CÁLCULO II
Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Capítulo 1. Cálculo diferencial

1.1 Funciones. Límites y continuidad

1.2 Derivadas.

1.3 Funciones vectoriales

1.4 Regla de la cadena

- La **norma** de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$
  La **distancia** entre dos puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ es la norma de su diferencia, es decir, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
  La norma en $\mathbb{R}^n$ verifica propiedades similares al valor absoluto en $\mathbb{R}$ (coincide con él si $n = 1$):

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0\,, \quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|\,, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.$$

- Bola abierta $B(\mathbf{x}_0, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\right\}.$
  Bola cerrada $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\right\}.$

- La **norma** de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$
  La **distancia** entre dos puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ es la norma de su diferencia, es decir, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.
  La norma en $\mathbb{R}^n$ verifica propiedades similares al valor absoluto en $\mathbb{R}$ (coincide con él si $n = 1$):

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0\,, \quad \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|\,, \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\,.$$

- Bola abierta $B(\mathbf{x}_0, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\right\}.$
  Bola cerrada $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq r\right\}.$

- Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para todo $\mathbf{x} \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U$.
  Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.
- La **frontera** ∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (no tienen por qué estar en E) tales que toda bola centrada en $\mathbf{x}$ contiene algún punto de E y algún punto de E^c.
  Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.

- Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para todo $\mathbf{x} \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U$.
  Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.
- La **frontera** ∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ (no tienen por qué estar en E) tales que toda bola centrada en $\mathbf{x}$ contiene algún punto de E y algún punto de E^c.
  Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.

- El **interior** de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos $\mathbf{x}$ de E para los que existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq E$. O también: $E \setminus \partial E$.
  La **clausura** $\overline{E}$ de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es $\overline{E} = E \cup \partial E$.
- Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe un $r > 0$ tal que $E \subseteq B(\mathbf{0}, r)$.
  Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado.

- El **interior** de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos $\mathbf{x}$ de E para los que existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq E$. O también: $E \setminus \partial E$.
  La **clausura** $\overline{E}$ de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es $\overline{E} = E \cup \partial E$.
- Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe un $r > 0$ tal que $E \subseteq B(\mathbf{0}, r)$.
  Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado.

- Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es un conjunto compacto.
- También es fácil ver que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

- Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es un conjunto compacto.
- También es fácil ver que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Una **función** es una regla que hace corresponder un punto de $\mathbb{R}^m$ y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se escribe

$$\begin{array}{rccc} f: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}) \end{array}$$

- El **dominio** de f es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.
  La **imagen** de una función es el conjunto de los puntos $\mathbf{y}$ tales que existe un punto $\mathbf{x}$ con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, y se denota por $\mathrm{Img}(f)$.
  La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos:
  $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

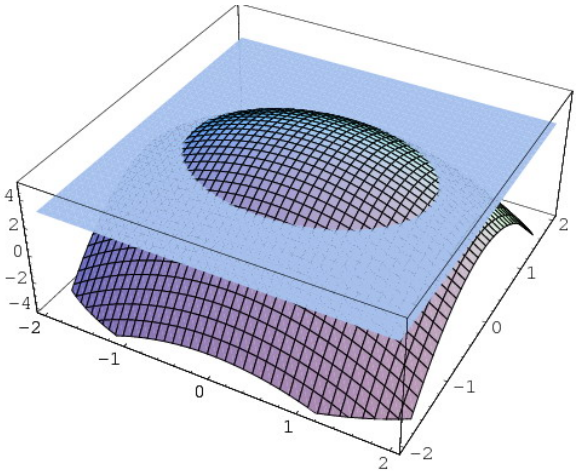
Una **función** es una regla que hace corresponder un punto de $\mathbb{R}^m$ y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se escribe

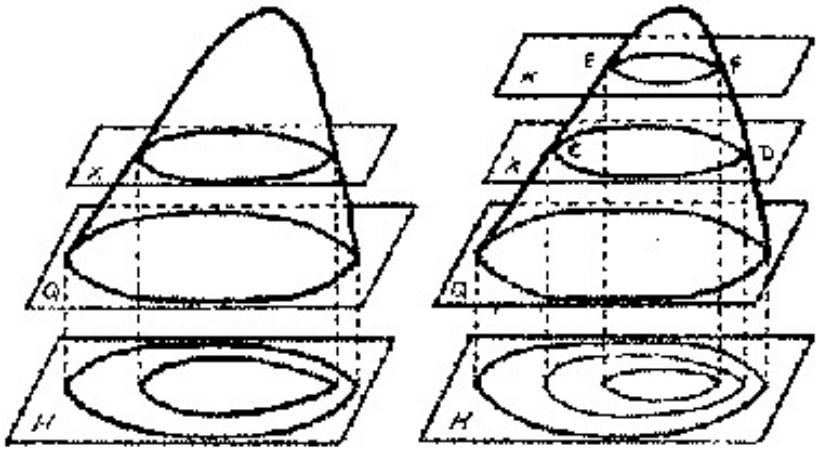
$$\begin{array}{rccc} f: & A \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}) \end{array}$$

