uc3m | Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas

AUTOEVALUACIÓN DE CÁLCULO I - SOLUCIONES

Para Grados en Ingeniería

Capítulo 4: Integración en una variable

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Soluciones del Examen de Autoevaluación - Capítulo 4

PROBLEMA 1. Calcular el siguiente límite expresándolo como una integral:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right].$$

Solución: Usando la definición de integral de Riemann, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right] &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log|1+x|\Big]_{x=0}^{x=1}=\log 2\,.\end{aligned}$$

PROBLEMA 2. Calcular las siguientes integrales

$$\text{a)}\ \int\frac{dx}{3+\sqrt{2x+5}} \qquad \text{b)}\ \int\cos^3 x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx \qquad \text{c)}\ \int_1^{e^2} x\log^2 x\,dx$$

Solución:

a) Haciendo el cambio de variable $t=\sqrt{2x+5}$ tenemos que $t^2=2x+5$, luego $t\,dt=dx$, por lo que

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{3+\sqrt{2x+5}} &= \int\frac{t}{t+3}\,dt=\int\Big(1-\frac{3}{t+3}\Big)\,dt=t-3\log|t+3|+c\\ &= \sqrt{2x+5}-3\log\left|\sqrt{2x+5}+3\right|+c\,.\end{aligned}$$

b) Haciendo el cambio de variable $t=\mathrm{sen}\,x$, tenemos $dt=\cos x\,dx$, con lo que

$$\begin{aligned}\int\cos^3 x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx &= \int\cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x\,\cos x\,dx\\ &= \int t^2(1-t^2)\,dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=\frac{\mathrm{sen}^3 x}{3}-\frac{\mathrm{sen}^5 x}{5}+c\,.\end{aligned}$$

c) Integrando por partes y poniendo $u=\log^2 x$, $dv=x\,dx$, tenemos $du=2\log x\,(1/x)\,dx$, $v=x^2/2$, con lo que

$$\int_1^{e^2} x\log^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\,\log^2 x\right]_{x=1}^{x=e^2}-\int_1^{e^2}\frac{x^2}{2}\,2\log x\,\frac{1}{x}\,dx=2e^4-\int_1^{e^2}x\,\log x\,dx\,. \tag{1}$$

Integrando de nuevo por partes con $u=\log x$, $dv=x\,dx$, tenemos $du=dx/x$, $v=x^2/2$, con lo que

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} x\log^2 x\,dx &= 2e^4-\left[\frac{x^2}{2}\,\log x\right]_{x=1}^{x=e^2}+\int_1^{e^2}\frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx\\ &= 2e^4-e^4+\int_1^{e^2}\frac{x}{2}\,dx=e^4+\left[\frac{x^2}{4}\right]_{x=1}^{x=e^2}=e^4+\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5e^4-1}{4}\,.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3. Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}\,.$$

Solución: Usando el Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal y la Regla de L'Hopital, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4} = \lim_{x\to 0}\cos x\ \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}\,,$$

donde hemos usado el bien conocido límite: $\lim_{t\to 0}(\operatorname{sen} t)/t = 1$.

PROBLEMA 4. Encontrar la función $f(x)$ que satisface la relación

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 t\, f(t)\, dt + \frac{x^2}{2} - \arctan x + C\,.$$

Solución: Derivando ambos miembros de la relación y usando el Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal obtenemos que:

$$f(x) = -x\, f(x) + x - \frac{1}{1+x^2} \implies (1+x)\, f(x) = \frac{x^3+x-1}{1+x^2} \implies f(x) = \frac{x^3+x-1}{(1+x)(1+x^2)}\,.$$

PROBLEMA 5. Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OY el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = x^2$.

Solución: El sólido de revolución se obtiene al extraer el volumen engendrado por la gráfica de $g(x) = x^2$ del volumen engendrado por la gráfica de $f(x) = x$ al girar alrededor del eje OY. Por lo tanto,

$$V = 2\pi\int_0^1 x(x-x^2)\, dx = 2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)\, dx = 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = 2\pi\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{6}\,.$$