uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA

Elaborados por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez, con Arturo de Pablo y Elena Romera

4 Integrales de línea y de superficie

4.1 Integrales sobre curvas y campos conservativos.

Problema 4.1. Integra

i) $f(x,y) = 2xy^2$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia de radio R.

ii) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$ a lo largo del arco de hélice circular $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3t)$, desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,6\pi)$.

Problema 4.2. Determina la longitud y la masa de un hilo cuya forma es el arco de parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(2,4)$ y cuya densidad es $\rho(x,y) = x$.

Problema 4.3. En los ejercicios que siguen, calcula la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}$ a lo largo del camino que se indica:

i) $\mathbf{f}(x,y) = (x^2-2xy, y^2-2xy)$, a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1,1)$ a $(1,1)$,

ii) $\mathbf{f}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1-|1-x|$,desde $(0,0)$ a $(2,0)$,

iii) $\mathbf{f}(x,y,z) = (y^2-z^2, 2yz, -x^2)$, a lo largo del camino descrito por $r(t) = (t,t^2,t^3)$, con $t \in [0,1]$,

iv) $\mathbf{f}(x,y,z) = (2xy, x^2+z, y)$, a lo largo del segmento que une $(1,0,2)$ con $(3,4,1)$

Problema 4.4. Se considera la función vectorial $f(x,y) = (x^2,y)$. Calcula la integral de línea de f desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$ a lo largo de:

i) El segmento que une ambos puntos.

ii) Los dos recorridos posibles del rectángulo $[-1,1]\times[-1,1]$.

iii) La semicircunferencia superior que une ambos puntos.

Problema 4.5. Calcula:

i) $\displaystyle\int_g (x-y)dx + (x+y)dy$, siendo g el segmento que une (1,0) con (0,2).

ii) $\displaystyle\int_C x^3dy - y^3dx$, siendo C la circunferencia unidad.

iii) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, siendo Γ el cuadrado de vértices (1,0), (0,1), $(-1,0)$ y $(0,-1)$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

iv) $\displaystyle\int_\rho (x+2y)dx + (3x-y)dy$ siendo ρ la elipse de ecuación $x^2+4y^2 = 4$, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.

v) $\displaystyle\int_R \frac{y^3dx - xy^2dy}{x^5}$, siendo R la curva $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = t\sqrt{1-t^2}$, $-1 \le t \le 1$.

Problema 4.6. Calcula:

i) $\displaystyle\int_\gamma y\,dx - x\,dy + z\,dz$, siendo γ la curva de intersección del cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el plano $z-y=a$ en sentido antihorario.

ii) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy+z^2, x^2, 2xz)$ y γ la intersección del plano $x=y$ con la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, recorrida en cualquiera de los dos sentidos.

iii) $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ y γ la curva intersección de $x^2+y^2=2x$ con $x=z$, recorrida en sentido positivo.

Problema 4.7. Una partícula de masa m se mueve desde $t=0$ hasta $t=1$ describiendo la curva:

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, \cos t),\ t \in [0,1].$$

Halla la fuerza que actúa sobre la partícula sabiendo que viene dada por la expresión $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{r}''(t)$ (segunda ley de Newton). Calcula también el trabajo total realizado por dicha fuerza.

Problema 4.8. Halla el valor de $b>0$ que minimiza el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (3y^2+2, 16x)$, desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$, a lo largo de la semielipse $b^2x^2+y^2=b^2$, $y\geq 0$.

Problema 4.9. Considera el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (cxy, x^6y^2)$, $a,b,c>0$. Calcula el parámetro a en términos de c para que el trabajo producido al mover una partícula a lo largo de la parábola $y=ax^b$ desde $x=0$ hasta $x=1$ no dependa de b.

Problema 4.10. Calcula el trabajo producido al mover una partícula sometida al campo de fuerzas (en polares) $\mathbf{F}(r,\theta) = (-4\operatorname{sen}\theta, 4\operatorname{sen}\theta)$, a lo largo de la curva $r=\mathrm{e}^{-\theta}$ desde el punto (1,0) hasta el origen.

