



TEORÍA DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
 Elaborada por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

3. INTEGRACIÓN EN \mathbb{R}^n

Definición. Sea R un **rectángulo n -dimensional** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, con $a_i < b_i$, para $i = 1, \dots, n$. Se define la **medida** (n -dimensional) de R como $|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$.

Observación. Habitualmente la dimensión n será dos o tres, por lo que estaremos trabajando con subconjuntos del plano o del espacio. Si $n = 2$, la medida de R es el área de R . Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R .

Definición. Una **partición** P del rectángulo n -dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que expresamos R como unión de subrectángulos $R = \cup_{i=1}^N R_i$.

Definición. Sea f una función acotada en un rectángulo n -dimensional R y P una partición de R tal que $R = \cup_{i=1}^N R_i$. Definimos las siguientes cantidades para $i = 1, \dots, N$,

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in R_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in R_i\}.$$

La **suma superior** asociada a P de f y la **suma inferior** asociada a P de f son, respectivamente,

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^N M_i |R_i|, \quad L_f(P) = \sum_{i=1}^N m_i |R_i|.$$

Teorema 1. Sea f una función acotada en R . Entonces

$$\sup_P L_f(P) \leq \inf_P U_f(P).$$

Definición. Si f es una función acotada en R tal que existe un número real I verificando

$$\sup_P L_f(P) = \inf_P U_f(P) = I,$$

diremos que f es **integrable** en R . Al número I lo llamaremos la **integral** de f en R , y lo escribiremos

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Teorema 2. Si f es una función continua en R entonces f es integrable en R .

Teorema 3. (Teorema de Fubini) Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = R_1 \times R_2$ un rectángulo n -dimensional, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función integrable en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x, y) dx \right) dy,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Definición. Si D es una región acotada en \mathbb{R}^n y f es una función acotada en D se define la **integral de f en D** como

$$\int_D f = \int_R f^*,$$

donde R es cualquier rectángulo n -dimensional que contenga a D y f^* es la función definida en todo \mathbb{R}^n como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Teorema 4. Si f, g son funciones integrables en la región acotada D y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (i) \quad & f + g \text{ es integrable en } D \text{ y } \int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g, \\ (ii) \quad & cf \text{ es integrable en } D \text{ y } \int_D cf = c \int_D f, \\ (iii) \quad & |f| \text{ es integrable en } D \text{ y } \int_D |f| \geq \left| \int_D f \right|, \\ (iv) \quad & f \cdot g \text{ es integrable en } D \text{ y } \left(\int_D fg \right)^2 \leq \left(\int_D f^2 \right) \left(\int_D g^2 \right). \end{aligned}$$

Observaciones. Las propiedades (i) y (ii) nos indican que el conjunto de las funciones integrables en D es un espacio vectorial y la integral es un operador lineal en este espacio. La propiedad (iv) se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

Definición. Un conjunto A de \mathbb{R}^n se dice que tiene **medida cero** (n -dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto de rectángulos n -dimensionales R_1, R_2, \dots finito o numerable tal que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \quad \text{y} \quad |R_1| + |R_2| + \dots < \varepsilon.$$

Diremos que una propiedad se verifica en **casi todo punto de B** si el conjunto de puntos de B que no verifican esa propiedad tiene medida cero.

Lema 1.

- (1) Se obtiene una definición equivalente de conjuntos de medida cero si se toman rectángulos abiertos (o bolas abiertas o bolas cerradas) en vez de rectángulos cerrados.
- (2) Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- (3) Si A es un conjunto finito o numerable, entonces $|A| = 0$.
- (4) La unión finita o numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- (5) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto que tiene “dimensión” menor que n , entonces $|A| = 0$.

Corolario 1. La unión finita o numerable de curvas en \mathbb{R}^n tiene medida cero si $n \geq 2$. La unión finita o numerable de superficies en \mathbb{R}^n tiene medida cero si $n \geq 3$.

Teorema 5.

- (1) Sea f una función acotada en el rectángulo R . Entonces f es integrable en R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en R tiene medida cero.
- (2) Sea f una función acotada en la región acotada D con $|\partial D| = 0$. Entonces f es integrable en D si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en D tiene medida cero.

Definición. Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$. Por tanto, si $D \subset \mathbb{R}^2$, $\int_D 1$ es el área de D y, si $D \subset \mathbb{R}^3$, $\int_D 1$ es el volumen de D .

Definición. Decimos que una propiedad se verifica **en casi todo punto de un conjunto A** si el conjunto de puntos de A que no verifica dicha propiedad tiene medida cero.

