uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaborados por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez, con Arturo de Pablo y Elena Romera

5 Transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales

5.1 Transformada de Laplace.

Problema 5.1. Demuestra las siguientes propiedades de la función *gamma*, definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

i) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

iii) Deduce de lo anterior que $\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

iv) Si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

v) Si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

Problema 5.2. Si $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[0, N]$ para todo $N > 0$, y tiene crecimiento a lo sumo exponencial (es decir, $|f(t)| \le c\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, para todo $t > T$, donde c, α, T son ciertas constantes que dependen de f), la *transformada de Laplace* de f se define mediante

$$L(f)(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt\,.$$

i) Prueba que $L(f)(s)$ converge para $s \in (\alpha, \infty)$.

ii) Prueba que si $|f(t)| \le c\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, para todo $t > 0$, entonces

$$\big|L(f)(s)\big| \le \frac{c}{s - \alpha}\,, \qquad s > \alpha.$$

Problema 5.3.

i) Prueba que si $f(t) \equiv 1$, entonces $L(f)(s) = 1/s$, para $s > 0$.

ii) Integrando por partes, prueba que si $f(t) = t^n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$L(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,, \qquad s > 0\,.$$

iii) Usando la función gamma, prueba que si $f(t) = t^{-1/2}$, entonces

$$L(f)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,.$$

¿Contradice esto el último apartado del ejercicio anterior?

iv) Usando la función gamma, prueba que si $f(t) = t^b$, con $b > -1$, entonces

$$L(f)(s) = \frac{\Gamma(b+1)}{s^{b+1}}\,.$$

Problema 5.4. Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

i) $L(\alpha f + \beta g) = \alpha\, L(f) + \beta\, L(g), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

ii) Si se define $f = 0$ para $t < 0$, entonces si $a > 0$ se tiene,

$$L(f(t-a))(s) = \mathrm{e}^{-as} L(f)(s)\,.$$

iii) $L(\mathrm{e}^{-at} f(t))(s) = L(f)(s+a), \qquad a \in \mathbb{R}.$

iv) $L(f(at))(s) = \dfrac{1}{a}\, L(f(t))\Big(\dfrac{s}{a}\Big), \qquad a > 0.$

Problema 5.5. Usando las propiedades anteriores calcula la transformada de Laplace de las funciones siguientes, indicando en cada caso su dominio.

i) $f(x) = \mathrm{e}^{ax}, \quad (a \in \mathbb{R}),$

ii) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{ax}, \quad (a \in \mathbb{R}),$

iii) $f(x) = \mathrm{e}^{x}/\sqrt{x}\,,$

iv) $f(x) = x^b \mathrm{e}^{ax}, \quad (a \in \mathbb{R},\ b > -1),$

v) $f(x) = \operatorname{sen}(ax), \quad (a \in \mathbb{R}),$

vi) $f(x) = \cos(ax), \quad (a \in \mathbb{R}),$

vii) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx), \quad (a, b \in \mathbb{R}),$

viii) $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen}(bx), \quad (a, b \in \mathbb{R}),$

ix) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x,$

x) $f(x) = \cos^2 x.$

Problema 5.6. Sea f una función continua en $[0, \infty)$ con crecimiento a lo sumo exponencial.

i) Prueba que si f es derivable en $(0, \infty)$ y f' es continua, entonces

$$L(f')(s) = s\,L(f)(s) - f(0)\,.$$

ii) Deduce a partir de *i*) que si f'' es continua, entonces

$$L(f'')(s) = s^2\,L(f)(s) - s\,f(0) - f'(0)\,.$$

iii) Suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ es derivable y que

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = -L(t\,f(t))(s)\,.$$

iv) Más aún, suponiendo que se puede derivar bajo el signo integral, prueba que $L(f)$ tiene derivadas de todos los órdenes y que

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Problema 5.7. Usando el ejercicio anterior si es necesario, halla la transformada de Laplace de las siguientes funciones, indicando en cada caso su dominio:

i) $f(x) = x\cos(ax) \quad (a \in \mathbb{R}),$

ii) $f(x) = x^2\operatorname{sen}(ax) \quad (a \in \mathbb{R}),$

iii) $f(x) = \operatorname{sen}^3 x\,,$

iv) $f(x) = \cos^3 x\,.$

Indicación: *iii*) $4\operatorname{sen}^3 x = 3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$; *iv*) $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$.

Problema 5.8. Halla la función cuya transformada de Laplace es

$$i)\quad \frac{1}{s^2-1} \qquad\qquad ii)\quad \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$iii)\quad \frac{1}{s(s+1)^2} \qquad\qquad iv)\quad \frac{1}{s^n}\quad (n\in\mathbb{N})$$

$$v)\quad \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} \qquad\qquad vi)\quad \frac{4s+12}{s^2+8s+16}$$

$$vii)\quad \frac{s\,\mathrm{e}^{-\pi s/2}}{s^2+a^2} \qquad\qquad viii)\quad \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

5.2 Ecuaciones diferenciales.

Problema 5.9. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial

$$i)\ \begin{cases} y'-3y=\mathrm{e}^{2t}\\ y(0)=1\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} y'+3y=\operatorname{sen} 2t\\ y(0)=0\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases} y'-5y=\cos 3t\\ y(0)=1/2\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases} y'-5y=\mathrm{e}^{5t}\\ y(0)=1/2\end{cases}$$

$$v)\ \begin{cases} y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-t}\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases} \qquad vi)\ \begin{cases} y''-y=\mathrm{e}^{2t}\\ y(0)=0, y'(0)=1\end{cases}$$

$$vii)\ \begin{cases} y''+16y=\cos 4t\\ y(0)=0,\ y'(0)=1\end{cases} \qquad viii)\ \begin{cases} y''+2y'+y=\mathrm{e}^{-3t}\\ y(0)=1,\ y'(0)=0\end{cases}$$

$$ix)\ \begin{cases} y''-6y'+9y=t^2\mathrm{e}^{3t}\\ y(0)=2,\ y'(0)=6\end{cases} \qquad x)\ \begin{cases} y''+4y'+6y=1+\mathrm{e}^{-t}\\ y(0)=0,\ y'(0)=0\end{cases}$$

Problema 5.10. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial, para $t>0$,

$$i)\begin{cases} y'''(t)-4y''(t)-5y'(t)=3\\ y(0)=y''(0)=0,\quad y'(0)=1.\end{cases}$$

$$ii)\begin{cases} x'''(t)+x''(t)-6x'(t)=0\\ x(0)=x'(0)=0,\quad x''(0)=1.\end{cases}$$

Problema 5.11. Resuelve, para $\omega\neq\omega_0$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x''+\omega_0^2\,x=k\operatorname{sen}\omega t,\quad t>0,\\ x(0)=x'(0)=0,\end{cases}$$

que describe las oscilaciones forzadas de una masa en un resorte no amortiguado. ¿Qué pasa si $\omega=\omega_0$?
Indicación: $L^{-1}\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\} = \frac{1}{2a^3}(\operatorname{sen} at - at\cos at)$.