema será mucho más fácil de resolver.
i) $f(x) = x^7 + 4x - 3$ verifica $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, por lo que tiene al menos una raíz; si tuviese más de una, la derivada debería anularse en algún punto intermedio, pero $f'(x) = 7x^4 + 4 \neq 0$ para todo $x \in I\!\!R$.
ii) $f(x) = x^5 - 5x + 6$ verifica $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f(-1) > 0$, $f(1) > 0$, y $f'(x) = 5(x^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$; por tanto existe una raíz en $(-\infty, -1)$, ninguna en $[1, \infty)$, y tampoco puede haberla en $[-1, 1]$ pues implicaría que la derivada se anularía en algún punto intermedio.
iii) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 1$ verifica $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f(0) < 0$, $f(3) < 0$, y $f'(x) = 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ó $x = 3$; por tanto existe una raíz en $(-\infty, 0)$, otra en $(3, \infty)$ y ninguna en $[0, 3]$.

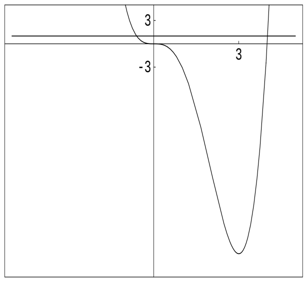
i)



ii)

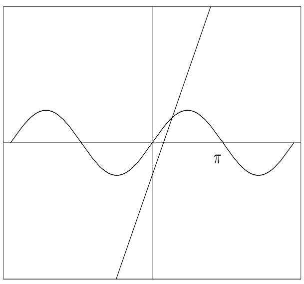


iii)

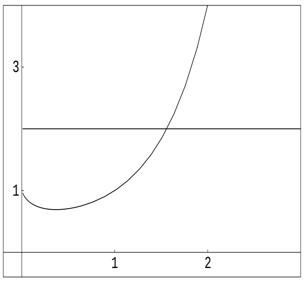


iv) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ verifica $f(0) > 0$, $f(\pi) < 0$ y $f'(x) = \cos x - 2 \neq 0$ para todo $x \in I\!\!R$; por tanto existe una única raíz, que está en $(0, \pi)$.
v) $f(x) = x^x - 2$ verifica $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ y $f'(x) = x^x(\log x + 1) \neq 0$ para todo $x \geq 1$; por tanto existe una única raíz, que está en $(1, 2)$.
vi) $f(x) = x^2 + \log x$ verifica $f(1) > 0$, y $f'(x) = 2x + 1/x > 0$ para todo $x \geq 1$; por tanto no existe ninguna raíz.

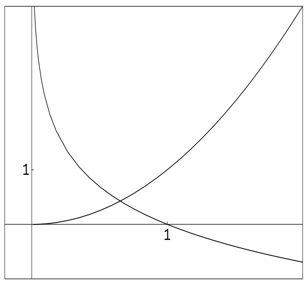
iv)



v)

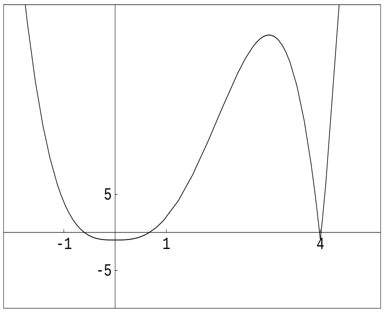


vi)



2.2. Extremos de funciones.

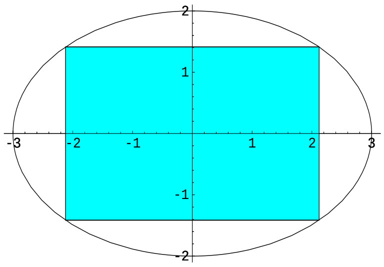
Problema 2.2.1



i) f es continua en $I\!R$ y derivable en $I\!R - \{4\}$.
ii) Máximo local en $x = 3$, mínimos locales y absolutos en $x = 0$, $x = 4$.
iii) f es creciente en $[0, 1]$, con $f(0) = -1$, $f(1) = 2$.

