CÁLCULO II
Grados en Ingeniería

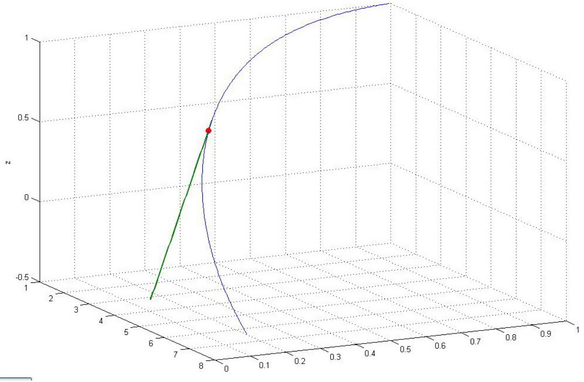
Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García
—————
Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Capítulo 4. Integrales de línea y de superficie

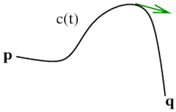
- Una curva (o trayectoria) $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **regular** si es diferenciable y $\sigma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En este caso se define la **recta tangente** r a σ en el punto $\sigma(t_0)$, con $t_0 \in [a, b]$, (en forma paramétrica) como $r(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$.
- Una curva $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **simple** si es inyectiva en $[a, b]$, es decir, si $\sigma(t_0) \neq \sigma(t_1)$ siempre que $t_0 \neq t_1$. Se dice que σ es **cerrada** si $\sigma(a) = \sigma(b)$. Se dice que σ es **cerrada simple** si es cerrada y es inyectiva en $[a, b)$.

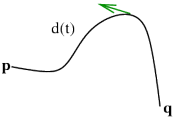
- Una curva (o trayectoria) $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **regular** si es diferenciable y $\sigma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. En este caso se define la **recta tangente** r a σ en el punto $\sigma(t_0)$, con $t_0 \in [a, b]$, (en forma paramétrica) como $r(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$.
- Una curva $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **simple** si es inyectiva en $[a, b]$, es decir, si $\sigma(t_0) \neq \sigma(t_1)$ siempre que $t_0 \neq t_1$. Se dice que σ es **cerrada** si $\sigma(a) = \sigma(b)$. Se dice que σ es **cerrada simple** si es cerrada y es inyectiva en $[a, b)$.

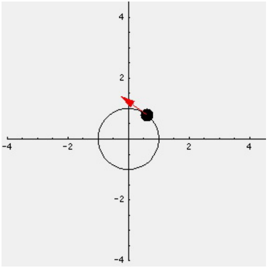

1
0.5
0
-0.5
z
1
2
3
4
5
6
7
8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

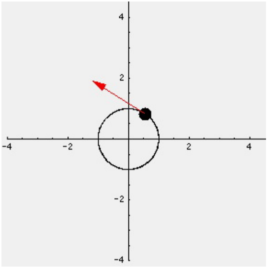
- Sea $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva simple. Decimos que $\rho : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **reparametrización** de σ (o que σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva) si existe una función continua e inyectiva $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ tal que $\rho = \sigma \circ h$. Decimos también que σ y ρ tienen la misma orientación si h es creciente y tienen distinta orientación si h es decreciente.
- Si σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva simple y no cerrada, σ y ρ tienen la misma orientación si y sólo si comienzan en el mismo punto, es decir, si $\sigma(a) = \rho(\alpha)$ (y por tanto, $\sigma(b) = \rho(\beta)$).

- Sea $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva simple. Decimos que $\rho : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **reparametrización** de σ (o que σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva) si existe una función continua e inyectiva $h : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ tal que $\rho = \sigma \circ h$. Decimos también que σ y ρ tienen la misma orientación si h es creciente y tienen distinta orientación si h es decreciente.
- Si σ y ρ son parametrizaciones de la misma curva simple y no cerrada, σ y ρ tienen la misma orientación si y sólo si comienzan en el mismo punto, es decir, si $\sigma(a) = \rho(\alpha)$ (y por tanto, $\sigma(b) = \rho(\beta)$).


c(t)
p
q


d(t)
p
q


4
2
-4
-2
2
4
-2
-4


4
2
-4
-2
2
4
-2
-4

- Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **continua a trozos** si existen $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = b$, tales que f es continua en cada (t_i, t_{i+1}) y existen los límites laterales de $f(t)$ en cada t_i, aunque no tienen por qué coincidir. (En t_0 sólo se pide que exista el límite por la derecha y en t_M que exista el límite por la izquierda).
- Una curva $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 **a trozos** si σ' es continua a trozos en $[a, b]$.
- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que una función definida en Ω es una **función escalar** si toma valores reales, y que es un **campo vectorial** si toma valores en $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que el dominio y la imagen de un campo vectorial tienen la misma dimensión.

- Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **continua a trozos** si existen $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = b$, tales que f es continua en cada (t_i, t_{i+1}) y existen los límites laterales de $f(t)$ en cada t_i, aunque no tienen por qué coincidir. (En t_0 sólo se pide que exista el límite por la derecha y en t_M que exista el límite por la izquierda).
- Una curva $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 **a trozos** si σ' es continua a trozos en $[a, b]$.
- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que una función definida en Ω es una **función escalar** si toma valores reales, y que es un **campo vectorial** si toma valores en $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que el dominio y la imagen de un campo vectorial tienen la misma dimensión.

- Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **continua a trozos** si existen $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{M-1} < t_M = b$, tales que f es continua en cada (t_i, t_{i+1}) y existen los límites laterales de $f(t)$ en cada t_i, aunque no tienen por qué coincidir. (En t_0 sólo se pide que exista el límite por la derecha y en t_M que exista el límite por la izquierda).
- Una curva $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 **a trozos** si σ' es continua a trozos en $[a, b]$.
- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que una función definida en Ω es una **función escalar** si toma valores reales, y que es un **campo vectorial** si toma valores en $\mathbb{R}^n$. Obsérvese que el dominio y la imagen de un campo vectorial tienen la misma dimensión.

Definición (Integral de una función escalar sobre una curva)

Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es C^1 a trozos y $f : \sigma([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua a trozos, se define **la integral de f a lo largo de σ**, también llamada **integral de trayectoria**, como

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt$$
$$= \int_a^b f(x_1(t),\ldots,x_n(t))\sqrt{(x_1'(t))^2+\cdots+(x_n'(t))^2}\,dt\,.$$

La integral curvilínea de la función escalar f también suele denotarse por $\int_\sigma f\,ds$ ó $\int_\sigma f(x_1,\ldots,x_n)\,ds$.

- En particular, se define la **longitud de σ** como la integral de la función 1 a lo largo de σ, es decir,

$$\ell(\sigma) = \int_\sigma 1 = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt\,.$$

- El **valor promedio** de f a lo largo de σ como

$$\frac{1}{\ell(\sigma)} \int_\sigma f = \frac{1}{\ell(\sigma)} \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\, dt\,.$$

- En particular, se define la **longitud de** σ como la integral de la función 1 a lo largo de σ, es decir,

$$\ell(\sigma) = \int_\sigma 1 = \int_a^b \|\sigma'(t)\| \, dt \, .$$

- El **valor promedio** de f a lo largo de σ como

$$\frac{1}{\ell(\sigma)} \int_\sigma f = \frac{1}{\ell(\sigma)} \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt \, .$$

Definición (Integral de un campo vectorial sobre una curva)

Si $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es C^1 a trozos y $\vec{F} : \sigma([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua a trozos, se define **la integral de $\vec{F}$ a lo largo de σ**, también llamada **integral de línea**, como

$$\int_\sigma \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt = \int_a^b \vec{F}(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar usual. La integral curvilínea del campo vectorial $\vec{F}$ también suele denotarse por $\int_\sigma \vec{F} \cdot ds$ ó $\int_\sigma \vec{F}(x_1, \ldots, x_n) \cdot ds$ o también $\int_\sigma F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n$, si $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$.

