uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

TEORÍA DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaborada por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

2. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $\mathbf{x}_0$ es un **máximo local** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; $\mathbf{x}_0$ es un **máximo local estricto** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. Decimos que $\mathbf{x}_0$ es un **mínimo local** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; $\mathbf{x}_0$ es un **mínimo local estricto** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{x}_0\}$. El punto $\mathbf{x}_0$ es un **extremo local** de f si es un mínimo local o un máximo local. Los puntos $\mathbf{x}_0$ que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ se denominan **puntos críticos** de f. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.

Teorema 1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y f presenta en $\mathbf{x}_0$ un extremo local, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f, es decir, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Definición. Se define la **matriz Hessiana** de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U. Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un mínimo local estricto de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

(1) (x_0, y_0) es un punto crítico de f,

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$,

(3) $D = \det Hf = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big)^2 > 0$, en (x_0, y_0).

D se llama **discriminante**. Si en (2) ponemos < 0 en lugar de > 0, sin cambiar las condiciones (1) y (3), entonces tenemos un máximo local estricto.

Teorema 3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U. Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y el discriminante D de f en (x_0, y_0) verifica $D < 0$, entonces (x_0, y_0) es un punto de silla de f.

Si el discriminante D de f en (x_0, y_0) verifica $D = 0$, **no podemos deducir** que (x_0, y_0) sea máximo local, mínimo local o punto de silla de f.

Teorema 4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U, y $\mathbf{x}_0 \in U$ un punto crítico de f.
(1) Si todos los autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente positivos, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto mínimo local estricto de f.
(2) Si todos los autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente negativos, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto máximo local estricto de f.
(3) Si dos autovalores de la matriz $Hf(\mathbf{x}_0)$ tienen distinto signo, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de silla de f.

Teorema 5. (Multiplicadores de Lagrange) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$, $c = g(\mathbf{x}_0)$ y S el conjunto de nivel de g de valor c (es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $g(\mathbf{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Si la restricción de f a S (denotada por $f|_S$) tiene un máximo o un mínimo local en $\mathbf{x}_0$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)\,.$$

Los puntos $\mathbf{x}_0$ que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ se denominan **puntos críticos** de $f|_S$.

Teorema 6. (Localización de máximos y mínimos absolutos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{U}$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:
(1) los puntos de U en los que f no es diferenciable,
(2) los puntos críticos de f en U,
(3) los puntos máximo y mínimo de $f|_{\partial U}$.

Teorema 6'. (Localización de máximos y mínimos absolutos) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, A un conjunto abierto que contiene a $\overline{U}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en A. Supongamos que existen $c \in \mathbb{R}$ y una función g tales que $\partial U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = c\}$, g es diferenciable en ∂U y $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial U$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanzan en los puntos críticos de f en U o en los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.

Teorema 7. (Multiplicadores de Lagrange II) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g, h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$, $c = g(\mathbf{x}_0)$, $k = h(\mathbf{x}_0)$ y S la intersección de los conjuntos de nivel de g y h de valores c y k, respectivamente (es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $g(\mathbf{x}) = c$ y $h(\mathbf{x}) = k$). Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y $\nabla h(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Si la restricción de f a S tiene un máximo o un mínimo local en $\mathbf{x}_0$, entonces existen números reales λ y μ tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) + \mu \nabla h(\mathbf{x}_0)\,.$$