Problema 4.11. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} y + z, x\cos y + \mathrm{e}^z, x + y\mathrm{e}^z)$.

i) Prueba que la integral sobre cualquier curva cerrada, regular a trozos, vale 0.

ii) Obtén el potencial de F, es decir, encuentra ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

Problema 4.12. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz\mathrm{e}^{x^2+y^2}, 2yz\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \mathrm{e}^{x^2+y^2})$ y γ la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{r}(t) = (t,t^2,t^3)$, $0\leq t\leq 1$.

Problema 4.13. Sea la curva en $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \Big(\mathrm{e}^{t^2} + t(1-\mathrm{e}) - 1, \operatorname{sen}^5(\pi t), \cos(t^2-t)\Big)$, $t\in[0,1]$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z+x^4\operatorname{sen} x^5,\ x+z+\operatorname{arctg} y,\ x+y+\operatorname{sen}^2 z)$.

i) Halla $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}$.

ii) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$? En caso afirmativo halla f.

Problema 4.14. Sea la curva en $\mathbb{R}^3$, $\Gamma = \{\, x^2+y^2=1,\ z=y^2-x^2 \,\}$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^3, \mathrm{e}^y, z)$.

i) Halla $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{F}$.

ii) ¿Existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$?

Problema 4.15. Determina a y b de manera que el campo vectorial

$$\mathbf{w}(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}\Big((a\operatorname{sen} x + a\cos y + \cos x),\ (b\operatorname{sen} x + b\cos y - \operatorname{sen} y)\Big)$$

sea conservativo, y calcula la función potencial correspondiente.

Problema 4.16. Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big(\frac{\log(xy)}{x}\,,\ \frac{\log(xy)}{y}\Big),$$

definido para $x>0$, $y>0$, y sean $a>0$, $b>0$ dos constantes.

i) Calcula $\int_\gamma \mathbf{F}$ siendo γ el arco de la hipérbola $xy=a$ con $x_1 \le x \le x_2$.

ii) Si A es un punto (cualquiera) de la hipérbola $xy=a$, B es un punto (cualquiera) de la hipérbola $xy=b$, y γ es una curva (cualquiera) de clase C^1, contenida en el primer cuadrante que une A con B, prueba que

$$\int_\gamma \mathbf{F} = \frac{1}{2}\,\log(ab)\,\log(b/a)\,.$$

4.2 Integrales sobre superficies.

Problema 4.17. Calcula el área de las siguientes superficies:

i) esfera de radio R;

ii) cono circular parametrizado por $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u)$, donde $0 \le u \le a$ y $0 \le v \le 2\pi$.

iii) porción del paraboloide $z = x^2+y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=a^2$;

iv) porción del cilindro $x^2+z^2=16$ limitada por el cilindro $x^2+y^2=16$.

Problema 4.18. Halla el área de la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ situada fuera de los cilindros $x^2+y^2=\pm ax$.

Problema 4.19.

i) Deduce la fórmula del área de la superficie de revolución obtenida al girar la gráfica $y=f(x),\ 0<a\le x\le b$, alrededor del eje vertical:

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,,$$

con la parametrización $\mathbf{s}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, f(r))$, donde $a\le r\le b$ y $0\le\theta\le 2\pi$.

ii) Obtén el área de la superficie del toro obtenido al girar la gráfica $(x-R)^2+y^2=c^2,\ 0<c<R$.

iii) Deduce la parametrización correspondiente para obtener la fórmula análoga en el caso de girar la gráfica $y=f(x),\ a\le x\le b$, alrededor del eje horizontal.

Problema 4.20. Sea el conjunto de $\mathbb{R}^3$, $W=\{1\le z\le (x^2+y^2)^{-1/2}\}$. Demostrar que W tiene volumen finito pero su frontera tiene área infinita.

