uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO I

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 3: Sucesiones y Series

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

3. Sucesiones y series.

3.1. Sucesiones de números reales.

Problema 3.1.1 *i)* La sucesión producto puede ser cualquier cosa. Ejemplos $x_n = 1/n$, $y_n = n$, $x_n y_n = 1$ converge; $x_n = 1/n$, $y_n = n^2$, $x_n y_n = n$ diverge. La sucesión suma debe ser divergente porque en otro caso la diferencia $(x_n + y_n) - x_n$ sería convergente. La sucesión cociente debe ser divergente porque en otro caso el producto $(y_n/x_n) \cdot x_n$ sería convergente.
ii) $||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell|$, por el problema 1.1.1*iii)*. El recíproco es falso, tomando por ejemplo $x_n = (-1)^n$.
iii) Tomando $\varepsilon = 1/2$, la única manera de tener $|x_n - \ell| < 1/2$ con $x_n \in \mathbb{Z}$ es que $x_n = \ell \in \mathbb{Z}$ a partir de algún n.
iv) Si $|x_n - \ell| < \varepsilon$ para $n \geq N$, entonces

$$|x_n| \leq \max\{|\ell + \varepsilon|, |\ell - \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}.$$

Problema 3.1.2 *i)* $a_n = 1 - 2^{-n}$; $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
ii) $b_n = 2^{a_n}$, con a_n del apartado anterior; $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$.

Problema 3.1.3 *i)* $L = \exp(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log a}{n}) = 1$; *ii)* $L = \exp(\lim_{n\to\infty} \dfrac{-3\log n}{n}) = 1$;
iii) si $a \geq b$, $L = \lim_{n\to\infty} a \sqrt[n]{1 + (b/a)^n} = a$, por tanto $L = \max\{a, b\}$;
iv) $L = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}$ por el problema 3.1.21*iv)*; *v)* multiplicando por el conjugado $L = 1/2$; *vi)* multiplicando dos veces por el conjugado $L = 0$; *vii)* dividiendo por 3^n, $L = 3$;
viii) $L = \exp[\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-1)(3n+1)}{2n(n^2-3n)}] = e^{3/2}$;

Problema 3.1.4 *i)* $L = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$; *ii)* $L = \lim_{n\to\infty} e^{\operatorname{sen} 1/n} \dfrac{e^{1/n - \operatorname{sen} 1/n}}{1/n - \operatorname{sen} 1/n} = 1$;
iii) por Stolz $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{\log(n/(n-1))} = 1$; *iv)* por Stirling $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{(n/e)(2\pi n)^{1/2n}} = e$; (por Stolz también sale pero es más largo); *v)* por comparación $0 \leq L \leq \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ (o utilizando Stirling); *vi)* por Stolz dos veces $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{2^n} = 0$; *vii)* $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n = 0$;
viii) por Stolz $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^{1+1/n}}{n^2 - (n-1)^2} = 1/2$.

Problema 3.1.5 *i)* $L = \exp(\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos bx + a \operatorname{sen} bx - 1}{x}) = e^{ab}$;
ii) $L = \exp(\lim_{x\to 0} \dfrac{(a - bx)/(a + x) - 1}{x}) = e^{-(b+1)/a}$.

Problema 3.1.6 *i)* $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{\log(n/(n-1))} = \pi$. *ii)* $L = \exp(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{\infty} \log(2k-1)}{n^2}) = \exp(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(2n-1)}{n^2 - (n-1)^2}) = 1$. *iii)* $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2 \operatorname{sen}(1/n)}{n^2 - (n-1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Problema 3.1.7 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n/n}{\log((n+1)n)} = e$.

Problema 3.1.8 *i*) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - n - L}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+L}{n} = 1$;
ii) $\lim_{n\to\infty} n \log\left(\frac{a_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{n} - 1\right) = L$.

Problema 3.1.9 $L = \exp\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{n\log a_n - \sum_{k=1}^n \log a_k}{n^2}\Big) = \mathrm{e}^a$; calculamos a aplicando Stolz,

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log a_n - (n-1)\log a_{n-1} - \log a_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\log(a_n/a_{n-1})}{2n-1} = \frac{\log \ell}{2}.$$

Por tanto $L = \sqrt{\ell}$.