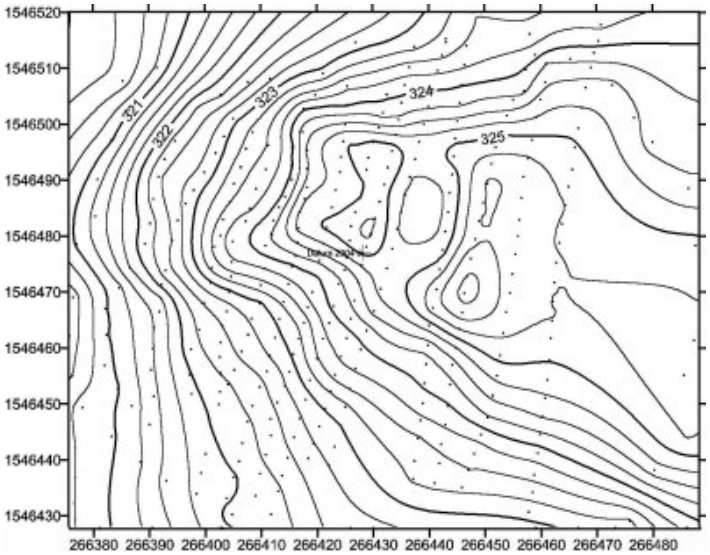
- El **dominio** de f es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.
  La **imagen** de una función es el conjunto de los puntos $\mathbf{y}$ tales que existe un punto $\mathbf{x}$ con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, y se denota por $\mathrm{Img}(f)$.
  La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos:
  $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

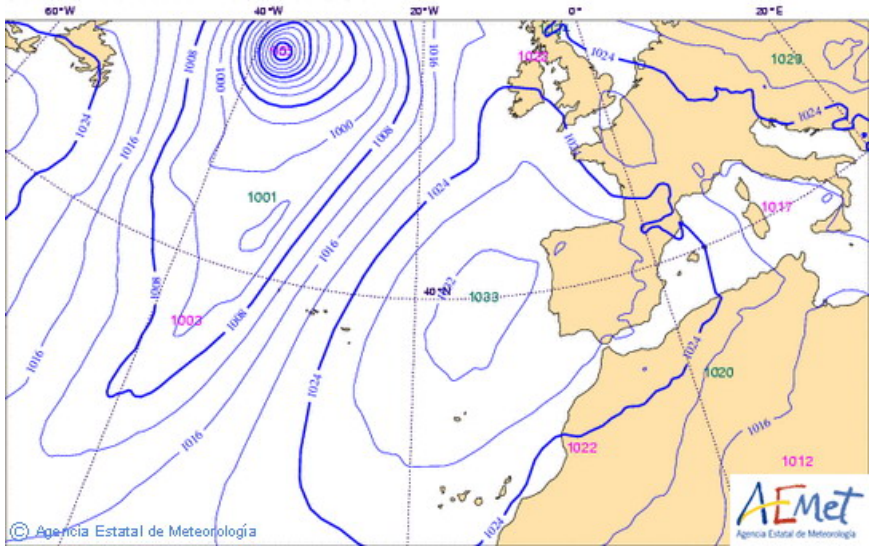
- Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, el **conjunto de nivel** de valor c es el conjunto de puntos $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, hablamos de **curva de nivel** de valor c, y si $n = 3$, hablamos de **superficie de nivel** de valor c.

- Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, el **conjunto de nivel** de valor c es el conjunto de puntos $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, hablamos de **curva de nivel** de valor c, y si $n = 3$, hablamos de **superficie de nivel** de valor c.






