uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez,
con Paulo Enrique Fernández Moncada, Arturo de Pablo y Elena Romera

1 Cálculo diferencial en varias variables.

1.1 Funciones de varias variables. Límites y continuidad.

Problema 1.1
$i)$ ninguna de las dos cosas, $A^\circ = \{(x,y) : |x| < 1, y < 0\}$, $\partial A = \{|x| = 1,\ y \le 0\} \cup \{y = 0,\ |x| \le 1\}$; $ii)$ ninguna de las dos cosas, $B^\circ = \emptyset$, $\partial B = \{x = 1,\ 1 \le y \le 2\}$; $iii)$ cerrado, $C^\circ = \{(x,y) \in C : x > 1, 0 < y < 2x\}$, $\partial C = \{x = 1,\ 0 \le y \le 2\} \cup \{y = 0,\ x \ge 1\} \cup \{y = 2x,\ x \ge 1\}$; $iv)$ cerrado, $D^\circ = \emptyset$, $\partial D = D$; $v)$ cerrado, $E^\circ = \{(x,y) :\ x^2 + 3y^2 < 2\}$, $\partial E = \{(x,y) :\ x^2 + 3y^2 = 2\}$; $vi)$ abierto, $F^\circ = F$, $\partial F = \{(x,y) :\ x^2 + 3y^2 = 2\}$; $vii)$ cerrado, $G^\circ = \emptyset$, $\partial G = G$; $viii)$ abierto, $H^\circ = H$, $\partial H = \{(x,y) :\ y = x^2\}$.

Problema 1.2
(1) abierto, (2) abierto, (3) ninguna de las tres cosas, (4) compacto, (5) abierto, (6) cerrado, (7) compacto, (8) abierto.

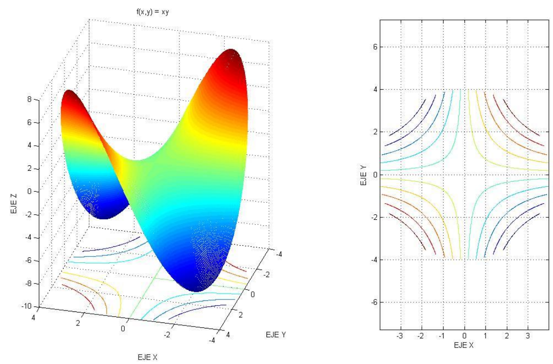
Problema 1.3
(1) $A^\circ = A$, $\overline{A} = D$, $\partial A = \{(x,y) \in D : x = 5 \text{ ó } x = 7,\ 0 \le y \le 1\} \cup \{y = 0 \text{ ó } y = 1,\ 5 \le x \le 7\}$;
(2) $B^\circ = B$, $\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0\}$, $\partial B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
(3) $C^\circ = A$, $\overline{C} = D$, $\partial C = \partial A$;
(4) $D^\circ = A$, $\overline{D} = D$, $\partial D = \partial A$;
(5) $E^\circ = E$, $\overline{E} = F$, $\partial E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| = 3\}$;
(6) $F^\circ = E$, $\overline{F} = F$, $\partial F = \partial E$;
(7) $G^\circ = \emptyset$, $\overline{G} = G$, $\partial G = G$;
(8) $H^\circ = H$, $\overline{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| \le 3\}$, $\partial H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \|\mathbf{x}\| = 3\}$.

Problema 1.4
$i)$ $f(1, y/x) = f(x,y)$; $ii)$ $\dfrac{x^2(1-y^2)}{(1+y)^2}$; $iii)$ $f(x) = x - x^2$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2y$; $iv)$ $f(x) = -2x - x^2$, $g(x,y) = x + \sqrt{y} - 1$.

