uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaborados por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez, con Arturo de Pablo y Elena Romera

3 Integración en $\mathbb{R}^n$

3.1 Integral múltiple.

Problema 3.1. Calcula $\displaystyle\int_Q f$ en los siguientes casos:

i) $f(x,y) = xy(x+y)$, $Q = [0,1]\times[0,1]$,

ii) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + y^3$, $Q = [0,1]\times[0,1]$,

iii) $f(x,y) = \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y$, $Q = [0,\pi]\times[0,\pi]$,

iv) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$, $Q = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$,

v) $f(x,y) = x\operatorname{sen} y - ye^x$, $Q = [-1,1]\times[0,\pi/2]$,

Problema 3.2. Dibuja la región de integración Q y calcula $\displaystyle\int_Q f$ en los siguientes casos:

i) $f(x,y) = x^2 - y$, $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x\in[-1,1],\ -x^2\le y\le x^2\}$,

ii) $f(x,y) = xy - x^3$, $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x\in[0,1],\ -1\le y\le x\}$,

iii) $f(x,y) = 2x - \operatorname{sen}(x^2y)$, $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ x\in[-2,2],\ |y|\le|x|\}$,

iv) $f(x,y) = y\operatorname{sen} x$, $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,,\ |x|+|y|\le 1\}$.

Problema 3.3.

i) Prueba, sin resolver la integral, que

$$4\pi \le \int_D (x^2+y^2+1)\,dx\,dy \le 20\pi\,,$$

donde D es el disco de radio 2 centrado en el origen.

ii) Sea A el cuadrado $[0,2]\times[1,3]$ y sea $f(x,y) = x^2y$. Prueba, sin hacer la integral, que

$$0 \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le 48\,.$$

iii) Utilizando una partición de A en cuatro cuadrados iguales mejora esta última estimación y prueba que

$$3 \le \int_A f(x,y)\,dx\,dy \le 25\,.$$

Problema 3.4. Calcula $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$, donde $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$.

Problema 3.5. Determina el recinto de integración y cambia el orden de integración en las siguientes integrales:

$$i) \quad \int_0^3 \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\,dx \qquad\qquad ii) \quad \int_0^1 \int_0^y f(x,y)dx\,dy$$

$$iii) \quad \int_0^{\pi/2} \int_{-\operatorname{sen}(x/2)}^{\operatorname{sen}(x/2)} f(x,y)dy\,dx \qquad iv) \quad \int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\log x} f(x,y)dy\,dx.$$

Problema 3.6. Sobre el recinto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x \ge 0\}$, se consideran las funciones $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $g(x,y) = \operatorname{sen}(y-1)$. Aplica el teorema de Fubini a $\int_R f$ e $\int_R g$ en las dos ordenaciones posibles. Calcula las integrales en el orden más adecuado.

Problema 3.7. Halla el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx$.

Problema 3.8. Calcula

i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz,$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)^2\, dxdydz.$

Problema 3.9. Calcula las siguientes integrales en los recintos que se indican:

i) $\displaystyle\int_W x^3\, dV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

ii) $\displaystyle\int_W e^{-xy} y\, dV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

iii) $\displaystyle\int_W (2x + 3y + z)\, dV$, donde $W = [1,2] \times [-1,1] \times [0,1]$.

iv) $\displaystyle\int_W z e^{x+y}\, dV$, donde $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Problema 3.10. Calcula la integral $\displaystyle\int_W x^2 \cos x\, dV$, donde W es la región limitada por los planos $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y = 1$. Esboza la región de integración.

3.2 Cambios de variables en la integral múltiple.

Problema 3.11. Usa una transformación lineal para calcular $\displaystyle\int_S (x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)\, dxdy,$ siendo S el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

Problema 3.12. Calcula $\displaystyle\int_D (y-x)\, dxdy$, siendo D la región del plano limitada por las rectas $y = x+1$, $y = x-3$, $y = (7-x)/3$ e $y = 5 - x/3$.

Problema 3.13. Sea la aplicación definida por $\left\{ \begin{array}{l} x = u + v \\ y = v - u^2 \end{array} \right.$. Calcula:

i) el jacobiano $J(u,v)$;

ii) la imagen S en el plano XY del triángulo T en el plano UV de vértices (0,0), (2,0) y (0,2);

iii) el área de S;

iv) la integral $\displaystyle\int_S (x - y + 1)^{-2} dxdy.$

Problema 3.14. Calcula la integral doble $\displaystyle\int\int_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$ donde D es el recinto del primer cuadrante del plano comprendido entre las curvas $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4$.

Problema 3.15. Halla la integral de la función

$$f(x,y)=\frac{y^4}{b^4\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)\Big(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)}+xy^2$$

sobre el recinto $D=\Big\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\Big\}$, donde a y b son constantes positivas.

Problema 3.16. Halla la integral de la función

$$f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sobre los recintos $E=\{\,x^2+(y-1)^2\le 1\,\}$ y $H=\{\,x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\ge 0\,\}$.

Problema 3.17. Sobre el recinto $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\ge 0\}$, halla la integral de la función $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{2y^2+x^2}}{y}$.

Problema 3.18. Calcula la integral $\displaystyle\int_S \frac{x\,dx\,dy}{4x^2+y^2}$, donde S es la región del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y las elipses $4x^2+y^2=16,\ 4x^2+y^2=1$.