Problema 2.2.2 Minimizar el área lateral $A(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ con la restricción de volumen fijo $V = \pi r^2 h$. Es decir, minimizar $f(r) = 2\pi\big(r^2 + \dfrac{V}{\pi r}\big)$ para $r \in (0, \infty)$. Se obtiene $r = (V/2\pi)^{1/3}$, $h = 2r$.

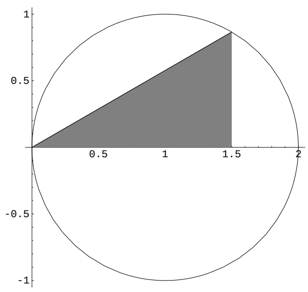
Problema 2.2.3



Dado un punto en el primer cuadrante $P = (x, y)$, maximizar el área $A(x, y) = 4xy$ con la restricción de que el punto pertenezca a la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Es decir, maximizar $f(x) = \dfrac{4bx}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ para $x \in [0, a]$. Se obtiene $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, y área $A = 2ab$.

Problema 2.2.4 Dado un punto en el primer cuadrante $P = (x_0, y_0)$ sobre la parábola $y = 6 - x^2$, la recta tangente a la misma que pasa por P es $y = 6 + x_0^2 - 2x_0 x$. El área del triángulo que forma ésta con los ejes es $A(x_0) = \dfrac{1}{4x_0}(x_0^2 + 6)^2$. Minimizar esta función para $x_0 \in (0, \sqrt{6}]$ da $x_0 = \sqrt{2}$, con área $A = 8\sqrt{2}$.

Problema 2.2.5



Dado un punto en el primer cuadrante $P = (x, y)$ sobre la circunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, el área a minimizar es $A(x, y) = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2x - x^2}$, para $x \in [0, 2]$.

Se obtiene $x = 3/2$.

Problema 2.2.6 Por simetría de triángulos, se tiene $\dfrac{x_0 + \alpha}{x_0} = \dfrac{y_0 + \beta}{\beta}$.

i) Minimizar la longitud $f(\alpha) = \sqrt{(x_0 + \alpha)^2 + (y_0 + \dfrac{x_0 y_0}{\alpha})^2}$, para $\alpha > 0$, nos da $\alpha = (x_0 y_0^2)^{1/3}$.

ii) Minimizar la suma de longitudes $g(\alpha) = x_0 + \alpha + y_0 + \dfrac{x_0 y_0}{\alpha}$, para $\alpha > 0$, nos da $\alpha = (x_0 y_0)^{1/2}$.

iii) Minimizar el área $h(\alpha) = \dfrac{1}{2}(x_0 + \alpha)(y_0 + \dfrac{x_0 y_0}{\alpha})$ para $\alpha > 0$ nos da $\alpha = x_0$.

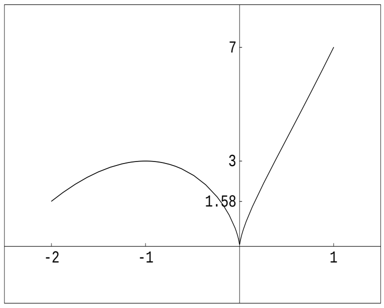
Problema 2.2.7 *i)* Sea $a \geq 1$ fijo y sea la función, para $x \geq -1$, $f(x) = (1 + x)^a - 1 - ax$. Como $x = 0$ es un mínimo absoluto de f en $[-1, \infty)$, se tiene $f(x) \geq f(0) = 0$ para todo $x \geq -1$.
ii) Sea $g(x) = e^x - 1 - x$. Como $x = 0$ es un mínimo absoluto de g, se tiene que $g(x) \geq g(0) = 0$ para todo $x \in I\!R$.

iii) Sea $h(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$. Como $x = 0$ es un mínimo absoluto de h, se tiene que $h(x) \geq h(0) = 0$ para todo $x > -1$. Además, por el apartado *ii*) se tiene $\mathrm{e}^x \geq x+1$, que implica $x \geq \log(x+1)$.