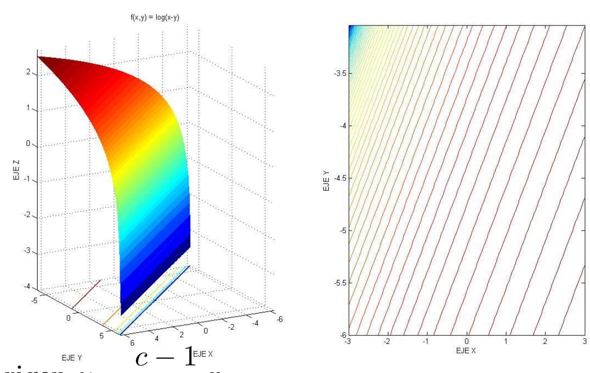
Problema 1.5
$i)$ $\mathbb{R}^2$; $ii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - 4y^2 \ge 0\}$; $iii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \ne y\}$; $iv)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \ge 1\}$; $v)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy \ne 0\}$; $vi)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x + y \le 1\}$; $vii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \ne 0\}$; $viii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ xy > 0\}$; $ix)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \cos(x-y) \ne 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y \ne \pi/2 + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$; $x)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - y \ne 0\}$; $xi)$ $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 \le 9,\ x^2 + z^2 \le 4\}$; $xii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1,\ xy \ne x + y\}$; $xiii)$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| > 1\}$.

Problema 1.6
$i)$ $\mathbb{R}$; $ii)$ $[0,\infty)$; $iii)$ $\mathbb{R}$; $iv)$ $[0,\infty)$; $v)$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

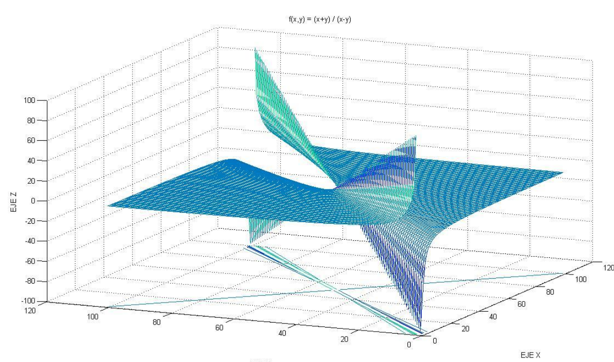
Problema 1.7
$i)$ Hipérbolas $xy = c$.



$ii)$ Rectas paralelas $y = x - \mathrm{e}^c$.



$ii)$ Rectas que pasan por el origen $y = \dfrac{c-1}{c+1}\,x$.



Problema 1.8
$i)$ no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$; $ii)$ $\ell = -3$; $iii)$ $|f(x,y)| \le |x|$ luego $\ell = 0$; $iv)$, $v)$, $vi)$, $vii)$, $ix)$, $x)$ no existe, pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x)$ depende de λ; $viii)$ $\ell = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$.

Problema 1.9
No se puede en ninguno de los dos casos: no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$, y $\lim\limits_{x\to 1} f(x,1)) = 1 \ne \lim\limits_{y\to 1} f(1,y) = 1/3$.

Problema 1.10
$i)$ Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $ii)$ Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; $iii)$ Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; $iv)$ Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $v)$ Es continua en todo $\mathbb{R}^2$; $vi)$ Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $vii)$ Es continua en todo $\mathbb{R}^2$;

viii) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x_0 = y_0 \neq 0\}$; *ix*) Es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : y_0 = \pm x_0^2\}$; *x*) Es continua en $\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0) : x_0y_0 = 0\}\big) \cup (0,0) \cup \big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \{(\frac{1}{k\pi},0),(0,\frac{1}{k\pi})\}\big)$.

Explicación: Está claro que las funciones *i*)–*vi*) son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ salvo posiblemente en el origen, y la existencia o no de límite en el origen se deduce igual que en el problema anterior. En *vii*) el denominador no se anula. En *viii*) se tiene $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} f(x,y) = \mathrm{e}^{-x_0} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{\mathrm{e}^t - 1} = \mathrm{e}^{-x_0}$. En *ix*) no existe $\lim_{x\to x_0} f(x, \pm x_0^2)$ si $x_0 \neq 0$, y además $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^2)$ depende de λ. En *x*) la función es continua salvo posiblemente en los ejes; en el origen es $|f(x,y)| \leq |x| + |y|$, así que el límite es 0; además, $\lim_{(x,y)\to(0,1/k\pi)} f(x,y) = 0$ pues es el producto de un término acotado y un término que tiende a cero, lo mismo que $\lim_{(x,y)\to(1/k\pi,0)} f(x,y) = 0$.

Problema 1.11

i) 0; *ii*) 1/2; *iii*) No pues $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x^3)$ depende de λ.

