uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

AUTOEVALUACIÓN DE CÁLCULO I - SOLUCIONES

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 2: Cálculo diferencial de una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Soluciones del Examen de Autoevaluación - Capítulo 2

PROBLEMA 1. Resolver los siguientes apartados:

1. Estudiar los valores de k que hagan que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{k}{x^2 - 2x + k}$$

2. Determinar si la siguiente función es continua o no. Si no lo es, determinar si la discontinuidad es evitable, de salto finito o infinito.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Solución:

1. Observemos primero que si $k = 0 \Rightarrow g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, continua.

   Por otro lado, la función será continua en todo $\mathbb{R}$ si el polinomio del denominador no tiene ninguna raíz. Resolvemos la ecuación $x^2 - 2x + k = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}.$$

   Por lo tanto, no existirán raíces si $4 - 4k < 0 \Rightarrow k > 1$.

   Uniendo ambos casos tenemos que $g(x)$ es continua si $k \in \{0\} \cup (1, \infty)$.

2. La función es claramente continua en $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ por ser un polinomio en cada uno de los tres intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, \infty)$. Estudiamos la continuidad en estos dos puntos:

   a) $f(1) = 0$.

   b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, ya que los límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - 1 = 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - 1 = 0.$$

   c) Por tanto $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 0$. Esto significa que f es continua en $x = 1$.

   a) $f(2) = 4$.

   b) No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = 4 \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 - 1 = 3$$

   c) Consecuentemente f es discontinua en $x = 2$ de salto 1.

   Por tanto f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

PROBLEMA 2. Resolver los siguientes apartados:

1. Sean f y g continuas en $[a,b]$ tales que $f(a) < g(a)$ pero $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Demostrar que si f es periódica, entonces f' también es periódica.

Solución:

1. Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x)$ y le aplicamos el Teorema de Bolzano: h es continua en $[a,b]$ por ser diferencia de funciones continuas, $h(a) = f(a) - g(a) < 0$ y $h(b) = f(b) - g(b) > 0$, por tanto existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$, es decir, existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

2. Si f es periódica de periodo T entonces $f(x) = f(x+T)$ derivando a ambos lados de la igualdad (aplicando la regla de la cadena) se tiene $f'(x) = f'(x+T)$ por lo que, efectivamente, f' es una función periódica del mismo periodo que f.

PROBLEMA 3. Encontrar a y b tales que f sea derivable en todos los puntos.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:
La función es claramente derivable en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por ser un polinomio en cad uno de los dos intervalos $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$. Además

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Igualamos las derivadas laterales en $x = 2$ para que sea derivable en este punto

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} 3ax^2 = 12a \,, \qquad f'_-(2) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x = 4 \,.$$

Por tanto $a = 1/3$.
Finalmente imponemos que la función sea continua (recordemos que la continuidad es una condición necesaria pero ¡no suficiente! para la derivabilidad)

1. $f(2) = 8a = 8/3$.

2. Para determinar $\lim_{x \to 2} f(x)$ hallamos b de forma que los límites laterales coincidan:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax^3 = 8a = 8/3 \,, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + b = 4 + b \,.$$

3. Para que f sea continua tiene que verificarse que $8/3 = 4 + b$.

Por tanto $b = -4/3$.

PROBLEMA 4. Resuelve los siguientes apartados

1. Calcula p, m y n para que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,5]$. ¿Dónde cumple la tesis?.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+px & \text{si} \quad -1\le x\le 3 \\ mx+n & \text{si} \quad 3<x\le 5 \end{cases}$$

2. Demuestra que $g(x)$ cumple las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[2,6]$. ¿En qué punto cumple la tesis?.

$$g(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x<4 \\ -x^2+10x-19 & \text{si} \quad x\ge 4 \end{cases}$$

Solución:

1. Tenemos que hallar p, m y n de forma que f sea continua en $[-1,5]$, derivable en $(-1,5)$ y $f(-1)=f(5)$. Estas tres condiciones nos darán las tres ecuaciones necesarias para hallar nuestras tres incógnitas.

   a) f es claramente continua en $[-1,5]\setminus\{3\}$, estudiamos la continuidad en $x=3$: $f(3)=-9+3p$; para asegurar la existencia de $\lim_{x\to 3} f(x)$ imponemos que los límites laterales coincidan:

   $$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} mx+n=3m+n\,, \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} -x^2+px=-9+3p\,,$$

   por tanto $3m+n=-9+3p$.

   b) f es claramente derivable en $(-1,5)\setminus\{3\}$. Además

   $$f'(x)=\begin{cases} -2x+p & \text{si} \quad -1<x<3 \\ m & \text{si} \quad 3<x<5 \end{cases}$$

   Para asegurar la derivabilidad en todo el intervalo igualamos las derivadas laterales en $x=3$:

   $$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\lim_{x\to 3^+} m=m \qquad f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^-} -2x+p=-6+p$$

   por tanto $-6+p=m$.

   c) La última ecuación la obtenemos del hecho $f(-1)=f(5)\Rightarrow -1-p=5m+n$.