Observación

La integral del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo de σ es igual a la integral de una función escalar, la componente tangente a σ de $\vec{F}$ a lo largo de σ, es decir, $F_T = \vec{F} \cdot s$, donde s es el vector tangente unitario $s(t) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ a la curva σ

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot ds = \int_\sigma F_T \, ds$$

Teorema

La integral de un campo escalar a lo largo de una curva simple es independiente de la parametrización, es decir, si σ, ρ son parametrizaciones C^1 a trozos de la misma curva simple en $\mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_\sigma f = \int_\rho f \,.$$

Teorema

Sean σ, ρ parametrizaciones C^1 a trozos de la misma curva simple en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Entonces:

- Si σ y ρ tienen la misma orientación

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot ds = \int_\rho \vec{F} \cdot ds \,.$$

- Si σ y ρ tienen distinta orientación

$$\int_\sigma \vec{F} \cdot ds = -\int_\rho \vec{F} \cdot ds \,.$$

Teorema

Sean σ, ρ parametrizaciones C^1 a trozos de la misma curva simple en $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Entonces:

- Si σ y ρ tienen la misma orientación
$$\int_\sigma \vec{F} \cdot ds = \int_\rho \vec{F} \cdot ds\,.$$
- Si σ y ρ tienen distinta orientación
$$\int_\sigma \vec{F} \cdot ds = -\int_\rho \vec{F} \cdot ds\,.$$

Teorema

Sean $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a trozos y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a, b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) .$$

Corolario

Sean $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva cerrada C^1 a trozos y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a, b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f = 0 .$$

Teorema

Sean $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a trozos y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a, b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))\,.$$

Corolario

Sean $\sigma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva cerrada C^1 a trozos y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^1 en un entorno de $\sigma([a, b])$. Entonces

$$\int_\sigma \nabla f = 0\,.$$

- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que el campo vectorial $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una forma **diferencial exacta** (o **un campo conservativo**) en Ω si existe un campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica $\nabla f = \vec{F}$ en Ω. El campo f se denomina **potencial** de $\vec{F}$.
- Por tanto, si $\vec{F}$ es conservativo y C^1 en un entorno de $\sigma([a,b])$ con σ una curva cerrada, entonces

$$\int_\sigma \vec{F} = 0\,.$$

- Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que el campo vectorial $\vec{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una forma **diferencial exacta** (o **un campo conservativo**) en Ω si existe un campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica $\nabla f = \vec{F}$ en Ω. El campo f se denomina **potencial** de $\vec{F}$.
- Por tanto, si $\vec{F}$ es conservativo y C^1 en un entorno de $\sigma([a,b])$ con σ una curva cerrada, entonces

$$\int_\sigma \vec{F} = 0\,.$$

- Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Decimos que Ω es **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en Ω puede deformarse continuamente dentro de Ω en un punto.
- Si Ω es convexo, entonces es simplemente conexo.
- Si $n = 2$, Ω es simplemente conexo si y sólo si no tiene "agujeros".
- Si $n = 3$, una bola a la que quitamos un número finito de puntos es un conjunto simplemente conexo.

- Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Decimos que Ω es **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en Ω puede deformarse continuamente dentro de Ω en un punto.
- Si Ω es convexo, entonces es simplemente conexo.
- Si $n = 2$, Ω es simplemente conexo si y sólo si no tiene "agujeros".
- Si $n = 3$, una bola a la que quitamos un número finito de puntos es un conjunto simplemente conexo.

- Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Decimos que Ω es **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en Ω puede deformarse continuamente dentro de Ω en un punto.
- Si Ω es convexo, entonces es simplemente conexo.
- Si $n = 2$, Ω es simplemente conexo si y sólo si no tiene “agujeros”.
- Si $n = 3$, una bola a la que quitamos un número finito de puntos es un conjunto simplemente conexo.

- Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^n$. Decimos que Ω es **simplemente conexo** si toda curva cerrada contenida en Ω puede deformarse continuamente dentro de Ω en un punto.
- Si Ω es convexo, entonces es simplemente conexo.
- Si $n = 2$, Ω es simplemente conexo si y sólo si no tiene "agujeros".
- Si $n = 3$, una bola a la que quitamos un número finito de puntos es un conjunto simplemente conexo.

Teorema

Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Son equivalentes:

- $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.
- Si σ contenida en D es cerrada $\implies \int_\sigma \vec{F} \cdot ds = 0$.
- Para todo par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene
$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot ds = \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot ds \,.$$
- $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en D, si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$.
- $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

Teorema

Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Son equivalentes:

- $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.
- Si σ contenida en D es cerrada $\implies \int_\sigma \vec{F} \cdot ds = 0$.
- Para todo par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene
$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot ds = \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot ds\,.$$
- $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en D, si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$.
- $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

Teorema

Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Son equivalentes:

