uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

AUTOEVALUACIÓN DE CÁLCULO I - SOLUCIONES

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 3: Sucesiones y series

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Soluciones del Examen de Autoevaluación - Capítulo 3

PROBLEMA 1. Calcular los siguientes límites.

$$i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} \qquad\qquad ii) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log 1^2 + \log 2^2 + \cdots + \log n^2}{n \log n^2}$$

Solución:

1. Usando la fórmula de Stirling tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2}{\sqrt{n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi}} = \sqrt{\pi}\,.$$

2. Utilizando el criterio de Stolz y la definición del número e:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log 1^2 + \log 2^2 + \cdots + \log n^2}{n \log n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)^2}{(n+1)\log(n+1)^2 - n\log n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)\log(n+1) - n\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n(\log(n+1)-\log n) + \log(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log\left((n+1)/n\right)^n + \log(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{\log(n+1)}\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + 1} \qquad = \frac{1}{0\cdot\log e + 1} = 1\,.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 2. Dada la sucesión $a_1 = 4 \qquad a_{n+1} = \frac{(a_n+1)^2}{2}$, se pide:

1. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$,
2. Hallar el límite de $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n^2}$

Solución:

1. Como $a_{n+1} = g(a_n)$ con $g(x) = (x+1)^2/2$ se tiene que $\{a_n\}$ es monótona creciente ya que $g'(x) = x+1 \geq 1 > 0$ si $x \geq 0$. Por lo tanto, si la sucesión estuviera acotada superiormente, tendría límite L finito. Haciendo tender n a infinito en los dos miembros de la expresión $a_{n+1} = g(a_n)$ tendríamos que $L = g(L) = (L+1)^2/2$ lo que implica $L^2+1 = 0$ que es imposible. Por lo tanto, la sucesión no puede estar acotada superiormente, lo que significa que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2. Usando que $a_{n+1} = (a_n+1)^2/2$ y el apartado anterior, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+1)^2/2}{a_n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n+1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+0)^2 = \frac{1}{2}\,.$$

PROBLEMA 3. Estudiar la convergencia de la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2\,, \\ a_0 = 1/2\,. \end{cases}$$

En caso de que sea convergente calcular su límite.
Solución: Veamos que la sucesión es monónota decreciente y acotada inferiormente y, por lo tanto, convergente:

a) Es monótona decreciente: $a_{n+1} \le a_n$. En efecto, por inducción:

a.1) $a_1 = 1/4 \le 1/2 = a_0$.

a.2) Si suponemos $a_n \le a_{n-1}$ entonces $a_n^2 \le a_{n-1}^2$ (ya que es claro que $a_n = a_{n-1}^2 \ge 0$ para todo n y la función $f(x) = x^2$ es monótona creciente en $(0,\infty)$). Por tanto, usando la fórmula de recurrencia, concluimos que $a_{n+1} \le a_n$.

b) Está acotada inferiormente: $a_{n+1} = a_n^2 \ge 0$, es decir 0 es una cota inferior.

También puede verse que es monótona decreciente de la siguiente manera: $a_{n+1} = g(a_n)$ con $g(x) = x^2$. Como $g'(x) = 2x > 0$ en $(0,\infty)$ y es claro que $a_{n+1} = a_n^2 > 0$, es decir $a_n \in (0,\infty)$, por el Teorema del Valor Medio se sigue que la sucesión es monótona. Esto es así porque

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{g(a_{n+1}) - g(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = g'(c) > 0\,,$$

ya que el punto de la tesis del Teorema del Valor Medio c está conprendido entre a_n y a_{n+1} y en particular $c \in (0,\infty)$, con lo que $g'(c) > 0$. Por lo tanto $a_{n+2} - a_{n+1}$ y $a_{n+1} - a_n$ tienen el mismo signo para todo n. Si fueran positivos entonces la sucesión sería creciente y si fueran negativos la sucesión sería decreciente. Ahora como $a_1 = 1/4 < 1/2 = a_0$, se sigue $a_1 - a_0 < 0$, es decir que la sucesión es decreciente.

Ahora, como la sucesión es convergente, si su límite es L, pasando al límite en los dos miembros de la ecuación de recurrencia $a_{n+1} = a_n^2$, tenemos que debe ser $L = L^2 \implies L^2 - L = 0 \implies L(l-1) = 0$ por lo que debe ser $L = 0$ ó $L = 1$. Como el primer término es $1/2$ y la sucesión es monótona decreciente debe ser forzosamente $L = 0$.

PROBLEMA 4. Estudiar la convergencia de las series:

$$\text{(a) (1,5 puntos)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+2)}\,, \qquad \text{(b) (1 punto)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\,.$$

Solución:

a) La serie converge, ya que comparando con la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{7/6}}$ (que es convergente ya que $7/6 > 1$), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+2)}}{\dfrac{1}{n^{7/6}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+2)}}{\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = 1{\cdot}1 = 1 \in (0,\infty)\,.$$

b) La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{x^2})$ es monótona decreciente ya que $f'(x) = (-\frac{2}{3})x^{-5/3}\cos(1/\sqrt[3]{x^2}) < 0$, y como

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{n^2}) = \operatorname{sen} 0 = 0\,,$$

por el criterio de Leibnitz para series alternantes, se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}(1/\sqrt[3]{n^2})$ es convergente.

PROBLEMA 5. Calcular el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n9^n}\,.$$

Solución: El intervalo de convergencia tiene centro en 1 y tiene radio ρ con

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(n+1)9^{n+1}}}{\dfrac{1}{n9^n}} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{9} \implies \rho = 9\,.$$

Por tanto, nos queda sólo saber si la serie converge o no en los extremos del intervalo, $x = -8$, $x = 10$.
Si $x = -8$ la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-9)^n}{n9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ que converge por el Criterio de Leibnitz para series alternadas ya que $1/n$ es una sucesión monótona decreciente y converge a cero.
Si $x = 10$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{9^n}{n9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ que es una serie armónica divergente.
Por tanto, el intervalo de convergencia es $I = [-8, 10)$.