Problema 3.1.10 *i*) $a_{n+1} = f(a_n)$, donde $f(x) = \sqrt{2x}$. Es monótona pues f es creciente; es monótona creciente pues $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Es acotada superiormente $a_n < 2$, por inducción: $a_1 < 2$ y $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{4} = 2$. Por tanto existe $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, que verifica $\ell = \sqrt{2\ell}$, que implica $\ell = 2$, pues $\ell \geq a_1 = \sqrt{2} > 0$. De hecho, por el problema 3.1.2*ii*), la sucesión es explícita, $a_n = 2^{1-2^{-n}} \to 2$.
ii) Aquí $f(x) = \sqrt{2+x}$, que también es creciente; además $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$, por lo que la sucesión es monótona creciente; por otro lado, se tiene $a_n < 2$, por lo que existe $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, que verifica $\ell = \sqrt{2+\ell}$, que implica $\ell = 2$, pues $\ell \geq \sqrt{2} > -1$.
iii) $f(x) = 3 + x/2$ es creciente, $u_1 = 3 > 0 = u_0$ y $u_n < 6$: existe $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, que verifica $\ell = 3 + \frac{\ell}{2}$, que implica $\ell = 6$. La sucesión también es explícita (una progresión geométrica) $u_n = 6(1 - 2^{-n}) \to 6$.
iv) $f(x) = 3 + 2x$ es creciente, $u_1 = 3 > 0 = u_0$, pero la sucesión es monótona creciente no acotada, por lo que $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$. De nuevo es explícita $u_n = 3(2^n - 1) \to \infty$.
v) $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$ es creciente: la sucesión es monótona, y será creciente o decreciente dependiendo del primer término. *a*) $u_0 = 1/2$, $u_1 = \frac{49}{56} > u_0$, creciente; como $u_n < 1$ existe $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, que verifica $\ell = \frac{\ell^3+6}{7}$, que implica $\ell = 1$, 2 o -3; se tiene $\ell = 1$ pues $1/2 \leq \ell \leq 1$.
b) $u_0 = 3/2$, $u_1 = \frac{75}{56} < u_0$, decreciente; como $u_n > 1$ existe $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = 1$, pues $1 \leq \ell \leq 3/2$.
c) $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{33}{7} > 3$, creciente y no acotada, por lo que $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Problema 3.1.11 *i*) $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = \sqrt{1+3x} - 1$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} > 0$. Se tiene $a_n < 1$ así como $a_{n+1} > a_n$. Por tanto existe $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, que verifica $\ell = \sqrt{1+3\ell} - 1$, que implica $\ell = 1$, pues $1/2 \leq \ell \leq 1$.

$$ii) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+3a_n} - 2}{a_n - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+3x} - 2}{x-1} = \frac{3}{4}.$$

También se puede calcular el límite multiplicando por el conjugado:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n - 3}{(a_n - 1)(\sqrt{1+3a_n} + 2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+3a_n} + 2} = \frac{3}{4}.$$

Problema 3.1.12 *i*) $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2}(b_n - b_{n-1})$ (de hecho $f(x) = 1 - x/2$ es decreciente).
ii) $\ell = 1 - \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}$.

iii) $|b_{n+1} - \frac{2}{3}| = |\frac{1}{3} - \frac{b_n}{2}| = \frac{1}{2}|b_n - \frac{2}{3}|$.
iv) $|b_n - \frac{2}{3}| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - \frac{2}{3}| = \frac{1}{4}|b_{n-2} - \frac{2}{3}| = \cdots = \frac{1}{2^n}(b_0 - \frac{2}{3}) \to 0$.

También se trata de una sucesión explícita, $b_n = \frac{2}{3}\Big[1 - \Big(\frac{-1}{2}\Big)^n\Big] \to \frac{2}{3}$.

Problema 3.1.13 *i)* $\ell = \frac{1}{1+\ell} \Rightarrow \ell = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, pues trivialmente $\ell \geq 0$. *ii)* $x \in [1/2, 1] \Rightarrow \frac{1}{1+x} \in [1/2, 2/3] \subset [1/2, 1]$. *iii)* Por inducción a partir de $c_1 = 1$ y el apartado anterior. *iii)* $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{4}{9} < 1$ si $x \geq \frac{1}{2}$.