- $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.
- Si σ contenida en D es cerrada $\implies \int_\sigma \vec{F} \cdot ds = 0$.
- Para todo par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene

$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot ds = \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot ds \,.$$

- $\partial Q / \partial x = \partial P / \partial y$ en D, si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$.
- $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

Teorema

Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Son equivalentes:

- $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.
- Si σ contenida en D es cerrada $\implies \int_\sigma \vec{F} \cdot ds = 0$.
- Para todo par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene

$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot ds = \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot ds\,.$$

- $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ en D, si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$.
- $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

Teorema

Sean D un abierto simplemente conexo de $\mathbb{R}^n$ y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $C^1(D)$. Son equivalentes:

- $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.
- Si σ contenida en D es cerrada $\implies \int_\sigma \vec{F} \cdot ds = 0$.
- Para todo par de curvas σ_1, σ_2 contenidas en D y con los mismos extremos se tiene
$$\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot ds = \int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot ds \, .$$
- $\partial Q / \partial x = \partial P / \partial y$ en D, si $n = 2$ y $\vec{F} = (P, Q)$.
- $\nabla \times F = 0$ en D, si $n = 3$.

Una **superficie parametrizada** o simplemente **superficie** es una aplicación continua $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde D es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Esta aplicación puede escribirse como

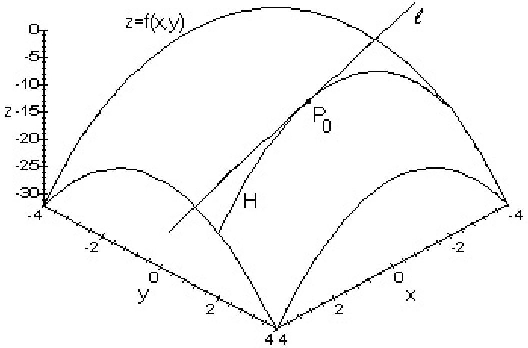
$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,.$$

Habitualmente suele identificarse una superficie Φ con su imagen $S = \Phi(D) \subset \mathbb{R}^3$, que es la idea "intuitiva" que se tiene de una "superficie".

Dada una superficie Φ, se definen los **vectores tangentes coordenados** como

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \quad T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Como estos vectores son tangentes a las imágenes mediante Φ de las curvas $v = cte.$ y $u = cte.$ respectivamente, y estas imágenes son curvas contenidas en la superficie, se tiene que T_u y T_v son vectores tangentes a la superficie, y por tanto, $T_u \times T_v$ es un vector perpendicular a la superficie.


z=f(x,y)
ℓ
P_0
H
z
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-4
-2
0
y
2
4 4
x
-4
-2
0
2

- Se dice que una superficie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **regular** si es diferenciable y $T_u \times T_v \neq 0$ en todo punto de D.
- Si Φ es regular se define el vector normal unitario a Φ como

$$\vec{n} = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \,.$$

- También se define el plano tangente a Φ en el punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, con $(u_0, v_0) \in D$, como

$$(T_u \times T_v)(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \,.$$

- Se dice que una superficie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **regular** si es diferenciable y $T_u \times T_v \neq 0$ en todo punto de D.
- Si Φ es regular se define el vector normal unitario a Φ como

$$\vec{n} = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \,.$$

- También se define el plano tangente a Φ en el punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, con $(u_0, v_0) \in D$, como

$$(T_u \times T_v)(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \,.$$

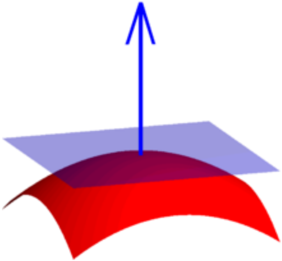
- Se dice que una superficie $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es **regular** si es diferenciable y $T_u \times T_v \neq 0$ en todo punto de D.
- Si Φ es regular se define el vector normal unitario a Φ como

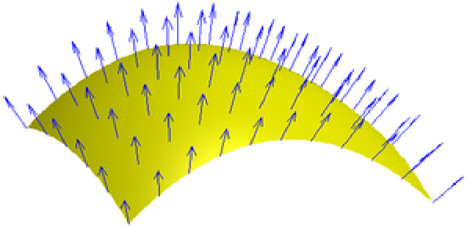
$$\vec{n} = \frac{T_u \times T_v}{\| T_u \times T_v \|} \, .$$

- También se define el plano tangente a Φ en el punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, con $(u_0, v_0) \in D$, como

$$(T_u \times T_v)(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \, .$$

Plano tangente. Vector normal.





