uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

# AUTOEVALUACIÓN DE CÁLCULO I - SOLUCIONES

Para Grados en Ingeniería

## Capítulo 1: Funciones de una variable real

**Domingo Pestana Galván**
**José Manuel Rodríguez García**

## Soluciones del Examen de Autoevaluación - Capítulo 1

**Pregunta 1.** Describir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 5x + 5| \leq 1\}$.

*Solución*: Tenemos que $|x^2 - 5x + 5| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 5x + 5 \leq 1$, por lo que

$$A = \{x : \ x^2 - 5x + 4 \leq 0\} \cap \{x : \ x^2 - 5x + 6 \geq 0\}.$$

Ahora bien $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = 4$ y estudiando los signos es fácil obtener que

$$\{x : \ x^2 - 5x + 4 \leq 0\} = [1, 4].$$

Análogamente, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ó $x = 3$, de donde se tiene que

$$\{x : \ x^2 - 5x + 6 \geq 0\} = (-\infty, 2] \cup [3, \infty).$$

Por tanto, $A = [1, 2] \cup [3, 4]$.

---

**Pregunta 2.** Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1 - n^3}{1 + n^2} + \frac{n - 1}{n + 1}\,, \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

*Solución*: Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{1+n^2} = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ se sigue que no existen ni el ínfimo ni el mínimo de $B$, mientras que $\sup B = \max B = 0$ ya que dando el valor $n = 1$ se tiene que $0 \in B$, y

$$\frac{1 - n^3}{1 + n^2} + \frac{n - 1}{n + 1} \leq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{n - 1}{n + 1} \leq \frac{n^3 - 1}{1 + n^2} \ \Leftrightarrow \ (n-1)(n^2+1) \leq (n+1)(n^3-1) \ \Leftrightarrow \ n^4+n^2-2n \geq 0.$$

Ahora bien, factorizando este polinomio tenemos que $n^4 + n^2 - 2n = n(n - 1)(n^2 + n + 2) \geq 0$ para $n$ natural $n \geq 1$ ya que los tres factores son positivos.

---

**Pregunta 3.** Halla el dominio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - \log x}\ .$$

*Solución*: Tenemos que

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \{x : \ 1 - \log x \neq 0, \ x \geq 0\} \cap \{x : \ 1 - x^2 \geq 0\} = \big((0, e) \cup (e, \infty)\big) \cap [-1, 1] = (0, 1]$$

ya que $e > 1$.

---

**Pregunta 4.** Demuestra que la función

$$f(x) = \frac{x + 2}{x + 3}$$

es inyectiva en su dominio. Halla la función inversa de $f$ y encuentra su dominio.

*Solución*: El dominio de $f$ es $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ y si $x_1, x_2 \neq -3$ verifican que

$$\frac{x_1 + 2}{x_1 + 3} = \frac{x_2 + 2}{x_2 + 3}$$

entonces $x_1x_2 + 3x_1 + 2x_2 + 6 = x_1x_2 + 3x_2 + 2x_1 + 6$, de donde simplificando obtenemos que a la fuerza debe ser $x_1 = x_2$. Por tanto, $f$ es inyectiva en su dominio. Por otro lado

$$y = \frac{x+2}{x+3} \Leftrightarrow (x+3)y = x+2 \Leftrightarrow xy + 3y = x+2 \Leftrightarrow xy - x = 2 - 3y \Leftrightarrow x = \frac{2-3y}{y-1}$$

por lo que la inversa de $f$ es

$$f^{-1}(y) = \frac{2-3y}{y-1}$$

y su dominio es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

---

**Pregunta 5.** Calcula los siguientes límites:

$$\text{a)} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3+x^2+1} - \sqrt{x^3-x^2+1} \qquad \text{b)} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x+5^x}$$

*Solución*: a) Multiplicando por la expresión conjugada, dividiendo a continuación numerador y denominador por $x^2$ (dentro de las raices por $x^4$), se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3+x^2+1} - \sqrt{x^3-x^2+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+1-(x^3-x^2+1)}{\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^3-x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^3-x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} = \infty.
\end{aligned}$$

b) Dividiendo numerador y denominador por la exponencial mayor que es $5^x$ y utilizando que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ si $a < 1$, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{4^x+5^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2/5)^x+(3/5)^x}{(4/5)^x+1} = \frac{0+0}{0+1} = 0.$$

---