Problema 3.1.14

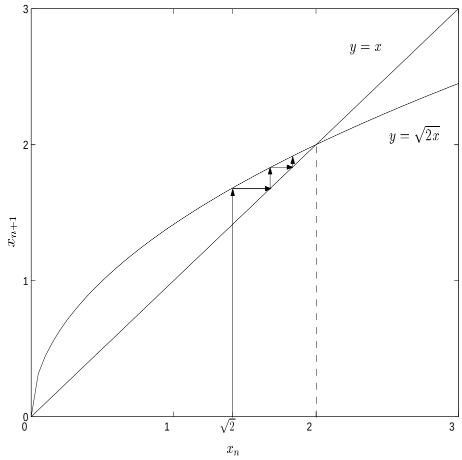
i)
- $\ell = 2 + \frac{4}{\ell} \Rightarrow \ell = 1 + \sqrt{5}$ (pues $\ell > 0$);
- $x \in [3, \frac{10}{3}] \Rightarrow 2 + \frac{4}{x} \in [\frac{16}{5}, \frac{10}{3}] \subset [3, \frac{10}{3}]$;
- $d_4 = \frac{34}{11} \in [3, \frac{10}{3}] \Rightarrow d_n \in [3, \frac{10}{3}] \quad \forall n \geq 4$;
- $|f'(x)| = \frac{4}{x^2} \leq \frac{4}{9} < 1 \quad$ si $x \geq 3$.

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + 4/d_n - \ell}{d_n - \ell} = \lim_{x\to\ell} \frac{2 + 4/x - \ell}{x - \ell} = -\frac{4}{\ell^2}.$$

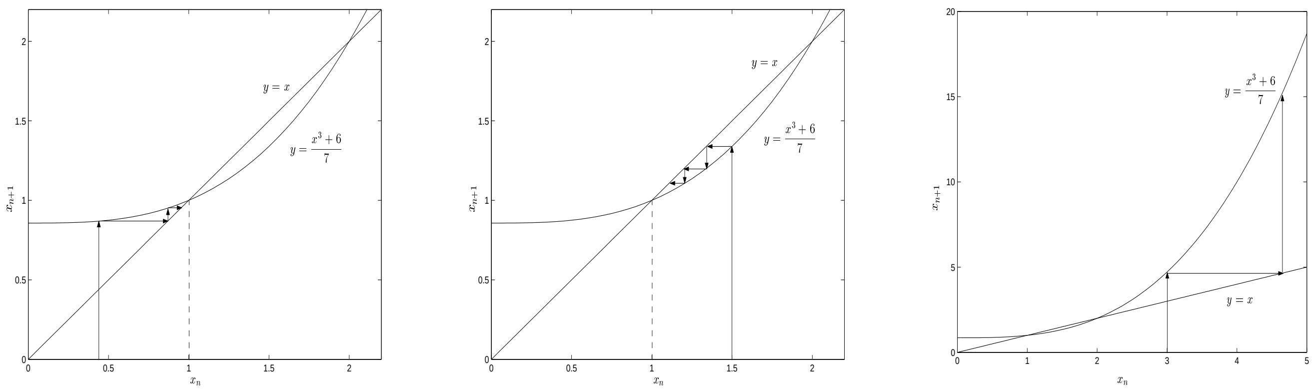
Problema 3.1.15 $x_n = f(x_{n-1})$ con $f(t) = \frac{t(1+t)}{1+2t}$, que es creciente. Como $x_2 = \frac{2}{3} < 1 = x_1$ se trata de una sucesión monótona decreciente. Además $x_n > 0$, así que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Problema 3.1.16 Por ejemplo:

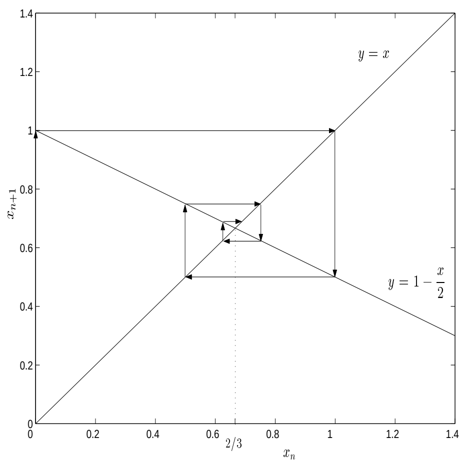
3.1.10 i)



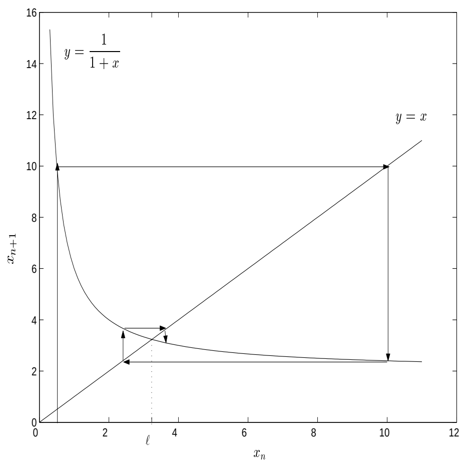
3.1.10 v)



