CÁLCULO II
Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García
———————
Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Capítulo 3. Integración en $\mathbb{R}^n$

- Un **rectángulo n-dimensional** es un conjunto de la forma:

  $$R = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n], \quad \text{con } a_i < b_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n.$$

- La **medida** (n-dimensional) de R es

  $$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

- Habitualmente la dimensión será $n = 2$ ó $n = 3$.
- Si $n = 2$, la medida de R es el área de R.
- Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R.

- Un **rectángulo n-dimensional** es un conjunto de la forma:

  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad$ con $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

- La **medida** (n-dimensional) de R es

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

- Habitualmente la dimensión será $n = 2$ ó $n = 3$.
- Si $n = 2$, la medida de R es el área de R.
- Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R.

- Un **rectángulo n-dimensional** es un conjunto de la forma:

  $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, con $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

- La **medida** (n-dimensional) de R es

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

- Habitualmente la dimensión será $n = 2$ ó $n = 3$.
- Si $n = 2$, la medida de R es el área de R.
- Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R.

- Una **partición** P del rectángulo n-dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que R es la unión de subrectángulos $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$.
- Sea f una función acotada en un rectángulo n-dimensional R y $P = \{R_i\}_{i=1}^{N}$ una partición de R. Definimos las siguientes cantidades para $i = 1, \ldots, N$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in R_i\}, \qquad m_i = \inf\{f(x) : x \in R_i\}.$$

- La **suma superior** asociada a P de f y la **suma inferior** asociada a P de f son respectivamente

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i |R_i|, \qquad L_f(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i |R_i|.$$

- Una **partición** P del rectángulo n-dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que R es la unión de subrectángulos $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$.
- Sea f una función acotada en un rectángulo n-dimensional R y $P = \{R_i\}_{i=1}^{N}$ una partición de R. Definimos las siguientes cantidades para $i = 1, \ldots, N$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in R_i\}\,, \qquad m_i = \inf\{f(x) : x \in R_i\}\,.$$

- La **suma superior** asociada a P de f y la **suma inferior** asociada a P de f son respectivamente

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i |R_i|\,, \qquad L_f(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i |R_i|\,.$$

- Una **partición** P del rectángulo n-dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que R es la unión de subrectángulos $R = \bigcup_{i=1}^{N} R_i$.
- Sea f una función acotada en un rectángulo n-dimensional R y $P = \{R_i\}_{i=1}^N$ una partición de R. Definimos las siguientes cantidades para $i = 1, \ldots, N$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in R_i\}\,, \qquad m_i = \inf\{f(x) : x \in R_i\}\,.$$

- La **suma superior** asociada a P de f y la **suma inferior** asociada a P de f son respectivamente

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{N} M_i |R_i|\,, \qquad L_f(P) = \sum_{i=1}^{N} m_i |R_i|\,.$$

Teorema

$$f \text{ función acotada en } R \implies \sup_P L_f(P) \leq \inf_P U_f(P)\,.$$

Definición

Si f es una función acotada en R, decimos que f es **integrable** en R si existe un número real I verificando

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I$$

El número I se llama la **integral (definida)** de f en R, y se escribe:

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Teorema

$$f \text{ función acotada en } R \implies \sup_P L_f(P) \leq \inf_P U_f(P)\,.$$

Definición

Si f es una función acotada en R, decimos que f es **integrable** en R si existe un número real I verificando

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I$$

El número I se llama la **integral (definida)** de f en R, y se escribe:

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

Nota:

También será frecuente la notación:

$$I = \int_R f == \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n\,.$$

Teorema

Si f es una función acotada en R y existe una sucesión de particiónes $\{P_n\}$ de R tales que

$$\lim_{n\to\infty} U_f(P_n) = \lim_{n\to\infty} L_f(P_n) = \alpha\,,$$

entonces f es integrable en R y además $\displaystyle\int_R f = \alpha\,.$

Nota:

También será frecuente la notación:

$$I = \int_R f == \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \,.$$

Teorema

Si f es una función acotada en R y existe una sucesión de particiónes $\{P_n\}$ de R tales que

$$\lim_{n\to\infty} U_f(P_n) = \lim_{n\to\infty} L_f(P_n) = \alpha \,,$$

entonces f es integrable en R y además $\displaystyle\int_R f = \alpha \,.$

Teorema

Si f es una función continua en R entonces f es integrable en R.

Teorema de Fubini

Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = R_1 \times R_2$ un rectángulo n-dimensional, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función integrable en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x,y)\, dx \right) dy \,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \ldots, x_n)$.

Teorema

Si f es una función continua en R entonces f es integrable en R.