Problema 4.21. Halla el momento de inercia respecto de un diámetro de una lámina esférica homogénea de masa m y radio a.

4.3 Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Problema 4.22. Calcula $\int_\gamma (5-xy-y^2)dx-(2xy-x^2)dy$ siendo γ el cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1), directamente y aplicando el teorema de Green.

Problema 4.23. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$. Sean

$$P(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} - \frac{y}{3+\mathrm{e}^{xy}}, \quad Q(x,y) = f(y),$$

y γ la frontera del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ recorrida en sentido positivo. Calcula $\int_\gamma Pdx+Qdy$.

Problema 4.24. Sean las funciones $P(x,y) = y/(x^2+y^2)$ y $Q(x,y) = -x/(x^2+y^2)$. Sea C una curva cerrada, regular a trozos, que no pasa por el origen, con $C = \partial D$.

i) Demuestra que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

ii) Si $(0,0) \in D$, prueba que $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \pm 2\pi$, dependiendo de la orientación de γ.

iii) Si $(0,0) \notin D$, calcula $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy$.

Problema 4.25. Evalúa $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$, siendo γ una curva cerrada, simple, regular a trozos, que contiene al punto (1,0) en su interior.

Problema 4.26.

i) Sea A el área de un dominio D, acotado por C curva cerrada, simple, regular a trozos, y orientada en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). Prueba que

$$A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy\,,$$

y que en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2}\int_C r^2(\theta)\,d\theta.$$

ii) Calcula el área interior al bucle que forma la curva parametrizada como $\mathbf{s}(t) = (t^2-1, t^3-t)$.

iii) Calcula el área de la cardioide en polares $r(\theta) = a(1-\cos\theta)$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$.

Problema 4.27.

i) Calcula $\displaystyle\int_D (x+2y)dxdy$, donde D es el dominio acotado por el intervalo $[0,2\pi]$ y la arcada de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1-\cos t$, con $0 \le t \le 2\pi$.

ii) Calcula $\displaystyle\int_D xy^2dxdy$, donde D es el dominio limitado por el astroide $x = \cos^3 t,\ y = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$ y los ejes.

iii) Calcula $\displaystyle\int_D y^2dxdy$, donde D es el dominio limitado por la curva $x = a(t - \operatorname{sen}^2 t),\ y = a\operatorname{sen}^2 t$, $0 \le t \le \pi$, y la recta que une sus extremos.

Problema 4.28. Utilizando el teorema de Stokes calcula la integral $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}$ en los siguientes casos, donde S está orientada según la normal exterior:

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y^2, yz, xy)$ y S el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$.

ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = ((1-z)y, ze^x, x\operatorname{sen} z)$ y S la semiesfera superior de radio a.

iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3+z^3, e^{x+y+z}, x^3+y^3)$ y $S = \{\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ y \ge 0\,\}$.

Problema 4.29. Considera el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(y\,,\ x^2\,,\ (x^2+y^4)^{3/2}\operatorname{sen}(e^{\sqrt{xyz}})\Big)$. Calcula $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ denota la normal interior al semielipsoide

$$S = \{(x,y,z):\ 4\,x^2 + 9\,y^2 + 36\,z^2 = 36\,,\ z \ge 0\}\,.$$

Problema 4.30. Sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y, 3z, x)$ y T el triángulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(1,1,1)$.

i) Da una orientación a la superficie del triángulo T y la inducida en la frontera.

ii) Calcula la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ sobre la frontera de T.

Problema 4.31. Se consideran la función $\mathbf{F}(x,y,z) = (y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2), -x\,\mathrm{sen}(x^2+y^2), z(3-2y))$ y el dominio $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Calcula $\displaystyle\int_{\partial W} \mathbf{F}$, si ∂W se orienta con la normal exterior.

Problema 4.32. Verificar el teorema de Stokes para

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, xy, xz)$, en el paraboloide $z = a^2 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$.

ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y^3, x^3, z^3)$ en $S = \{\, z = y,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1 \,\}$.

Problema 4.33. Calcula la integral $\displaystyle\int_S \mathbf{F}$, donde S se orienta con la normal que apunta hacia arriba (con tercera componente positiva) en el apartado *i)*, y con la normal exterior en los apartados *ii) iii) iv)*:

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (18z, -12, 3y)$, y S es la región del plano $2x+3y+6z = 12$ situada en el primer octante.

ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, x^2y, x^2z)$, y S es la superficie cerrada que consta del cilindro $x^2+y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$, y sus tapas superior e inferior.

iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$, y S es la superficie que limita el cubo $0 \leq x,\ y,\ z \leq 1$.

iv) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, y S es una superficie cerrada simple.

Problema 4.34. Sea S el cuadrado de vértices $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(0,1,1)$ (orientado con la normal de primera coordenada positiva). Se considera también el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, 2y^2z, 3z^2x).$$

Calcular $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ de dos maneras distintas (directamente y utilizando el Teorema de Stokes).

Problema 4.35. Se consideran la superficie $S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ y \geq 0 \,\}$ orientada con la normal exterior a la esfera unidad, y la función $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+z, y+z, 2z)$.

i) Calcula $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.

ii) Calcula $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.

Problema 4.36. Calcula el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, yz, xz)$ a través de la superficie del tetraedro acotado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y+z = 1$, orientada según la normal exterior.

Problema 4.37. Supongamos que la temperatura en cada punto del espacio sea proporcional al cuadrado de la distancia al eje vertical, y consideremos el dominio $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 2z,\ z \leq 2 \,\}$.

i) Calcula el volumen de V.

ii) Calcula la temperatura promedio en V.

iii) Calcula el flujo del gradiente de temperatura a través (y hacia fuera) de ∂V.

Problema 4.38. Calcula $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ en los siguientes casos, donde $\mathbf{n}$ denota la normal exterior en los apartados *i) iii) iv)*, y la normal que apunta hacia arriba (con tercera componente positiva) en el apartado *ii)*:

i) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S la frontera del cubo $0 \leq x,\ y,\ z \leq 1$.

ii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, -x^2, x+z)$ y S la porción del plano $2x+2y+z=6$ situada en el primer octante.

iii) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz^2, x^2y - z^2, 2xy + y^2z)$ y S la semiesfera superior $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

iv) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x^2 + \cos yz, 3y^2z^2 + \cos(x^2+z^2), \mathrm{e}^{y^2} - 2yz^3)$ y S la superficie del sólido engendrado por el corte del cono $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ y la bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Problema 4.39. Sea S la esfera de radio a orientada con su vector normal exterior, y sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (\operatorname{sen} yz + \mathrm{e}^z, x\cos z + \log(1+x^2+z^2), \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2})$. Calcula $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.

Problema 4.40. Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 y S_2 son las superficies

$$S_1 = \{\, x^2+y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1 \,\} \qquad S_2 = \{\, x^2+y^2+(z-1)^2 = 1,\ z \geq 1 \,\},$$

y sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$.

i) Calcula $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ utilizando el teorema de Stokes.

ii) Calcula la misma integral utilizando el teorema de la divergencia.

Problema 4.41. Sea $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Halla $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario interior a $\partial\Omega$, y

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\mathrm{e}^{y^2+z^2} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2+y^2}}{\sqrt{t^2+y^2}}\,dt,\ \operatorname{sen}(x^2+\mathrm{e}^z),\ h(x,y) \right),$$

$$\Omega = \{\, (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq 0,\ y \geq 0 \,\}.$$

Problema 4.42. Considera el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(y\,\mathrm{e}^z\,,\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2+\cos z}dt\,,\ z(x^2+y^2) \Big)\,.$$

Calcula $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ denota la normal exterior a la frontera del dominio

$$\Omega = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 < a^2\,,\ x^2+y^2 < z^2\}\,.$$