1.2 Derivadas. Diferenciabilidad.

Problema 1.12

i) $\nabla f = (6x - y, -x + 1)$; *ii*) $\nabla f = (3x^2 e^{-y}, -x^3 e^{-y})$;
iii) $\nabla f = (2x/(x^2+y^4), 4y^3/(x^2+y^4))$; *iv*) $\nabla f = (2g(x)g'(x)h(y), (g(x))^2 h'(y))$;
v) $\nabla f = (-x/\sqrt{1-(x^2+y^2)}, -y/\sqrt{1-(x^2+y^2)})$; *vi*) $\nabla f = (e^{y^2}, 2xye^{y^2} + e^z, ye^z)$;
vii) $\nabla f = (\operatorname{sen} y + z\cos x, x\cos y + \operatorname{sen} z, y\cos z + \operatorname{sen} x)$;
viii) $\nabla f = ((1+y)\cos(x+xy+z^2), x\ \cos(x+xy+z^2), 2z\ \cos(x+xy+z^2))$;
ix) $\nabla f = (y^2 z^{xy^2}\log z, 2xyz^{xy^2}\log z, xy^2 z^{xy^2-1})$; *x*) $\nabla f = (2gg_x h^3 + 3g^2h^2h_x, 2gg_y h^3, 3g^2h^2h_z)$;
xi) $\nabla f = (2r\operatorname{sen}\theta, r^2\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$; *xii*) $\nabla f = (3\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho^3\cos\varphi\cos\theta, -\rho^3\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta)$.

Problema 1.13

i) 0; *ii*) no existe el límite pues $\lim_{x\to 0} f(x,\lambda x)$ depende de λ.

Problema 1.14

Todas ellas son diferenciables por obtenerse mediante sumas, productos, cocientes y composiciones a partir de funciones diferenciables.

Problema 1.15

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; *ii*) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, y no existe $\lim_{y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{2}{y}$; *iii*) no existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{2xy}{x^2+y^2} - 0 - 0 - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pues poniendo $y = x$ sería $\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$; también se podría haber visto comprobando que la función f no es continua en el origen.

Problema 1.16

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$, que no existe.

Problema 1.17

i) f es continua en todo $\mathbb{R}^2$; *ii*) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, f es diferenciable en $(0,0)$ pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{x^2y^4}{x^2+y^2} - 0 - 0 - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Problema 1.18

i) g es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pues $\lim_{y\to 0} g(0,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{y}{|y|}$, que no existe; *ii)* las derivadas parciales no existen en $(0,0)$, pues $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{|h|}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{|h|}$; *iii)* por tanto, g no puede ser diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.19

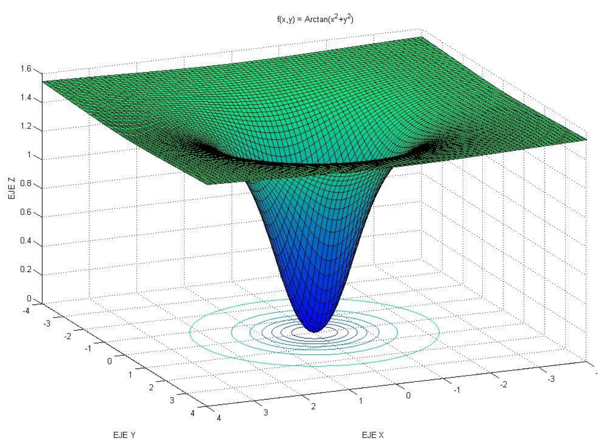
i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\big||xy|^{\alpha} - 0 - 0 - 0\big|}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|xy|^{1/2}|xy|^{\alpha-1/2}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0$; *ii)* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; el límite en *i)* no existe si $\alpha = 1/2$, calculando como siempre el límite a través de rectas $y = \lambda x$.

Problema 1.20

i) $z = 0 + 1(x-1) - 1(y-3)$, es decir, $x - y - z = -2$; *ii)* $4x - 8y - z = 8$; *iii)* $2x + y - z = 1$; *iv)* $2x + y - \sqrt{5}z = 0$.