Teorema de Fubini

Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = R_1 \times R_2$ un rectángulo n-dimensional, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función integrable en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \Big(\int_{R_2} f(x, y)\, dy \Big)\, dx = \int_{R_2} \Big(\int_{R_1} f(x, y)\, dx \Big)\, dy \,,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Ejemplo de integral doble,

$$\int_1^3 \int_0^1 x\, e^{5y}\, dxdy = \int_1^3 \left(\int_0^1 x\, e^{5y}\, dx \right) dy =$$
$$\int_1^3 \left(\frac{1}{2}\, e^{5y} \right) dy = \frac{1}{10}(e^{15} - e^5).$$

- Si D es una región acotada en $\mathbb{R}^n$ y f es una función acotada en D se define la **integral de f en D** como

$$\int_D f = \int_R f^* ,$$

donde:

- R es cualquier rectángulo n-dimensional que contenga a D,
- f^* es la función definida en todo $\mathbb{R}^n$ como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D . \end{cases}$$

- Si D es una región acotada en $\mathbb{R}^n$ y f es una función acotada en D se define la **integral de** f **en** D como

$$\int_D f = \int_R f^*,$$

donde:

- R es cualquier rectángulo n-dimensional que contenga a D,
- f^* es la función definida en todo $\mathbb{R}^n$ como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D\,. \end{cases}$$

- Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o numerable de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots$ tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon\,.$$

- Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

- Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o numerable de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots$ tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon\,.$$

- Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

- Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o numerable de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots$ tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon \,.$$

- Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

- Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o numerable de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \dots$ tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon\,.$$

- Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

- Un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ se dice que tiene **medida cero** (n-dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito o numerable de rectángulos n-dimensionales $R_1, R_2, \ldots$ tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \qquad \text{y} \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots < \varepsilon\,.$$

- Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene "dimensión" menor que n, entonces $|A| = 0$.

Por tanto,

- La unión finita o numerable de curvas en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \geq 2$.
- La unión finita o numerable de superficies en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \geq 3$.

Por tanto,

- La unión finita o numerable de curvas en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \geq 2$.
- La unión finita o numerable de superficies en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero si $n \geq 3$.

Teorema

- Sea f una función acotada en el rectángulo R. Entonces f es integrable en R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en R tiene medida cero.
- Sea f una función acotada en la región acotada D con $|\partial D| = 0$. Entonces f es integrable en D si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en D tiene medida cero.

Teorema

- Sea f una función acotada en el rectángulo R. Entonces f es integrable en R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en R tiene medida cero.
- Sea f una función acotada en la región acotada D con $|\partial D| = 0$. Entonces f es integrable en D si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en D tiene medida cero.

Teorema

Si f, g son funciones integrables en la región acotada D y $c \in \mathbb{R}$, entonces

- $f+g$ es integrable en D, y $\displaystyle\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$,
- cf es integrable en D, y $\displaystyle\int_D cf = c\int_D f$,
- $|f|$ es integrable en D, y $\displaystyle\int_D |f| \geq \left|\int_D f\right|$,
- $f\,g$ es integrable en D, y

$$\Big(\int_D f\,g\Big)^2 \leq \Big(\int_D f^2\Big)\Big(\int_D g^2\Big).$$

Definición

- Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$.
- Por tanto, si $D \subset \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_D 1$ es el área de D,

  si $D \subset \mathbb{R}^3$, $\displaystyle\int_D 1$ es el volumen de D.

Definición

- Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$.
- Por tanto, si $D \subset \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_D 1$ es el área de D,

  si $D \subset \mathbb{R}^3$, $\displaystyle\int_D 1$ es el volumen de D.

Teorema

Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero, entonces
$$\int_D f = \int_D g \, .$$

Teorema

Si f es integrable en la región acotada D y $m \leq f(x) \leq M$ salvo para un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces
$$m\,|D| \leq \int_D f \leq M\,|D| \, .$$

Teorema

Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero, entonces

$$\int_D f = \int_D g\,.$$

Teorema

Si f es integrable en la región acotada D y $m \leq f(x) \leq M$ salvo para un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces

$$m\,|D| \leq \int_D f \leq M\,|D|\,.$$

Corolario

Sean f, g funciones integrables en la región acotada D.

- Si $f(x) \geq 0$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces
$$\int_D f \geq 0.$$
- Si $f(x) \geq g(x)$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces
$$\int_D f \geq \int_D g.$$

Corolario

Sean f, g funciones integrables en la región acotada D.

- Si $f(x) \geq 0$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces

$$\int_D f \geq 0.$$

- Si $f(x) \geq g(x)$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, entonces

$$\int_D f \geq \int_D g.$$

Teorema

Sea f una función integrable en la región acotada D. Si $f(x) \geq 0$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero, y existe un punto $x_0 \in D$ con f continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_D f > 0\,.$$

Teorema (Teorema del valor medio de la integral)

Sean f continua en la región acotada D y $g(x) \geq 0$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero. Si f y g son integrables en D, entonces:

- Existe $c_1 \in D$ tal que $\dfrac{1}{|D|} \displaystyle\int_D f = f(c_1)$.
- Existe $c_2 \in D$ tal que $\displaystyle\int_D fg = f(c_2) \int_D g$.