- Una curva simple cerrada en el plano está **orientada en sentido positivo** si se recorre en contra del movimiento de las agujas del reloj (sentido antihorario).
- Dado un conjunto en el plano, se dice que su frontera está orientada positivamente si al recorrer ésta se deja el interior del conjunto a su izquierda. Es decir, la curva exterior se recorre en sentido positivo y las curvas interiores (si el conjunto tiene agujeros) se recorren en sentido negativo.

- Una curva simple cerrada en el plano está **orientada en sentido positivo** si se recorre en contra del movimiento de las agujas del reloj (sentido antihorario).
- Dado un conjunto en el plano, se dice que su frontera está orientada positivamente si al recorrer ésta se deja el interior del conjunto a su izquierda. Es decir, la curva exterior se recorre en sentido positivo y las curvas interiores (si el conjunto tiene agujeros) se recorren en sentido negativo.

- Dada una superficie en el espacio, se dice que la orientación de ésta y la de su frontera son compatibles si se cumple la ley del sacacorchos (o de la mano derecha).

- Se dice que una superficie es **orientable** si "tiene dos caras", es decir, si existe una determinación de vector normal unitario que sea continua en toda la superficie.
- Si Φ_1 y Φ_2 son dos parametrizaciones de la superficie orientable S, decimos que tienen la misma orientación si sus vectores normales unitarios coinciden, y que tienen distinta orientación si el vector normal unitario a Φ_2 es igual al vector normal unitario a Φ_1 multiplicado por -1.

- Se dice que una superficie es **orientable** si "tiene dos caras", es decir, si existe una determinación de vector normal unitario que sea continua en toda la superficie.
- Si Φ_1 y Φ_2 son dos parametrizaciones de la superficie orientable S, decimos que tienen la misma orientación si sus vectores normales unitarios coinciden, y que tienen distinta orientación si el vector normal unitario a Φ_2 es igual al vector normal unitario a Φ_1 multiplicado por -1.

Superficie no orientable: Cinta de Moebius.

Definición (Integral de superficie de una función escalar)

- Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable y $f : \Phi(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar continua, se define la **integral de f en** (o sobre) Φ como

$$\int_\Phi f = \int_\Phi f\, dS = \int_D f\big(\Phi(u,v)\big) \big\|(T_u \times T_v)(u,v)\big\|\, du\, dv\,.$$

- En particular, el **área** de Φ es

$$A(\Phi) = \int_\Phi 1 = \int_D \|T_u \times T_v\|\,.$$

y el **valor promedio** de f en Φ como $\dfrac{1}{A(\Phi)} \displaystyle\int_\Phi f\,.$

Definición (Integral de superficie de una función escalar)

- Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable y $f : \Phi(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar continua, se define la **integral de** f **en** (o sobre) Φ como

$$\int_\Phi f = \int_\Phi f\, dS = \int_D f\big(\Phi(u,v)\big)\big\|(T_u \times T_v)(u,v)\big\|\, du\, dv\,.$$

- En particular, el **área** de Φ es

$$A(\Phi) = \int_\Phi 1 = \int_D \|T_u \times T_v\|\,.$$

y el **valor promedio** de f en Φ como $\dfrac{1}{A(\Phi)}\displaystyle\int_\Phi f\,.$

Definición (Integral de superficie de un campo vectorial)

Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable y $\vec{F} : \Phi(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continua, se define la **integral de $\vec{F}$ en** (o a través de) Φ como

$$\int_\Phi \vec{F} = \int_\Phi \vec{F} \cdot dS = \int_D \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \big(T_u \times T_v\big)(u,v)\, du\, dv\,.$$

Observación

La integral del campo vectorial $\vec{F}$ en Φ es igual a la integral en Φ de la componente normal a Φ de $\vec{F}$, es decir, $F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario a Φ. Por tanto,

$$\int_\Phi \vec{F} \cdot dS = \int_\Phi F_n = \int_\Phi \vec{F} \cdot n\, dS\,.$$

Definición (Integral de superficie de un campo vectorial)