Problema 2.2.8 *i*) Sea $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$. Como $x = \mathrm{e}$ es un máximo absoluto, se tiene $f(x) < f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$;
ii) Como $\dfrac{\log x}{x} < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, para todo $x > 0$, $x \neq \mathrm{e}$, se tiene $(\mathrm{e} \log x) < x$, es decir, $x^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^x$.

Problema 2.2.9

Sea $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$. Se tiene $f'(x) = \dfrac{10}{3}(x+1)x^{-1/3}$. Así, no existe $f'(0)$, mientras que $f'(-1) = 0$. Comparando los valores $f(0) = 0$, $f(-1) = 3$, $f(-2) = 2^{2/3}$, $f(1) = 7$, se tiene máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 0$.

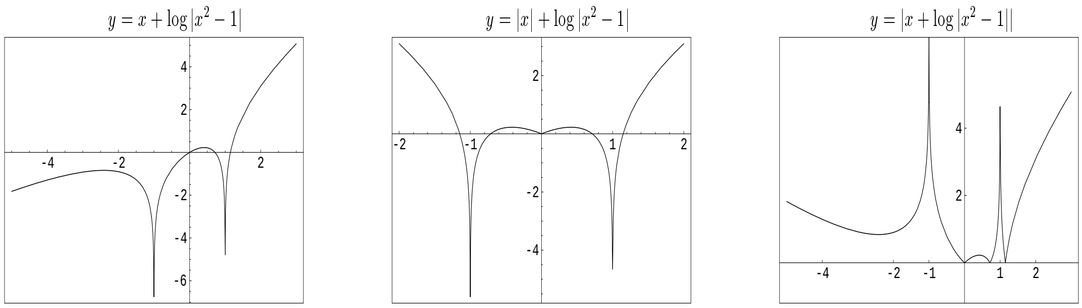


2.3. Representación gráfica.

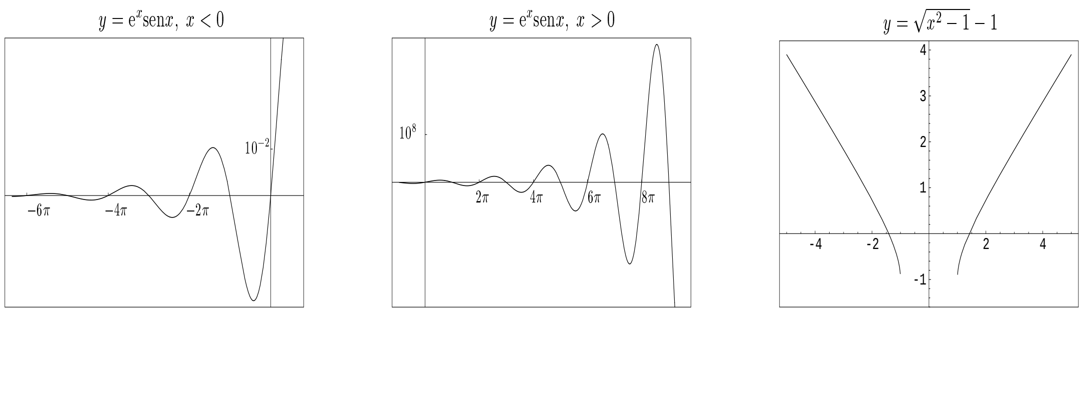
Problema 2.3.1 Sea $h = f \circ g$ con $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$, $g'' \geq 0$. Se tiene entonces