Problema 3.19. Si R es la región limitada por el plano $z=3$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, calcula

$$i)\quad \int_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz\,,\qquad ii)\quad \int_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdydz\,,$$
$$iii)\quad \int_R z\,\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz\,.$$

Problema 3.20. Calcula $\displaystyle\int_W f(x,y,z)\,dxdydz$, donde $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, y W es la región que queda bajo la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ y sobre el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

3.3 Aplicaciones.

Problema 3.21. Calcula las siguientes áreas:

i) área limitada por las curvas $y=x$ e $y=2-x^2$;

ii) área de la región $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x,y>0,\ a^2y\le x^3\le b^2y,\ p^2x\le y^3\le q^2x,\}$, donde $0<a<b$ y $0<p<q$.

iii) área encerrada por las curvas $xy=4$, $xy=8$, $xy^3=5$ y $xy^3=15$.

Problema 3.22. Calcula los siguientes volúmenes:

i) volumen de la intersección del cilindro $x^2+y^2\le 4$ y la bola $x^2+y^2+z^2\le 16$;

ii) volumen del sólido limitado por los conos $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=-1+\sqrt{x^2+y^2}$;

iii) volumen de la región limitada por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2=4$ en $z\ge 0$;

iv) volumen de la región limitada por $x^2+y^2+z^2\le 2,\ x^2+y^2\le z$ y $z\le 6/5$;

Problema 3.23. Halla los volúmenes de las regiones limitadas por:

i) $z=x^2+3y^2,\ z=9-x^2$.

ii) $x^2 + 2y^2 = 2,\ z = 0,\ x + y + 2z = 2.$

Problema 3.24. Calcula el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Estudia el caso particular de la bola $a = b = c = R$.

Problema 3.25. Calcula el volumen comprendido entre el cilindro $r = 4\cos\theta$, la esfera $r^2 + z^2 = 16$ y el plano $z = 0$. (Las ecuaciones están expresadas en coordenadas cilíndricas.)

Problema 3.26. Halla la masa de la lámina correspondiente a la porción del primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia al centro del círculo.

Problema 3.27. Sea S una región del plano limitada por las curvas que se indican. Calcula la masa y el centro de gravedad de S suponiendo que la densidad es constante ρ:

i) $y = x^2$, $x + y = 2$,

ii) $y + 3 = x^2$, $x^2 = 5 - y$,

iii) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $x \in [0, \pi]$,

iv) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x \in [0, \pi/4]$.

Problema 3.28. Calcula el momento de inercia respecto del eje vertical del sólido

$$V = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$$

(suponiendo la densidad constante α).

Problema 3.29. Sea A el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Calcula su masa total suponiendo que la densidad en el punto $(x, y) \in A$ es $|x - y|$.

Problema 3.30. Determina las coordenadas del centro de gravedad de la placa

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 3\}$$

cuya densidad viene dada por la función $f(x, y) = xy$.

Problema 3.31. Una placa metálica viene representada por el conjunto del plano:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ |y| \leq x \leq 1\}$$

y su densidad en P es $f(x, y) = y^2$. Calcula el centro de gravedad y los momentos de inercia con respecto a los ejes.

Problema 3.32. Se considera la placa plana

$$Q = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ (x + y)^2 \leq x - y \leq \sqrt{x + y}\,,\ x + y \geq 0\}$$

con una densidad de masa dada por la función $\rho(x, y) = x^2 - y^2$. Calcula la masa total de la placa.

Problema 3.33.

i) Calcula el área del conjunto $D = \{\,x = r\cos^3 t,\ y = r\operatorname{sen}^3 t,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq t \leq \pi/2\} = \{\,x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1,\ x, y \geq 0\}$.

ii) Calcula las coordenadas del centro de masas de D si tiene densidad constante.

Problema 3.34. El cuadrado Q de vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ representa una lámina de densidad constante ρ. Calcula el momento de inercia respecto de la recta $x = y$.

Problema 3.35. El primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ se corta con el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $0 < a, b \leq c$. Halla la masa de los dos sólidos resultantes sabiendo que la densidad en cada punto es $\rho(x, y, z) = z$.

Problema 3.36. La temperatura en los puntos del cubo $[-1,1]^3$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

i) Calcula la temperatura media del cubo.

ii) Encuentra en qué puntos del cubo la temperatura coincide con la media.

Problema 3.37. Calcula el centro de masas de un sólido semiesférico de radio R si su densidad en cada punto es el cuadrado de la distancia del punto al centro.

Problema 3.38. Un helado de cucurucho está formado por un cono de barquillo de ángulo α y una semiesfera de helado de radio R. El cucurucho y el helado tienen densidades constantes ρ_c y ρ_h respectivamente. Determina el cociente ρ_c/ρ_h para que el centro de masas del helado esté situado en el plano que separa el helado del barquillo.

Problema 3.39. Se considera un sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ limitado por las superficies

$$z^2 = x^2 + y^2, \qquad (z-2)^2 = 9\left(x^2+y^2\right).$$

i) Representa gráficamente V en coordenadas cilíndricas.

ii) Calcula las coordenadas del centro de masa si la densidad de V es constante.