1546520
1546510
1546500
1546490
1546480
1546470
1546460
1546450
1546440
1546430
266380 266390 266400 266410 266420 266430 266440 266450 266460 266470 266480
321
322
323
324
325


60°W
40°W
20°W
0°
20°E
1001
1003
1033
1029
1020
1022
1012
© Agencia Estatal de Meteorología
AEMet
Agencia Estatal de Meteorología

Sea una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el **límite** de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x_0}$, y lo escribimos $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon \ \text{ si } \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta.$$

- Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ si y sólo si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Si el límite existe entonces es único.

Sea una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el **límite** de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x_0}$, y lo escribimos $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon \ \text{ si } \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta.$$

- Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ si y sólo si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Si el límite existe entonces es único.

Sea una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el **límite** de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x_0}$, y lo escribimos $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon \ \text{ si } \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta.$$

- Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = \ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_m)$ si y sólo si $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Si el límite existe entonces es único.

Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x})$, entonces:

(1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \big(cf(\mathbf{x})\big) = c\big(\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})\big)\,.$

(2) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \big(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\big) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x})\,.$

(3) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \big(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\big) = \big(\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})\big)\big(\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x})\big)\,, \quad \text{si } m = 1\,.$

(4) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x})}\,, \quad \text{si } m = 1, \text{ y } \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x}) \neq 0\,.$

(5) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \big(f(\mathbf{x})\big)^{g(\mathbf{x})} = \big(\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})\big)^{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} g(\mathbf{x})}\,,$

si $m = 1$ y todas las expresiones tienen sentido.

Dos técnicas para estudiar límites.

- Caso $n = 2$ y $m = 1$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ dependen de θ, entonces **no existe** el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
  Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ no dependen de θ, entonces **no se puede afirmar nada** sobre la existencia del límite.
  De manera equivalente estudiar el límite a lo largo de rectas, $y = \lambda x$.
  Si el punto en el queremos estudiar el límite es $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$, entonces se tiene un resultado similar, pero lo más fácil es realizar una traslación (un cambio de variables $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$).
- Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de $\mathbf{x_0}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

Dos técnicas para estudiar límites.

- Caso $n = 2$ y $m = 1$. Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ dependen de θ, entonces **no existe** el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
  Si los límites $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ no dependen de θ, entonces **no se puede afirmar nada** sobre la existencia del límite.
  De manera equivalente estudiar el límite a lo largo de rectas, $y = \lambda x$.
  Si el punto en el queremos estudiar el límite es $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$, entonces se tiene un resultado similar, pero lo más fácil es realizar una traslación (un cambio de variables $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$).
- Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de $\mathbf{x_0}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x_0} \in A$. Se dice que f es **continua** en el punto $\mathbf{x_0}$ si $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$.

- Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x_0}$ si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x_0} \in A$. Se dice que f es **continua** en el punto $\mathbf{x_0}$ si $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$.

- Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x_0}$ si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Teorema

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, y sea $\mathbf{x_0} \in A$, con $f(\mathbf{x_0} \in B$. Si f es continua en $\mathbf{x_0}$ y g es continua en $f(\mathbf{x_0})$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es continua en $\mathbf{x_0}$.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f está acotada en A. Más aún, existen los valores máximo y mínimo de f en A.

Teorema

Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, y sea $\mathbf{x_0} \in A$, con $f(\mathbf{x_0} \in B$. Si f es continua en $\mathbf{x_0}$ y g es continua en $f(\mathbf{x_0})$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es continua en $\mathbf{x_0}$.

Teorema

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f está acotada en A. Más aún, existen los valores máximo y mínimo de f en A.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. La **derivada parcial** $\partial f / \partial x_j$ de f con respecto a la variable x_j es

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} \,,\end{aligned}$$

donde $1 \leq j \leq n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica;

- La derivada parcial de f con respecto a la variable x_j es simplemente la derivada "usual" de f con respecto a la variable x_j, si se supone que el resto de las variables son constantes.

- Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, entonces $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, y podemos hablar de la derivada parcial $\partial f_i / \partial x_j$ de la componente i-ésima de f con respecto a la variable x_j.

Definición.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que existan las derivadas parciales con respecto a todas las variables x_j. El vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right),$$

se denomina **gradiente** de f en $\mathbf{x}$.