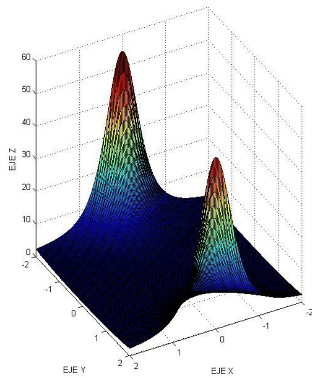
Problema 1.21

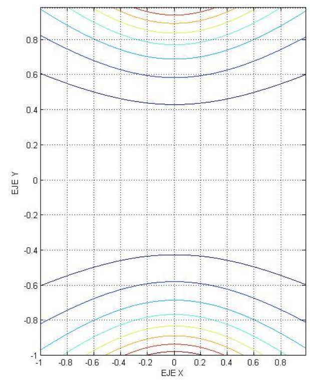
(i) $\mathrm{Img}(f) = [0, \pi/2)$, f es acotada; (ii) la curva de nivel para $c = 0$ contiene sólo el punto $\{(0,0)\}$; la curva de nivel para $c = \pi/4$ es una circunferencia centrada en el origen y de radio 1; (iii) $\nabla f(x,y) = \dfrac{2}{1+(x^2+y^2)^2}\,(x,y)\,;\; z = x + \dfrac{\pi}{4} - 1.$



Problema 1.22

Para $c = 1$ es la recta $y = 0$; para $c = 2$ es la hipérbola $\dfrac{y^2}{\log 2} - x^2 = 1\,.$





1.3 Funciones vectoriales y operadores diferenciales.

Problema 1.23

$i)$ $D\mathbf{A} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & x^y \log x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $ii)$ $D\mathbf{B} = (\operatorname{sen} y \cos(x \operatorname{sen} y) \quad x\cos y \cos(x \operatorname{sen} y))$;

$iii)$ $D\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1+e^x \\ 2x \\ -\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$; $iv)$ $D\mathbf{D} = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$; $v)$ $D\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{pmatrix}$;

$vi)$ $D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} ye^{xy} + xy^2e^{xy} & xe^{xy} + x^2ye^{xy} & 0 \\ \operatorname{sen} y & x\cos y & 0 \\ 5y^2 & 10xy & 0 \end{pmatrix}$ $vii)$ $D\mathbf{G} = (2x\log t + \sqrt{z}, -t, \dfrac{x}{2\sqrt{z}}, \dfrac{x^2}{t} - y)$.

Problema 1.24

$i)$ $DT = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

$ii)$

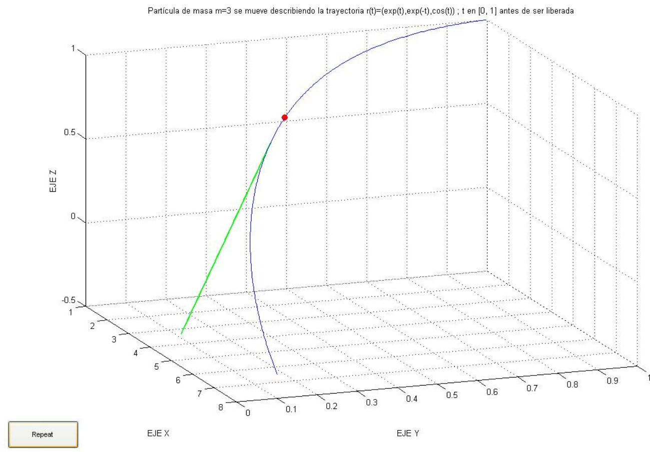
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|T_A(\mathbf{x}) - T_A(\mathbf{a}) - DT_A(\mathbf{a})\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \frac{\|A\mathbf{x} - A\mathbf{a} - A\,(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

Problema 1.25

$$\begin{array}{rll} i) & T_1(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) & JT_1 = r \\ ii) & T_2(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) & JT_2 = r \\ iii) & T_3(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi) & JT_3 = \rho^2\operatorname{sen}\varphi \\ iv) & T_4(r,\theta,z) = (\sqrt{r^2+z^2}, \theta, \operatorname{arctg}(r/z)) & JT_4 = 1/\sqrt{r^2+z^2} \end{array}$$

Problema 1.26

$i)$ $\mathbf{F} = (3,3,-3)$; $ii)$ La ecuación vectorial de la recta tangente es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(1) + (t-1)\,\mathbf{s}'(1) = (e, e^{-1}, \cos 1) + (t-1)(e, -e^{-1}, -\operatorname{sen} 1)$. Por tanto, la partícula se encuentra en el instante $t=2$ en $\mathbf{r}(2) = (2e, 0, \cos 1 - \operatorname{sen} 1)$.