Teorema 6. Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y son iguales en casi todo punto de D (es decir, el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero), entonces

$$\int_D f = \int_D g.$$

Teorema 7. Si f es integrable en la región acotada D y $m \leq f(x) \leq M$ para casi todo $x \in D$ entonces

$$m|D| \leq \int_D f \leq M|D|.$$

Corolario 2. Sean f, g funciones integrables en la región acotada D .

(i) Si $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$, entonces $\int_D f \geq 0$.

(ii) Si $f(x) \geq g(x)$ para casi todo $x \in D$, entonces $\int_D f \geq \int_D g$.

Teorema 8. Sea f una función integrable en la región acotada D . Si $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$ y existe un punto $x_0 \in D$ con f continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_D f > 0.$$

Teorema 9. (Teorema del valor medio de la integral) Sean f continua en la región acotada D y $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$. Si f y g son integrables en D , entonces:

(i) Existe $c_1 \in D$ tal que $\int_D f = f(c_1)|D|$.

(ii) Existe $c_2 \in D$ tal que $\int_D fg = f(c_2) \int_D g$.

Teorema 10. Sean D una región acotada y f una función definida en D . Si D es la unión de las regiones de interiores disjuntos $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, con $|\partial D_i| = 0$ para $i = 1, \dots, k$, entonces f es integrable en D si y sólo si es integrable en D_i para $i = 1, \dots, k$. Además se tiene que

$$\int_D f = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f.$$

Definición. Una región $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice **simétrica con respecto a la variable x_j** ($1 \leq j \leq n$) si verifica la siguiente propiedad: $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in D$ si y sólo si $(x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in D$.

Una función f definida en D se dice **impar en x_j** si

$$f(x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n);$$

f se dice **par en x_j** si

$$f(x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Teorema 11. Sean $D \subset \mathbb{R}^n$ una región simétrica con respecto a la variable x_j (para algún $1 \leq j \leq n$) y f una función integrable en D .

(1) Si f es impar en la variable x_j , entonces $\int_D f = 0$.

(2) Si f es par en la variable x_j y se define $D_j = \{x \in D : x_j \geq 0\}$, entonces $\int_D f = 2 \int_{D_j} f$.

Definición. Sean D^* un subconjunto de \mathbb{R}^n y $T : D^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación diferenciable. Recordemos que el **jacobiano** de T es el determinante de la matriz derivada de T , es decir,

$$JT = \det(DT).$$

Observación. Tanto DT como JT son funciones del punto $x \in D^*$.

Teorema 12. (Teorema de cambio de variable) Sean D^* y D regiones de \mathbb{R}^n y $T : D^* \rightarrow D$ una transformación biyectiva de clase C^1 . Entonces para toda f integrable en D se tiene

$$\int_D f(x) dx = \int_{D^*} f(T(u)) |JT(u)| du,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Observación 1. El Teorema de cambio de variable sigue siendo cierto si las hipótesis de biyectividad y diferenciabilidad dejan de cumplirse en un conjunto de medida cero.

Observación 2. Si T^{-1} denota la inversa de la aplicación diferenciable T , del teorema de la función inversa se deduce $(JT)(J(T^{-1})) = 1$, es decir, $J(T^{-1}) = (JT)^{-1}$.

Cambio a coordenadas polares. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a (r, θ) , con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Observemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$. El determinante jacobiano del cambio es r .

Cambio a coordenadas cilíndricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (r, θ, z) , con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = z.$$

El determinante jacobiano del cambio es r .

Cambio a coordenadas esféricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (ρ, θ, ϕ) , con $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = \rho \cos \phi.$$

El valor absoluto del determinante jacobiano del cambio es $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN DIMENSIÓN n .

Valor medio. Si D es una región acotada en \mathbb{R}^n y f es una función integrable en D se define el **promedio** o **valor medio de f en D** como

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1}.$$

Centro de gravedad. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **centro de gravedad** o **centro de masa** (y lo denotaremos por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$), como

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_D y \rho(x, y, z) \, dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_D z \rho(x, y, z) \, dx dy dz,$$

donde M es la **masa** del cuerpo, que puede calcularse como $M = \iiint_D \rho(x, y, z) \, dx dy dz$.

Momento de inercia. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **momento de inercia respecto del eje E** (y lo denotaremos por I_E) como

$$I_E = \iiint_D \operatorname{dist}((x, y, z), E)^2 \rho(x, y, z) \, dx dy dz,$$

donde $\operatorname{dist}((x, y, z), E)$ es la distancia del punto (x, y, z) al eje E . Recordemos que $\operatorname{dist}((x, y, z), X)^2 = y^2 + z^2$, $\operatorname{dist}((x, y, z), Y)^2 = x^2 + z^2$ y $\operatorname{dist}((x, y, z), Z)^2 = x^2 + y^2$, donde X, Y, Z denotan los tres ejes coordenados.