- El plano tangente a la gráfica de la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in U$ se define como

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

- Es decir, es el plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la gráfica de f y tiene por vector característico el vector

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,, -1\right).$$

- El plano tangente a la gráfica de la función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $(x_0, y_0) \in U$ se define como

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.$$

- Es decir, es el plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la gráfica de f y tiene por vector característico el vector

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,, -1\right).$$

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si existen $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0) y si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0\,.$$

- Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es **diferenciable** en $\mathbf{x}_0$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0\,,$$

  donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ cuyo elemento en la fila i y columna j es $\partial f_i / \partial x_j$ evaluada en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (considerado como matriz columna).
- Llamamos a $\mathbf{T}$ la **derivada** o **diferencial** o **matriz jacobiana** de f en $\mathbf{x}_0$.

- Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es **diferenciable** en $\mathbf{x}_0$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0\,,$$

  donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ cuyo elemento en la fila i y columna j es $\partial f_i / \partial x_j$ evaluada en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (considerado como matriz columna).
- Llamamos a $\mathbf{T}$ la **derivada** o **diferencial** o **matriz jacobiana** de f en $\mathbf{x}_0$.

Propiedades de la diferenciabilidad:

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f y g son diferenciables en $\mathbf{x}_0$, entonces:

- $cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(cf)(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$.
- $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(f+g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.
- $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$, y $\mathbf{D}(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.
- $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$ y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, y

$$\mathbf{D}\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)^2}\,.$$

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

¡ATENCION!

Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\mathbf{x}_0$, y que la función no sea continua en $\mathbf{x}_0$. Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la "correcta".

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

¡ATENCION!

Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\mathbf{x}_0$, y que la función no sea continua en $\mathbf{x}_0$. Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la "correcta".

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

¡ATENCION!

Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\mathbf{x}_0$, y que la función no sea continua en $\mathbf{x}_0$. Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la "correcta".

Teorema

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Dada una función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, llamamos matriz derivada, o **matriz jacobiana**, a la matriz $DF \in \mathcal{M}^{m\times n}$ tal que el elemento a_{ij} es la derivada $j-$ésima de la componente $i-$ésima de F, $a_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

$$DF = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \cdots & \partial F_1/\partial x_n \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \cdots & \partial F_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_m/\partial x_1 & \partial F_m/\partial x_2 & \cdots & \partial F_m/\partial x_n \end{pmatrix}$$

Dada una función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, llamamos matriz derivada, o **matriz jacobiana**, a la matriz $DF \in \mathcal{M}^{m\times n}$ tal que el elemento a_{ij} es la derivada $j-$ésima de la componente $i-$ésima de F, $a_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

$$DF = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & \cdots & \partial F_1/\partial x_n \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & \cdots & \partial F_2/\partial x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F_m/\partial x_1 & \partial F_m/\partial x_2 & \cdots & \partial F_m/\partial x_n \end{pmatrix}$$

Dada una función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, llamamos matriz derivada, o **matriz jacobiana**, a la matriz $DF \in \mathcal{M}^{m\times n}$ tal que el elemento a_{ij} es la derivada $j-$ésima de la componente $i-$ésima de F, $a_{ij} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

Si $m = 1$ la matriz se reduce a un vector, de n coordenadas, llamado también gradiente.

$$DF = \nabla F = (\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \cdots, \partial F/\partial x_n).$$

Una **trayectoria** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una trayectoria en el plano, y si $n = 3$ es una trayectoria en el espacio. Llamamos **curva** a la imagen de c en $\mathbb{R}^n$.

Si $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, definimos la **velocidad** de c como $c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, y la **aceleración** de c como $c''(t) = (x_1''(t), \ldots, x_n''(t))$. Llamamos **rapidez** de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.

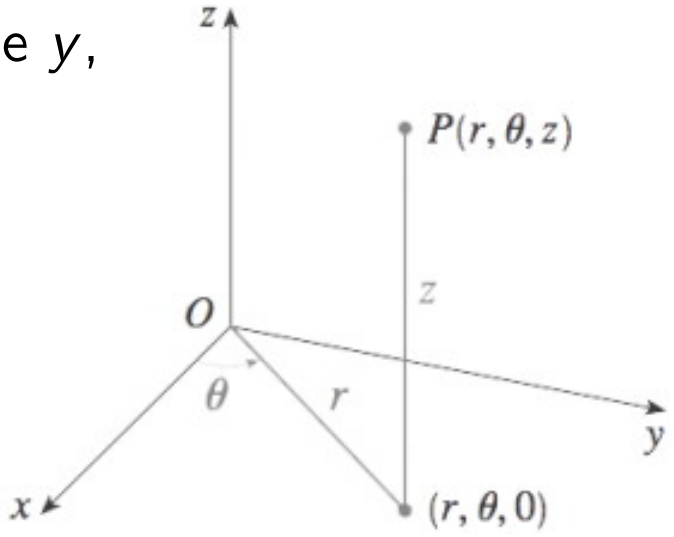
Una **trayectoria** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una trayectoria en el plano, y si $n = 3$ es una trayectoria en el espacio. Llamamos **curva** a la imagen de c en $\mathbb{R}^n$.