Problema 1.27

i) $E'(t) = m\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}''(t) + \nabla V(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(t)\Big(\mathbf{F}(t) + \nabla V(\mathbf{r}(t))\Big) = 0$; *ii)* si $V(\mathbf{r}(t)) = V$ constante, como $E(t) = E$ constante, se tiene $||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{2(E-V)/m}$.

Problema 1.28

i) $\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) = (2t, 2, \dfrac{1}{2\sqrt{t}}) = \mathbf{s}'(t)$; *ii)* $\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) = (2\mathrm{e}^{2t}, -\dfrac{1}{t^2}, \dfrac{1}{t}) = \mathbf{s}'(t)$;
iii) $\mathbf{F}(\mathbf{s}(t)) = (\dfrac{1}{(1-t)^2}, \dfrac{1}{t}, \dfrac{\mathrm{e}^t(2-t)}{(1-t)^2}) = \mathbf{s}'(t)$.

Problema 1.29

i) $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y) = 6xy + 3y^2$; $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$; *ii)* $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 0$; $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,0)$; *iii)* $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{-2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;
$\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = \Big(\dfrac{2x^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{2y(x^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \dfrac{-2z^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}\Big)$.

Problema 1.30

i) $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 3$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$; *ii)* $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 6$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$; *iii)* $\operatorname{div}\mathbf{v}(x,y,z) = 1/r^2$; $\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z) = (0,0,0)$.

Problema 1.31

i) $\operatorname{rot}(\nabla f) = (\partial_y\partial_z f - \partial_z\partial_y f, -(\partial_x\partial_z f - \partial_z\partial_x f), \partial_x\partial_y f - \partial_y\partial_x f) = (0,0,0)$;
ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\,\mathbf{F}) = \partial_x(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \partial_y(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \partial_z(\partial_x F_2 - \partial_y F_1) = 0$; *iii)* $\dfrac{\partial(fg)}{\partial_{x_i}} = f\dfrac{\partial g}{\partial_{x_i}} + g\dfrac{\partial f}{\partial_{x_i}}$;
iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial(fF_i)}{\partial_{x_i}} = \sum_{i=1}^n \Big(f\frac{\partial F_i}{\partial_{x_i}} + F_i\frac{\partial f}{\partial_{x_i}}\Big)$; *v)* $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g + \nabla f\nabla g - (g\Delta f + \nabla g\nabla f)$.

Problema 1.32

i) $\nabla f = (r^k)'\nabla r = kr^{k-2}\mathbf{x}$, pues $\nabla r = \dfrac{\mathbf{x}}{r}$; *ii)* usando *iv)* del problema anterior y *i)*, $\operatorname{div}\mathbf{F} = r^k n + kr^{k-2}\mathbf{x}\mathbf{x} = (k+n)r^k$; *iii)* sabiendo que $r^k\mathbf{x} = \nabla f$ con $f = \dfrac{r^{k+2}}{k+2}$, si $k \neq -2$ y $f = \log r$ si $k = -2$, usando *i)* del problema anterior, rot $\mathbf{F} = 0$; *iv)* usando *i)* y *ii)*, $\Delta f = \operatorname{div}\,(\nabla f) = \operatorname{div}\,(kr^{k-2}\mathbf{x}) = k(k+n-2)r^{k-2}$.

1.4 Regla de la cadena y derivadas direccionales.

Problema 1.33
i) $D_{(1,-1)}f(1,1) = (2x, 3y^2)\big|_{(1,1)} \cdot (1,-1)\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -1/\sqrt{2}$; *ii)* $\sqrt{5}$; *iii)* $(7-4e)/5$; *iv)* $-3\sqrt{3}/2$; *v)* $\sqrt{6}$; *vi)* $6/\sqrt{10}$; *vii)* $2/(5\sqrt{5}\,)$; *viii)* $2/3$; *ix)* $24a + 10\sqrt{1-a^2}$, debe ser $a = 12/13$ para que la derivada sea máxima: se puede maximizar la función $g(a) = 24a + 10\sqrt{1-a^2}$ o elegir a para que el vector sea paralelo a $\nabla f(2,1) = (24,16)$; *x)* $31/\sqrt{105}$.