3.1.12



3.1.13



3.2. Series de números reales

Problema 3.2.1 Aquí C = convergente, D = divergente. *i)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow C$.
ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow C$. *iii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C$. *iv)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = 1 \Rightarrow D$.
v) $a_n \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow C$. *vi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = 1 \Rightarrow C$. *vii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow D$.
viii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow C$. *ix)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 \Rightarrow C$. *x)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow C$.
xi) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 \Rightarrow C$. *xii)* $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{-1/2} \neq 0 \Rightarrow D$. *xiii)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow C$.
xiv) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1 \Rightarrow C$. *xv)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \frac{1}{2} \Rightarrow D$. *xvi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = 1 \Rightarrow D$.
xvii) $a_n \leq \frac{1}{n^2}$ si $n > \mathrm{e}^2 \Rightarrow C$. *xviii)* $(\log n)^{\log n} = n^{\log(\log n)} \geq n^2$ si $n > \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \Rightarrow C$.

Problema 3.2.2 $a_n = \frac{2(a-b)n + a + b}{4n^2 - 1}$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \frac{a}{2}$ si $a = b$ y converge, mientras que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = \frac{a-b}{2}$ si $a \neq b$ y diverge.

Problema 3.2.3 *i)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1+a}{\mathrm{e}^a} < 1$ para todo $a > -1$, $a \neq 0 \Rightarrow C$; si $a = 0$ queda la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$. *ii)* Usando la fórmula de Stirling, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\mathrm{e}}{a}$, por lo que $a > \mathrm{e} \Rightarrow C$, $a < \mathrm{e} \Rightarrow D$; si $a = \mathrm{e}$, se tiene $a_n \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \Rightarrow D$. *iii)* De nuevo por Stirling, $a_n \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{n^a}$, por lo que $C \Leftrightarrow a > 3/2$.

Problema 3.2.4 Aquí CA = convergente absolutamente, CC = convergente condicionalmente. *i)* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, pero $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{1/n} = \infty \Rightarrow CC$; *ii)* $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \Rightarrow CC$;
iii) $|a_n| = \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \Rightarrow CA$; *iv)* $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow D$; *v)* $a_n = \frac{(-1)^n}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \Rightarrow CC$;
vi) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \Rightarrow CC$; *vii)* $|a_n| = \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \Rightarrow CA$;
viii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \Rightarrow CC$.

Problema 3.2.5 $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ para $x \to 0$, así que para $n \to \infty$ se tiene $|a_n| = \frac{1}{3n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}}) \Rightarrow CA$.

Problema 3.2.6 *i)* $|\varepsilon| \leq \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{10^3}$ si $N > 6$; *ii)* $|\varepsilon| \leq \int_N^\infty \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3N^3} < \frac{1}{10^3}$ si $N > 7$.

Problema 3.2.7 *i)* $S = 3\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n - \frac{1}{2^3}\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = 3 \cdot \frac{1}{1-3/4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{47}{4}$;
ii) $S = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$;

iii) $S = 4 \cdot \dfrac{1/3}{(1-1/3)^2} + \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{9}{2}$;

iv) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big] = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$;

v) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\log\frac{n+2}{n+1} - \log\frac{n+1}{n}\Big] = -\log 2 + \lim_{n\to\infty} \log\frac{n+2}{n+1} = -\log 2.$

Problema 3.2.8 *i)* $b_0 \le S \le b_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 9\cdot 10^{-n} \le b_0 + 9\cdot\frac{1/10}{1-1/10} = b_0+1$. Representa el desarrollo decimal de cualquier número real de parte entera b_0 (o b_0+1 en casos particulares, como en el ejemplo siguiente).

ii)
$$a)\quad 9{,}999999\cdots = 9\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 10;$$
$$b)\quad 1{,}212121\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-2k} + 2\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(2k+1)} = \frac{40}{33}.$$

Problema 3.2.9 *i)* Sea $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Se tiene $f'(x) = \operatorname{tg}^2 x \ge 0$, así como

$$\lim_{n\to[(2n-1)\pi/2]^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{n\to[(2n+1)\pi/2]^-} f(x) = +\infty,$$

para cada $n \in I\!N$; por tanto tiene una y sólo una raíz en ese intervalo.
ii) Como $\lambda_n \in ((2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2)$, se tiene $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1/\lambda_n^2}{1/n^2} = \frac{1}{\pi^2}$, y la serie converge.