$$h''(x) = f''(g(x))\,(g'(x))^2 + f'((g(x))\,g''(x) \geq 0.$$

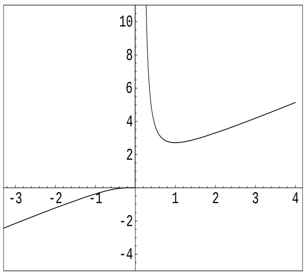
Problema 2.3.2



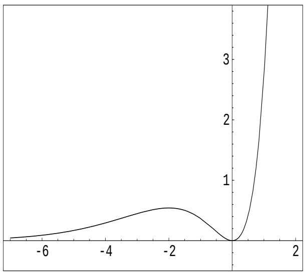
Problema 2.3.3



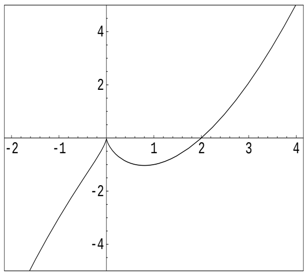
$y = x\mathrm{e}^{1/x}$



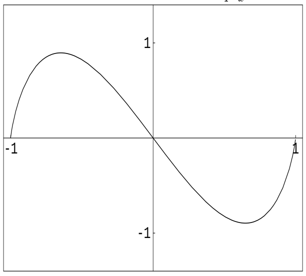
$y = x^2\mathrm{e}^x$



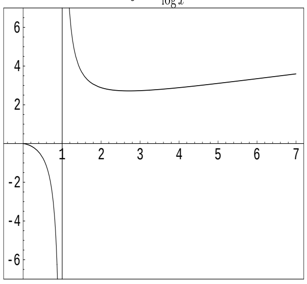
$y = (x-2)x^{2/3}$



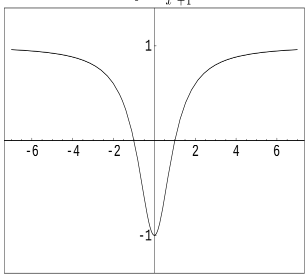
$y = (x^2-1)\log\frac{1+x}{1-x}$



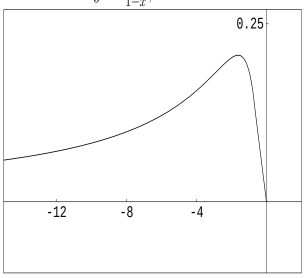
$y = \frac{x}{\log x}$



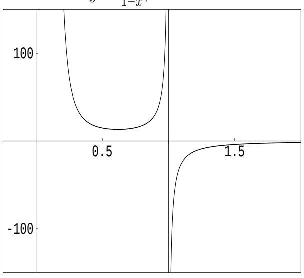
$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$



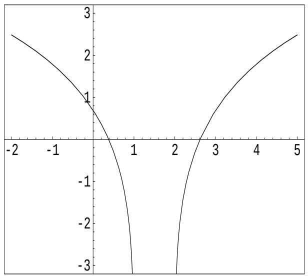
$y = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1-x}, \quad x < 0$



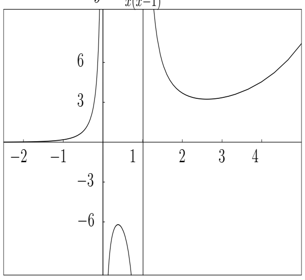
$y = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1-x}, \quad x > 0$



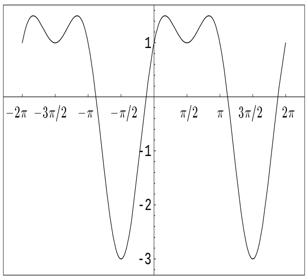
$y = \log[(x-1)(x-2)]$



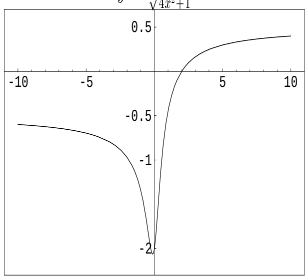
$y = \frac{e^x}{x(x-1)}$



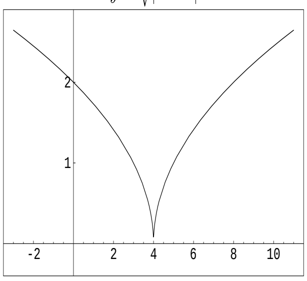
$y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$