Problema 1.34
$x + 2y = 1$, pues $D_{(4,3)}f(x,y) = 2\mathrm{e}^{x+2y}$.

Problema 1.35
$D_{\mathbf{v}}f(x,y) = (3,1)\cdot\mathbf{v}$, así que hay que resolver el sistema para $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\left\{\begin{array}{l} 3v_1 + v_2 = 1 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{array}\right.$, con soluciones $\mathbf{v} = (0,1)$, $\mathbf{v} = (3/5, -4/5)$.

Problema 1.36
i) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, la condición es $v_1 - v_2 = 0$, que da $\mathbf{v} = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; *ii)* la condición ahora es $y_0v_1 - x_0v_2 = 0$, que da $\mathbf{v} = \pm(x_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2}, y_0/\sqrt{x_0^2+y_0^2})$; *iii)* son rectas que pasan por el origen.

Problema 1.37
i) $(2,2,2)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$, que implica $x+y+z = 3$; *ii)* $x - 2y + z = 0$; *iii)* $x = \pi/2$; *iv)* $z = 0$.

Problema 1.38
i) $D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2}\sec^2\frac{y}{x} - 1 & \frac{1}{x}\sec^2\frac{y}{x} + 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{1}{y+1} \end{pmatrix}$; $D\mathbf{g}(t,s) = \begin{pmatrix} \cos s & -t\,\mathrm{sen}\, s \\ e^t & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
$Dh(u,v,w) = \begin{pmatrix} v^2e^w, & 2uve^w, & uv^2e^w \end{pmatrix}$; *ii)* $DF(1,0) = Dh(-1, \mathrm{e}^{-1}, 2)D\mathbf{g}(-1,0)D\mathbf{f}(1,0) = (0,1)$; *iii)* $z = -1 + 0(x-1) + 1(y-0)$, es decir, $y - z = 1$; *iv)* $D_\alpha F(1,0,-1) = (0,1)(3,-4)\dfrac{1}{5} = -4/5$.

Problema 1.39
i) $\nabla T(0,0) = (1,1)$; *ii)* $-\nabla T(0,0) = (-1,-1)$.

Problema 1.40
i) $\nabla\rho(x,y,z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(-2x, -2y, -2z)$, es decir, en la dirección del vector director del punto hacia el origen; *ii)* esferas.

Problema 1.41
i) $\nabla h(1,0) = (-4,0)$, es decir, hacia el oeste; *ii)* $-\nabla T(1,1,1) = (e^{-1}, 2e^{-2}, 3e^{-3})$.

Problema 1.42
i) $D(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(1,1) = D(\mathbf{G}(2,1))D\mathbf{F}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

ii) a) $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$, b) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{dw}{dx}$,

c) $\dfrac{\partial h}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}$; *iii)* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(x+y) + f'(x-y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(x+y) - f'(x-y)$; *iv)* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \Big(\dfrac{\arctan(x/y)}{x+y} + \dfrac{y\log(x+y)}{x^2+y^2}\Big)e^{\log(x+y)\arctan(y/x)}$;
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \Big(\dfrac{\arctan(x/y)}{x+y} - \dfrac{x\log(x+y)}{x^2+y^2}\Big)e^{\log(x+y)\arctan(y/x)}$; *v)* $h'(0) = \nabla f(1,1,0)\mathbf{s}'(0) = 1/2$.

Problema 1.43
$$r\cos\theta\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\Big) - r\,\mathrm{sen}\,\theta\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(-\,\mathrm{sen}\,\theta)}{r}\Big) = \frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

Problema 1.44
Utilizando la regla de la cadena: $h'(t) = \frac{d}{dt}(V\circ\mathbf{c})(t) = \nabla V(\mathbf{c}(t))\cdot\mathbf{c}'(t) = (2e^{-t^2}, 2e^{t^2}, 0)\cdot(2te^{t^2}, -2te^{-t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ $= 4t - 4t = 0$. Derivando directamente, como la función es $h(t) = (V\circ\mathbf{c})(t) = 1$, se obtiene el mismo resultado.