Problema 3.2.10 *i)* Es una sucesión monótona decreciente de términos positivos, por lo que converge; su límite verifica $\ell = \sqrt{1+2\ell} - 1$, es decir $\ell = 0$.

ii) *a)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+2t}-1}{t} = 1.$

b) Por Stolz, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{t(\sqrt{1+2t}-1)}{t - \sqrt{1+2t}+1} = 2.$

iii) *a)* diverge y *b)* converge, pues por el apartado anterior $x_n = \dfrac{2}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. (Observemos que no funciona el criterio del cociente.)

3.3. Series de Taylor.

Problema 3.3.1 *i)* $\dfrac{1}{\rho} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^{2/n}} = \frac{1}{2}$; en los extremos CA; $I = [-2,2]$;
ii) Por Stirling $\dfrac{1}{\rho} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$; en los extremos $|a_n| \approx \sqrt{2\pi n} \to \infty \Rightarrow D$; $I = (-\mathrm{e}, \mathrm{e})$; *iii)* $\rho = 10$; en los extremos, $x = -10 \Rightarrow CC$, $x = 10 \Rightarrow D$; $I = [-10, 10)$; *iv)* $\rho = 1$; en los extremos, $x = -1 \Rightarrow CC$, $x = 1 \Rightarrow D$; $I = [-1, 1)$; *v)* $a_n = 2^n(3/2 - x)^n$; $\rho = 1/2$; en los extremos D; $I = (3/2 - 1/2, 3/2 + 1/2) = (1,2)$; *vi)* $\rho = 1$; en los extremos $x = 1 \Rightarrow CC$, $x = 3 \Rightarrow D$; $I = [1,3)$.

Problema 3.3.2

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\\
f_2(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\\
f_3(x) &= \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} f_2'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.
\end{aligned}$$

Problema 3.3.3

$$\begin{aligned}
&i) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x), && x\in[-1,1);\\
&ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{-n}x^n = \frac{4}{(2-x)^2}, && x\in(-2,2)
\end{aligned}$$

(utilizando f_2 del problema anterior).

Problema 3.3.4

$$\begin{aligned}
&i) && \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, && x\in I\!R;\\
&ii) && \frac{x}{a+bx} = \frac{x}{a}\frac{1}{1+bx/a} = \frac{x}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{-bx}{a}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b^{n-1}a^{-n}x^n, && x\in(-a/b,a/b);\\
&iii) && \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, && x\in(-1,1)
\end{aligned}$$

(descomponiendo la suma en n par o impar);

$$\begin{aligned}
&iv) && \frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^{-n-1}x^{2n}, && x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2});\\
&v) && \mathrm{e}^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}, && x\in I\!R.
\end{aligned}$$

Problema 3.3.5 *i)* $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1/2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-1/2}-1$; *ii)* $S = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$; *iii)* $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n} = \log 2$; *iv)* $S = \operatorname{arc\,tg} 1 - 1 = \frac{\pi}{4}-1$.

Problema 3.3.6 *i)* Un cuadrado de lado $r\sqrt{2}$. *ii)* Cada radio es $r_{n+1} = \frac{r_n}{\sqrt{2}}$, por lo que cada área es $A_{n+1} = \frac{1}{2}A_n$; partiendo de $A_0 = \pi r^2$, se tiene $A_n = \frac{\pi r^2}{2^n}$, y así $\sum_{n=0}^{\infty}A_n = 2\pi r^2$.

Problema 3.3.7

$$\begin{aligned}
f(0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}-1;\\
f(1) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \mathrm{e};\\
f(2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}.
\end{aligned}$$

Problema 3.3.8 Derivando la ecuación para f obtenemos

$$\begin{array}{lll} f'(x) = f(x) + x, & f''(x) = f'(x) + 1, & \\ f'''(x) = f''(x), & f^{n)}(x) = f''(x), & \forall\, n \geq 2. \end{array}$$

Calculemos la serie de Taylor de f a partir de sus derivadas en $x = 0$:

$$\begin{array}{lll} f(0) = 2, & f'(0) = f(0) + 0 = 2, & \\ f''(0) = f'(0) + 1 = 3, & f^{n)}(0) = 3, & \forall\, n \geq 2. \end{array}$$

Por tanto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)x^n}{n!} = 2 + 2x + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2 + 2x + 3(\mathrm{e}^x - x - 1) = 3\mathrm{e}^x - x - 1.$$