CÁLCULO II
Grados en Ingeniería

Domingo Pestana Galván
José Manuel Rodríguez García

Figuras realizadas con Arturo de Pablo Martínez

uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

Capítulo 5. Transformada de Laplace y Ecuaciones Diferenciales

5.1 Transformada de Laplace

5.2 Ecuaciones diferenciales

- Dada $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f tiene **crecimiento a lo sumo exponencial** si para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-\alpha t} = 0$.
- En ese caso podemos definir la **transformada de Laplace de** f para $s > \alpha$, como la integral

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

- Dada $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f tiene **crecimiento a lo sumo exponencial** si para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-\alpha t} = 0$.
- En ese caso podemos definir la **transformada de Laplace de** f para $s > \alpha$, como la integral

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\,.$$

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:

- $L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $L(e^{-at} f(t))(s) = L(f)(s + a) \qquad a \in \mathbb{R}.$
- $L(f(at))(s) = \frac{1}{a} L(f(t))(\frac{s}{a}) \qquad a > 0.$

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:

- $L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $L(e^{-at} f(t))(s) = L(f)(s + a) \qquad a \in \mathbb{R}.$
- $L(f(at))(s) = \frac{1}{a}\, L(f(t))(\frac{s}{a}) \qquad a > 0.$

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:

- $L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- $L(e^{-at} f(t))(s) = L(f)(s + a) \qquad a \in \mathbb{R}.$
- $L(f(at))(s) = \dfrac{1}{a}\, L(f(t))\big(\dfrac{s}{a}\big) \qquad a > 0.$

Teorema

Sea f una función continua en $[0, \infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

- Si f es derivable en $(0, \infty)$ y f' es continua, entonces

$$L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0)\,.$$

- $L(f)$ es derivable y

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

- $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Teorema

Sea f una función continua en $[0, \infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

- Si f es derivable en $(0, \infty)$ y f' es continua, entonces

$$L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0)\,.$$

- $L(f)$ es derivable y

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

- $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Teorema

Sea f una función continua en $[0, \infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

- Si f es derivable en $(0, \infty)$ y f' es continua, entonces

$$L(f')(s) = s\, L(f)(s) - f(0)\,.$$

- $L(f)$ es derivable y

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\, f(t))(s)\,.$$

- $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Teorema

Si f es continua en $[0, \infty)$ y tiene crecimiento a lo sumo exponencial, entonces lo mismo es válido para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,,$$

y además

$$L(g)(s) = \frac{1}{s}\, L(f)(s)\,.$$

Teorema (de inyectividad)

Si f y g son continuas en $[0, \infty)$ y $L(f)(s) = L(g)(s)$, entonces $f = g$.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 1\,, & L(f)(s) &= \frac{1}{s}\,,\\
f(t) &= t^n\,, & L(f)(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}}\,,\\
f(t) &= t^a\,, & L(f)(s) &= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}\,,\\
f(t) &= \operatorname{sen}(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{a}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \cos(at)\,, & L(f)(s) &= \frac{s}{s^2+a^2}\,,\\
f(t) &= \frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\,, & L(f)(s) &= \arctan\frac{a}{s}\,,
\end{aligned}
$$

$$f(t) = e^{at}\,, \qquad L(f)(s) = \frac{1}{s-a}\,,$$

$$f(t) = e^{at}t^{b}\,, \qquad L(f)(s) = \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}\,,$$

$$f(t) = e^{at}\mathrm{sen}\,(bt)\,, \qquad L(f)(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,,$$

$$f(t) = e^{at}\cos(bt)\,, \qquad L(f)(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\,,$$

$$f(t) = \mathrm{senh}(at) = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,, \qquad L(f)(s) = \frac{a}{s^2-a^2}\,,$$

$$f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\,, \qquad L(f)(s) = \frac{s}{s^2-a^2}\,.$$

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función desconocida con sus derivadas.
El objetivo es encontrar la función o funciones que verifiquen dicha ecuación.

Vamos a resolver la siguiente ecuación diferencial
$y'' - 4\,y = 8\,e^{-2t}$
con valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$,
usando la transformada de Laplace.

Denotemos por $Y(s)$ la transformada de Laplace de $y(t)$, es decir, $Y(s) = L(y(t))(s)$. Tomando transformadas de Laplace en la ecuación diferencial (usando la tabla de transformadas), llegamos a la igualdad

$$s^2 Y(s) - 6 - 4Y(s) = \frac{8}{s+2}\,.$$

Por tanto, hemos transformado algo tan complicado como una ecuación diferencial en algo tan sencillo como una ecuación algebraica de primer orden (en la incógnita $Y(s)$). Operando, obtenemos

$$(s^2 - 4)Y(s) = \frac{8}{s+2} + 6 = \frac{6s+20}{s+2}\,,$$
$$Y(s) = \frac{6s+20}{(s-2)(s+2)^2} = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}\,,$$

Usando ahora la tabla de transformadas de Laplace, se tiene

$$\begin{aligned} L(y(t))(s) &= 2\,L(e^{2t})(s) - 2\,L(e^{-2t})(s) - 2\,L(t\,e^{-2t})(s) \\ &= L(2\,e^{2t} - 2\,e^{-2t} - 2\,t\,e^{-2t})(s)\,. \end{aligned}$$

Usando ahora la inyectividad de la de transformada de Laplace, concluimos

$$y(t) = 2\,e^{2t} - 2\,e^{-2t} - 2\,t\,e^{-2t}.$$