Teorema (Teorema del valor medio de la integral)

Sean f continua en la región acotada D y $g(x) \geq 0$ salvo en un conjunto de puntos $x \in D$ con medida cero. Si f y g son integrables en D, entonces:

- Existe $c_1 \in D$ tal que $\dfrac{1}{|D|} \displaystyle\int_D f = f(c_1)$.
- Existe $c_2 \in D$ tal que $\displaystyle\int_D fg = f(c_2) \int_D g$.

Teorema

Sean D una región acotada y f una función definida en D. Si D es la unión de las regiones de interiores disjuntos $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$, con $|\partial D_i| = 0$ para $i = 1, \ldots, k$, entonces f es integrable en D si y sólo si es integrable en D_i para $i = 1, \ldots, k$. Además se tiene que

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{k} \int_{D_i} f \, .$$

Definición

Una región $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **simétrica con respecto a la variable** x_j $(1 \leq j \leq n)$ si verifica la siguiente propiedad:

$$(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \in D \quad \text{si y sólo si} \quad (x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_n) \in D.$$

Definición

Una función f definida en D se dice **impar en** x_j si

$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$$

y se dice **par en** x_j si

$$f(x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)\,.$$

Definición

Una región $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **simétrica con respecto a la variable** x_j $(1 \leq j \leq n)$ si verifica la siguiente propiedad:

$$(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in D \quad \text{si y sólo si} \quad (x_1, \dots, -x_j, \dots, x_n) \in D.$$

Definición

Una función f definida en D se dice **impar en** x_j si

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

y se dice **par en** x_j si

$$f(x_1, \dots, -x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)\,.$$

Teorema

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ una región simétrica con respecto a la variable x_j (para algún $1 \leq j \leq n$) y f una función integrable en D.

- Si f es impar en la variable x_j, entonces $\int_D f = 0$.
- Si f es par en la variable x_j y se define

$$D_j = \{x \in D : x_j \geq 0\},$$

entonces

$$\int_D f = 2 \int_{D_j} f.$$

Teorema

Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ una región simétrica con respecto a la variable x_j (para algún $1 \le j \le n$) y f una función integrable en D.

- Si f es impar en la variable x_j, entonces $\displaystyle\int_D f = 0$.
- Si f es par en la variable x_j y se define

$$D_j = \{x \in D : \ x_j \ge 0\},$$

entonces

$$\int_D f = 2 \int_{D_j} f.$$

Teorema (Teorema de cambio de variable)

Sean D^* y D regiones de $\mathbb{R}^n$ y $T : D^* \longrightarrow D$ una transformación biyectiva de clase C^1. Entonces para toda f integrable en D se tiene

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D^*} f(T(u))\,|JT(u)|\,du\,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $JT(u)$ es el determinante de la matriz derivada de T.

Observación 2

Si T^{-1} es la inversa de T, entonces $(JT)(JT^{-1}) = 1$.

Teorema (Teorema de cambio de variable)

Sean D^* y D regiones de $\mathbb{R}^n$ y $T : D^* \longrightarrow D$ una transformación biyectiva de clase C^1. Entonces para toda f integrable en D se tiene

$$\int_D f(x)\, dx = \int_{D^*} f(T(u))\, |JT(u)|\, du\,,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $JT(u)$ es el determinante de la matriz derivada de T.

Observación 2

Si T^{-1} es la inversa de T, entonces $(JT)(JT^{-1}) = 1$.

- Volumen de un cuerpo D,

$$V = \iiint_D 1\, dxdydz$$

- Masa de un cuerpo D con densidad $\rho(x, y, z)$,

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

- Valor promedio de una función f en una región D

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1}.$$

- Volumen de un cuerpo D,

$$V = \iiint_D 1\, dxdydz$$

- Masa de un cuerpo D con densidad $\rho(x, y, z)$,

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

- Valor promedio de una función f en una región D

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1}.$$

- Volumen de un cuerpo D,

$$V = \iiint_D 1 \, dxdydz$$

- Masa de un cuerpo D con densidad $\rho(x, y, z)$,

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dxdydz$$

- Valor promedio de una función f en una región D

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1} \, .$$

Centro de gravedad

Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **centro de gravedad** o **centro de masa** (denotado por $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$), como

$$\overline{x} = \frac{1}{M} \iiint_D x\, \rho(x, y, z)\, dxdydz\,,$$
$$\overline{y} = \frac{1}{M} \iiint_D y\, \rho(x, y, z)\, dxdydz\,,$$
$$\overline{z} = \frac{1}{M} \iiint_D z\, \rho(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

donde M es la **masa** del cuerpo.

Momento de inercia

Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **momento de inercia respecto del eje E** (denotado por I_E) como

$$I_E = \iiint_D \operatorname{dist}\left((x, y, z), E\right)^2 \rho(x, y, z)\, dxdydz\,,$$

donde $\operatorname{dist}\left((x, y, z), E\right)$ es la distancia del punto (x, y, z) al eje E. Recordemos que $\operatorname{dist}\left((x, y, z), X\right)^2 = y^2 + z^2$, $\operatorname{dist}\left((x, y, z), Y\right)^2 = x^2 + z^2$ y $\operatorname{dist}\left((x, y, z), Z\right)^2 = x^2 + y^2$.