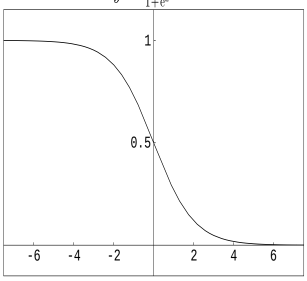
$y = \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+1}}$



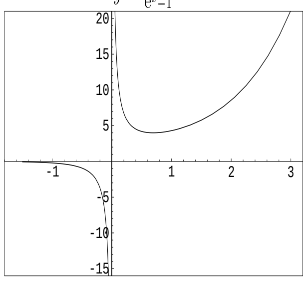
$y = \sqrt{|x-4|}$

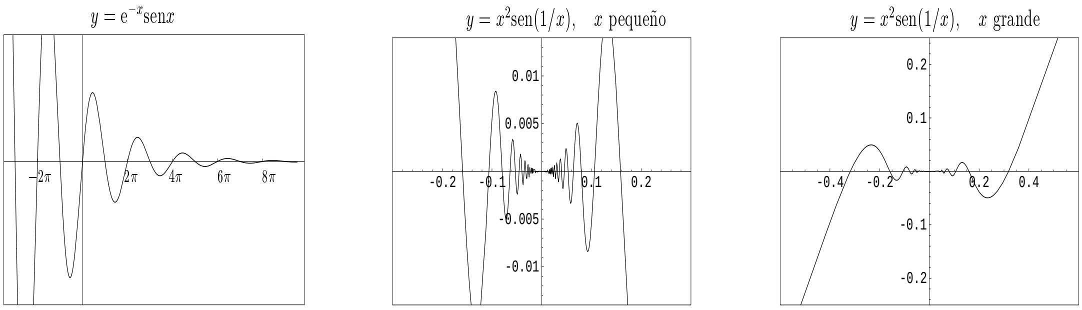


$y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$



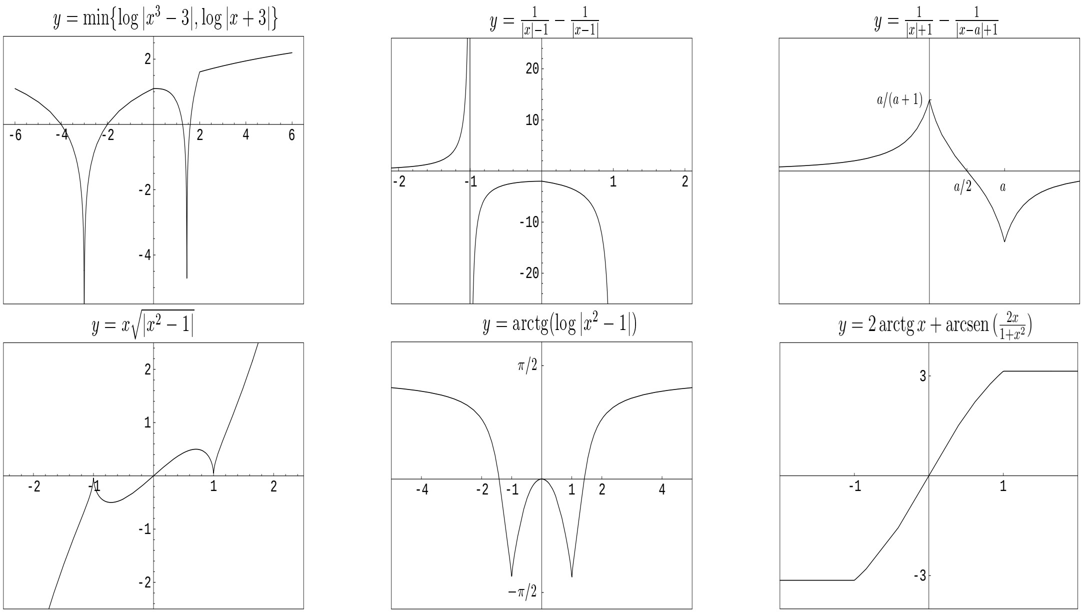
$y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x-1}$