   Resolvemos el sistema

   $$\begin{cases} 3m+n=-9+3p \\ -6+p=m \\ -1-p=5m+n \end{cases} \quad\Rightarrow\quad p=10/3,\ m=-8/3,\ n=9.$$

   Por tanto f se define como:

   $$f(x)=\begin{cases} -x^2+\frac{10}{3}x & \text{si} \quad -1\le x\le 3 \\ -\frac{8}{3}x+9 & \text{si} \quad 3<x\le 5 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x+\frac{10}{3} & \text{si} \quad -1<x<3 \\ -\frac{8}{3} & \text{si} \quad 3<x<5 \end{cases}$$

y por el Teorema de Rolle existe $c \in (-1,5)$ tal que $f'(c) = 0$.

Si $-1 < c < 3$ entonces $f'(c) = -2c + 10/3 = 0 \Rightarrow\ c = 5/3$.

Si $3 < c < 5$ entonces $f'(c) = -8/3 \neq 0$ y no obtenemos ninguna solución.

Por tanto, la tesis del Teorema de Rolle se cumple en el punto $c = 5/3$, es decir: $f'(5/3) = 0$.

2. Tenemos que comprobar que g sea continua en $[2,6]$ y derivable en $(2,6)$.

   a) g es claramente continua en $[2,6] \setminus \{4\}$ por ser un polinomio en cada intervalo $[2,4)$, $(4,6]$; estudiamos la continuidad en $x = 4$:
   $g(4) = 5$; $\lim_{x\to 4} g(x) = 5$ ya que los límites laterales coinciden:

   $$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 10x - 19 = 5\,, \qquad \lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^-} 2x - 3 = 5\,.$$

   Por tanto, g es continua en $[2,6]$.

   b) g es claramente derivable en $(2,6) \setminus \{4\}$ ya que es un polinomio en cada uno de los intervalos $[2,4)$, $(4,6]$; Además

   $$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

   Para asegurar la derivabilidad en todo el intervalo comprobamos que las derivadas laterales en $x = 4$ coinciden

   $$g'_+(4) = \lim_{x\to 4^+} g'(x) = \lim_{x\to 4^+} -2x + 10 = 2\,, \qquad g'_-(4) = \lim_{x\to 4^-} g'(x) = \lim_{x\to 4^-} 2 = 2\,.$$

   Por tanto $g'(4) = 2$ y g es derivable en $(2,6)$.

   Por el Teorema del Valor Medio existe $c \in (2,6)$ tal que

   $$g'(c) = \frac{g(6) - g(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = 1\,.$$

   Si $c < 4$ entonces $g'(c) = 2 \neq 1$ y no obtenemos solución.

   Si $c > 4$ entonces $g'(c) = -2c + 10 = 1 \Rightarrow c = 9/2$.

   Por tanto, la tesis del Teorema del Valor Medio se cumple en el punto $c = 9/2$, es decir: $g'(9/2) = 1$.

PROBLEMA 5. Resuelve los siguientes límites:

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \qquad\qquad (ii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}$$

Solución: Aplicamos la Regla de L'Hôpital en ambos casos:

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\cos 2x}{5\cos 5x} = \dfrac{2}{5}$.

PROBLEMA 6. Resolver los siguientes apartados.

1. Hallar el Polinomio de Taylor de orden par de la función $f(x) = \cos(x^2)$.
2. Hallar el Polinomio de Taylor de orden n de la función e^x/x.
3. Usar el primer apartado para demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

Solución:

1. Como el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $g(x) = \cos x$ es

$$P_{2n}g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

   y ya que $f(x) = g(x^2)$ tenemos que el polinomio de Taylor de grado $4n$ de $f(x) = \cos(x^2)$ es

$$P_{4n}f(x) = P_{2n}g(x^2) = 1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n(x^2)^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} \ .$$

   El polinomio de grado $4n+2 = 4(n+1)$ de $g(x)$ es por lo mismo igual al polinomio de grado $2(n+1) = 2n+2$ de $f(x)$:

$$P_{4n+2}f(x) = P_{2n+2}g(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{4n+4}}{(2n+2)!} \ .$$

2. La función no es continua en $x = 0$ y, por tanto, tampoco es derivable. Por lo tanto, no están definidos los polinomios de Taylor de f en el origen.
3. Usando el polinomio de Taylor de grado 4 de la función del numerador tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(1-\dfrac{x^4}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^4}{2}}{x^4} = \frac{1}{2} \ .$$