uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA

Elaborados por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez, con Arturo de Pablo y Elena Romera

2 Estudio local de funciones de varias variables.

2.1 Derivadas de orden superior.

Problema 2.1. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Calcula las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

ii) Comprueba que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no es continua en el origen.

iii) Calcula $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, y explica por qué no coinciden.

Problema 2.2. Calcula la matriz hessiana de las funciones:

i) $f(x,y) = \log(x^2+y^3)$;

ii) $f(x,y) = x^2 \cos y + y^2 \operatorname{sen} x$;

iii) $f(x,y) = x^y$;

iv) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$;

v) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$;

vi) $f(x,y,z) = 2x^2 - 6xy + xz - y^2 + yz + 3z^2$;

vii) $f(x,y,z) = (x+y)(y+z)(z+x)$.

Problema 2.3. Prueba que las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$,

$$i) \quad u(x,y) = \operatorname{arctg}(y/x), \qquad ii) \quad u(x,y) = \log(x^2+y^2),$$

son armónicas, es decir, satisfacen la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en su dominio.

Problema 2.4.

i) Si $u(x,y) = f(r)$, con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (u es una función radial), prueba que se verifica

$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

ii) Si $u(x,y) = f(r,\theta)$ (coordenadas polares), prueba que se verifica

$$\Delta u = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

iii) Rehaz el problema anterior con estas fórmulas.

Problema 2.5.

i) Prueba que las siguientes funciones

$$\begin{array}{lll} u(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}, & \text{en} & \mathbb{R}^3 \\ u(x,y,z,w) = (x^2+y^2+z^2+w^2)^{-1}, & \text{en} & \mathbb{R}^4, \end{array}$$

son armónicas ($\Delta u = 0$) en su dominio.

ii) Si $u(\mathbf{x}) = f(r)$, (u es una función radial), prueba que se verifica

$$\Delta u = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r).$$

iii) Calcula $k \in \mathbb{R}$ para que la función $u(\mathbf{x}) = r^k$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r = ||\mathbf{x}||$, sea armónica para $\mathbf{x} \neq 0$.

Problema 2.6. Encuentra soluciones del tipo $f(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ de las ecuaciones en derivadas parciales (es decir, halla la relación entre las constantes k y ω):

i) $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \text{(ecuación de ondas, con } c \text{ constante);}$$

ii) $$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - h^2 f, \qquad \text{(ecuación de Klein–Gordon, con } c, h \text{ constantes).}$$

Problema 2.7. Encuentra soluciones del tipo $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \operatorname{sen} kx$ de la ecuación (λ, k son constantes)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{(ecuación del calor, con } \mu \text{ constante).}$$

2.2 Extremos de funciones de varias variables.

Problema 2.8. Halla los puntos críticos y determina los valores extremos locales de las siguientes funciones de dos variables:

i) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$,

ii) $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 6$,

iii) $h(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 - y + 4$,

iv) $k(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$,

v) $m(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$.

Problema 2.9. Calcula los extremos de la función $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2+\varepsilon y^2}$ para $\varepsilon = 0,\ 1,\ -1$.

Problema 2.10. Calcula los extremos de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = x^3y^3$;

ii) $f(x,y) = x^4y^4$;

iii) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

iv) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{1+x^2+y^2}$.

Problema 2.11. Calcula los extremos de las siguientes funciones en los recintos que se especifican:

i) $f(x,y) = |x| + |y|$ en $A = \{(x,y) :\ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$;

ii) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ en $B = \{(x,y) :\ |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$;

iii) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ en $C = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 8\}$.

Problema 2.12. Estudia si las siguientes funciones tienen un extremo (local o global) en el origen $(0,0)$:

i) $f(x,y) = x^4 + 2xy^3 + y^4 + 2xy$;

ii) $g(x,y) = \begin{cases} xy + xy^3 \operatorname{sen}(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$

Indicación: Observa que se pueden encontrar dos rectas tales que acercándose al origen por cada una de ellas la función tiene signos distintos.

Problema 2.13. Dado el conjunto de pares de valores $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, N\}$, construimos la función de dos variables

$$f(m,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - mx_i - b)^2.$$

Encuentra los valores de m y b que minimizan f. (*Método de mínimos cuadrados* para aproximar el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i)\}$ mediante la recta $y = mx + b$).

Problema 2.14. Clasifica todos los puntos criticos de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$.

ii) $g(x,y) = \operatorname{sen} x^2 - \operatorname{sen} y^2$.

2.3 Extremos condicionados.

Problema 2.15.

i) Calcula el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el conjunto $A = \{xy = 1\}$.

ii) Calcula el máximo y el mínimo de $f(x,y) = xy$ en el conjunto $A = \{x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Problema 2.16. Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25$$

en el conjunto $D = \{x^2 + y^2 \leq 16\}$.

Problema 2.17. Calcula los extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se especifican:

i) $f(x,y) = xy$ sujeto a $2x + 3y - 5 = 0$;

ii) $g(x,y,z) = xyz$ sujeto a $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

iii) $h(x,y,z) = x^2y^4z^6$ sujeto a $x + y + z = 1,\ x, y, z > 0$;

Problema 2.18. Encuentra los extremos de las siguientes funciones en los conjuntos que se indican:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ en $T = \{\, y/2 \leq x \leq 3 - \sqrt{2y},\ 0 \leq y \leq 2 \,\}$;

ii) $f(x,y,z) = x + y + z$ en $S = \{\, 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1 \,\}$;

iii) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ en $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z \geq x^2 + y^2 - 2 \,\}$.

Problema 2.19. Maximiza xyz en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 2.20. Minimiza $x + 2y + 4z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Problema 2.21. Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ teniendo en cuenta las restricciones $x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1$.

Problema 2.22. Calcula la distancia del punto $(4,4,10)$ a la esfera $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$:

i) geométricamente;

ii) utilizando multiplicadores de Lagrange.

Problema 2.23. Representa un número positivo A como producto de cuatro factores positivos cuya suma sea mínima.

Problema 2.24. La producción de una compañía es una función $f(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$, K es la cantidad de capital invertido y L es la cantidad de trabajo usado. El precio del capital es p y el del trabajo q. Calcula la proporción entre el capital y el trabajo que hay que utilizar para maximizar la producción usando un presupuesto B.

Problema 2.25. Un fabricante puede producir tres productos distintos en cantidades Q_1, Q_2, Q_3 respectivamente, y genera un beneficio igual a $P(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1+8Q_2+24Q_3$. Halla los valores de Q_1, Q_2, Q_3 que maximizan el beneficio si la producción está sujeta a la restricción $Q_1^2 + 2Q_2^2 + 4Q_3^2 = 4.5 \times 10^9$.

Problema 2.26. Encuentra todos los máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ en el conjunto dado por la curva $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$.

Problema 2.27. Encuentra los puntos de la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$ más cercanos al origen.