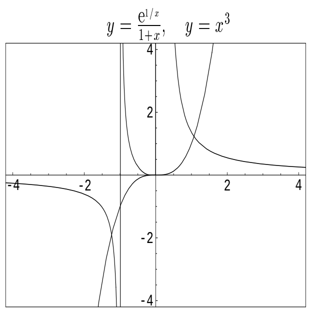


Algunas gráficas están representadas dos veces en dos escalas diferentes para observar sus distintos comportamientos.

Problema 2.3.4

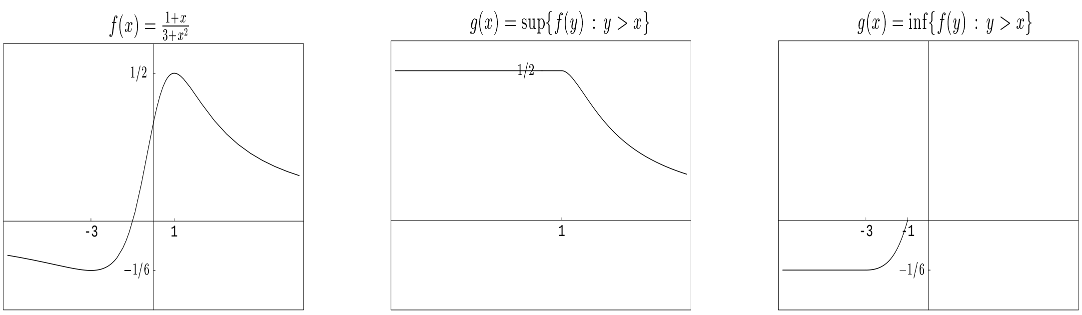


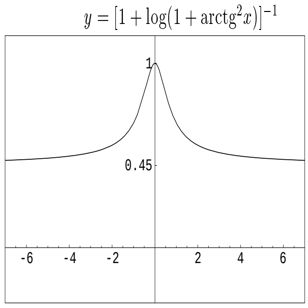
Problema 2.3.5



Hay tres soluciones de la ecuación $\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{1+x} = x^3$, una $x = 0$, otra en $(0, \infty)$ y una tercera en $(-\infty, -1)$. Basta estudiar la monotonía de la función $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{1+x} - x^3$ en cada uno de los intervalos.

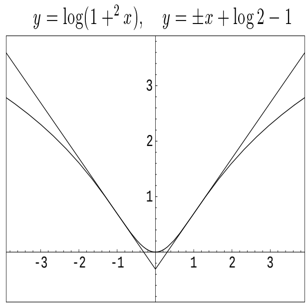
Problema 2.3.6





Problema 2.3.7

i) $Imagen(f) = [1, 1 + \pi^2/4)$.
ii) $A > 0$ ó $A \leq -\log(1 + \pi^2/4)$.
iii) $\sup(g) = \text{máx}(g) = 1$, $\text{ínf}(g) = \dfrac{1}{1 + \log(1 + \pi^2/4)}$.



Problema 2.3.8

i) $x = \pm 1$, $y = \pm x + \log 2 - 1$. *ii)* Si las funciones $f(x) = \log(1+x^2)$ y $h(x) = |x| + \alpha$ se cortan en $x = \pm A$ (por simetría), se debe tener $f(A) = h(A)$, $f'(A) = h'(A)$, que implica $A = 1$, $\alpha = \log 2 - 1$.
iii) $\dfrac{g(2) - g(-1)}{2 + 1} = \dfrac{1}{3} = g'(c) = \dfrac{2c}{1 + c^2}$ implica $c = 3 - 2\sqrt{2}$.