Si $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable y $\vec{F} : \Phi(D) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continua, se define la **integral de $\vec{F}$ en** (o a través de) Φ como

$$\int_\Phi \vec{F} = \int_\Phi \vec{F} \cdot dS = \int_D \vec{F}\big(\Phi(u,v)\big) \cdot \big(T_u \times T_v\big)(u,v)\, du\, dv\,.$$

Observación

La integral del campo vectorial $\vec{F}$ en Φ es igual a la integral en Φ de la componente normal a Φ de $\vec{F}$, es decir, $F_n = \vec{F} \cdot \vec{n}$, donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario a Φ. Por tanto,

$$\int_\Phi \vec{F} \cdot dS = \int_\Phi F_n = \int_\Phi \vec{F} \cdot n\, dS\,.$$

La integral de una función escalar en una superficie diferenciable es independiente de la parametrización, es decir, si Φ_1, Φ_2 son parametrizaciones de la misma superficie y $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\int_{\Phi_1} f = \int_{\Phi_2} f \, .$$

En cambio el signo de la integral de un campo vectorial sobre una superficie sí que depende de la parametrización: si Φ_1, Φ_2 parametrizaciones diferenciables de la misma superficie orientable y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo, entonces

- Si Φ_1 y Φ_2 tienen la misma orientación

$$\int_{\Phi_1} \vec{F} \cdot dS = \int_{\Phi_2} \vec{F} \cdot dS \,.$$

- Si Φ_1 y Φ_2 tienen distinta orientación

$$\int_{\Phi_1} \vec{F} \cdot dS = -\int_{\Phi_2} \vec{F} \cdot dS \,.$$

En cambio el signo de la integral de un campo vectorial sobre una superficie sí que depende de la parametrización: si Φ_1, Φ_2 parametrizaciones diferenciables de la misma superficie orientable y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial continuo, entonces

- Si Φ_1 y Φ_2 tienen la misma orientación

$$\int_{\Phi_1} \vec{F} \cdot dS = \int_{\Phi_2} \vec{F} \cdot dS \,.$$

- Si Φ_1 y Φ_2 tienen distinta orientación

$$\int_{\Phi_1} \vec{F} \cdot dS = -\int_{\Phi_2} \vec{F} \cdot dS \,.$$

Teorema de Green (Primera versión)

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado tal que ∂D es una curva simple cerrada de clase C^1 a trozos, orientada en sentido positivo, y sean P, Q funciones escalares de clase C^1 en $\overline{D}$. Entonces

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Teorema de Green (Segunda versión)

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo acotado tal que ∂D es una unión finita de curvas simples cerradas de clase C^1 a trozos, orientada en sentido positivo, y sean P, Q funciones escalares de clase C^1 en $\overline{D}$. Entonces

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Teorema de Stokes

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable a trozos y orientable tal que ∂S es una unión finita de curvas simples cerradas C^1 a trozos, y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de S. Si la orientación de ∂S es compatible con la de S, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot ds = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot dS \,.$$

Corolario 1

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada (es decir, la frontera de una región acotada de $\mathbb{R}^3$ "sin agujeros") diferenciable a trozos y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de S. Entonces $\int_S \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

Corolario 2

Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficie diferenciables a trozos y orientables tales que $\partial S_1 = \partial S_2$ es una unión finita de curvas simples cerradas C^1 a trozos, y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de $S_1 \cup S_2$. Si las orientaciones de S_1 y S_2 inducen la misma orientación en ∂S_1 y en ∂S_2, entonces $\int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F}$.

Corolario 1

Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie cerrada (es decir, la frontera de una región acotada de $\mathbb{R}^3$ "sin agujeros") diferenciable a trozos y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de S. Entonces $\int_S \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

Corolario 2

Sean $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficie diferenciables a trozos y orientables tales que $\partial S_1 = \partial S_2$ es una unión finita de curvas simples cerradas C^1 a trozos, y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en un entorno de $S_1 \cup S_2$. Si las orientaciones de S_1 y S_2 inducen la misma orientación en ∂S_1 y en ∂S_2, entonces $\int_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} = \int_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F}$.

Teorema de Gauss o de la divergencia

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado tal que $\partial\Omega$ es una unión finita de superficies cerradas y diferenciables a trozos, y $\vec{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Si $\partial\Omega$ está orientada con el vector normal exterior, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \,.$$