Si $c(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, definimos la **velocidad** de c como $c'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, y la **aceleración** de c como $c''(t) = (x_1''(t), \ldots, x_n''(t))$. Llamamos **rapidez** de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.

Coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$
$$r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}.$$

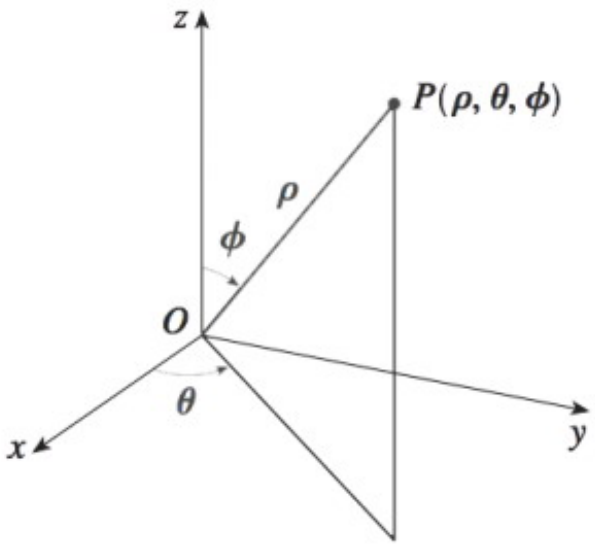
(coordenadas polares en las variables x e y,
mientras la variable z
se mantiene invariable)



Coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho\cos\phi,$$
$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \phi \in [0, \pi].$$

(coordenadas polares r y θ
en las variables x e y,
con $r = \rho \operatorname{sen}\phi$,
y coordenadas polares ρ y ϕ
en las variables z y r)



Otras coordenadas esféricas

Si el ángulo vertical se mide desde el plano horizontal, las coordenadas esféricas son

$$x = \rho \cos\theta \cos\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad z = \rho \operatorname{sen}\phi,$$
$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \phi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

(coordenadas polares r y θ en las variables x e y, con $r = \rho\cos\phi$, y coordenadas polares ρ y ϕ en las variables r y z)

- Para una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, escribimos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

Teorema

Para una función con derivadas segundas continuas, las derivadas segundas cruzadas son iguales. Es decir $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$

- Para una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, escribimos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$$

Teorema

Para una función con derivadas segundas continuas, las derivadas segundas cruzadas son iguales. Es decir $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$

- Definimos la **divergencia** de $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (es decir, $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$) como

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \ .$$

(la traza de la matriz jacobiana)

- Definimos el **rotacional** de $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (es decir, $F = (F_1, F_2, F_3)$) como

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$
$$= \Big(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big).$$

- Definimos la matriz **hessiana** de $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como la matriz de derivadas segundas (simétrica, si éstas son continuas)

$$HF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- Definimos el **laplaciano** de $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Delta F = \operatorname{div} \operatorname{grad} F = \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \, .$$

(la traza de la matriz hessiana)

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y g es diferenciable en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y

$$\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{D}g)(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\,.$$

- **Ejemplo 1.** Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Si definimos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(t) = f(g(t))$, entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y g es diferenciable en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y

$$\mathbf{D}\big(g \circ f\big)(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{D}g)(f(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\,.$$

- **Ejemplo 1.** Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Si definimos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(t) = f(g(t))$, entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\,.$$

- **Ejemplo 2.** Si $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir

$$g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

Si definimos $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ por
$h(x, y, z) = f(g(x, y, z)) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$,
entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

- Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. La **derivada direccional** de f en $\mathbf{x}_0$ a lo largo del vector $\mathbf{v}$ se define como

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} .$$

Habitualmente se elige el vector $\mathbf{v}$ unitario (con norma 1). En este caso se habla de la **derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$**, $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces existen todas las derivadas direccionales de f en $\mathbf{x}_0$. Además, la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$ es $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}$.

Teorema

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es máxima y $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es mínima (f crece más rápidamente desde $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$).

Teorema

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema

Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es máxima y $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es mínima (f crece más rápidamente desde $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$).