uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez,
con Paulo Enrique Fernández Moncada, Arturo de Pablo y Elena Romera

2 Estudio local de funciones de varias variables.

2.1 Derivadas de orden superior.

Problema 2.1

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$, para $(x,y)\neq(0,0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$; *ii)* no existe el límite pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,\lambda x)$ depende de λ; *iii)* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$; por el apartado anterior f no es C^2 en ningún entorno del origen.

Problema 2.2

i) $\begin{pmatrix} \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2} & -\frac{6xy^2}{(x^2+y^3)^2} \\ -\frac{6xy^2}{(x^2+y^3)^2} & \frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2} \end{pmatrix}$; *ii)* $\begin{pmatrix} 2\cos y - y^2 \operatorname{sen} x & -2x\operatorname{sen} y + 2y\cos x \\ -2x\operatorname{sen} y + 2y\cos x & -x^2\cos y + 2\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(1+y\log x) \\ x^{y-1}(1+y\log x) & x^y \log^2 x \end{pmatrix}$; *iv)* $\begin{pmatrix} \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \\ \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \end{pmatrix}$;

v) $\begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$; *vi)* $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

vii) $\begin{pmatrix} 2y+2z & 2x+2y+2z & 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z & 2x+2z & 2x+2y+2z \\ 2x+2y+2z & 2x+2y+2z & 2x+2y \end{pmatrix}$.

Problema 2.3

i) $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$; *ii)* $\Delta u = \dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

Problema 2.4

i) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r)\dfrac{x^2}{r^2} + f'(r)\dfrac{1}{r} - f'(r)\dfrac{x^2}{r^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\dfrac{y^2}{r^2} + f'(r)\dfrac{1}{r} - f'(r)\dfrac{y^2}{r^3}$;
$\Delta u = f''(r)\left(\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2}\right) + f'(r)\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{x^2}{r^3} - \dfrac{y^2}{r^3}\right) = f''(r) + \dfrac{1}{r}f'(r)$;
ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{x}{r} - \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{y}{r^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{y}{r} + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{x}{r^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{r^2-x^2}{r^3} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\dfrac{2xy}{r^3} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\dfrac{y^2}{r^4} + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{2xy}{r^4}$,
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{r^2-y^2}{r^3} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\dfrac{2xy}{r^3} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\dfrac{x^2}{r^4} - \dfrac{\partial f}{\partial \theta}\dfrac{2xy}{r^4}$, basta ahora sumar;
iii) las funciones son $f_1(r,\theta) = \theta$ y $f_2(r,\theta) = \log r^2$, basta ahora derivar.

Problema 2.5

i) basta derivar, $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \dfrac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \cdots, \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \dfrac{2(x^2-y^2-z^2-w^2)}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3}, \cdots$; será más fácil usando el siguiente apartado, pues ambas son funciones radiales, $f_1(r) = r^{-1}$, $f_2(r) = r^{-2}$; *ii*) $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = f'(r)\dfrac{x_j}{r}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f''(r)\dfrac{x_j^2}{r^2} + f'(r)\dfrac{1}{r} - f'(r)\dfrac{x_j^2}{r^3}$, $\Delta u = f''(r)\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\dfrac{x_j^2}{r^2} + f'(r)\sum_{j=1}^{n}\dfrac{r^2 - x_j^2}{r^3} = f''(r) + \dfrac{n-1}{r}f'(r)$; también se puede utilizar la definición $\Delta u = \mathrm{div}\nabla u$ y los problemas 1.31 y 1.32; *iii*) $\Delta u = k(k+n-2)r^{k-2} = 0$ cuando $k = 2-n$ si $n \neq 2$ (comprobar el apartado *i*)).

Problema 2.6

i) Se debe verificar la relación $\omega^2 = c^2k^2$; *ii*) Se debe verificar a relación $\omega^2 = c^2k^2 + h^2$.

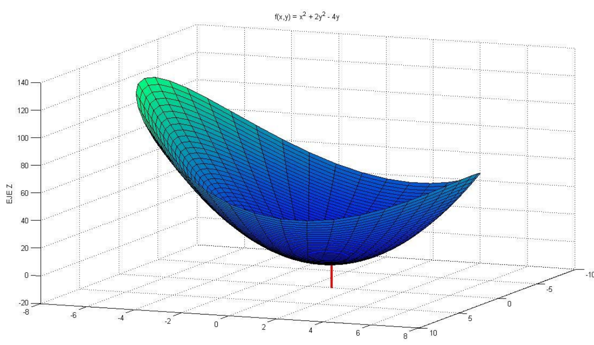
Problema 2.7

Se debe verificar la relación $\lambda = \mu k^2$.

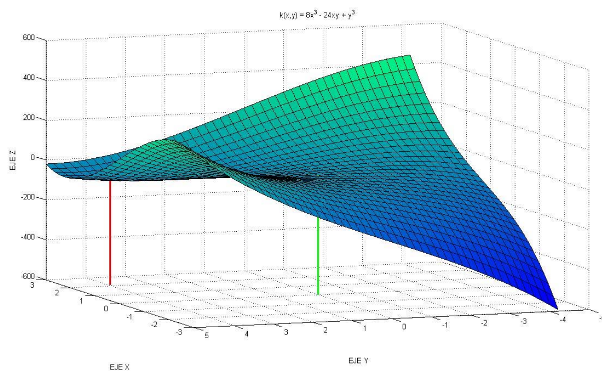
2.2 Extremos de funciones de varias variables.

Problema 2.8

i) $\nabla f = (2x, 4y-4) = 0$ si $x = 0$, $y = 1$; $Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, por tanto f alcanza en $(0,1)$ un mínimo local de valor $f(0,1) = -2$;



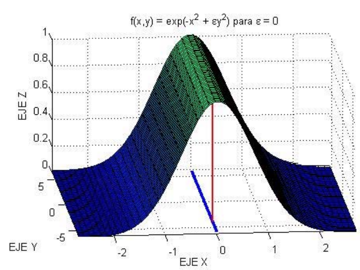
ii) g alcanza en $(-2,-2)$ un mínimo local de valor $g(-2,-2) = -10$; *iii*) h alcanza en $(-3/4, 5/4)$ un mínimo local de valor $h(-3/4, 5/4) = 21/8$; *iv*) k tiene en $(0,0)$ un punto de silla y en $(2,4)$ un mínimo local de valor $k(2,4) = -64$.

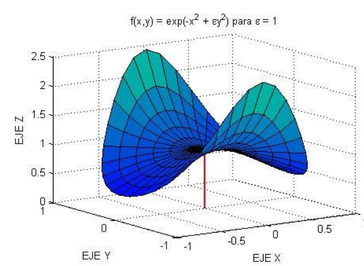


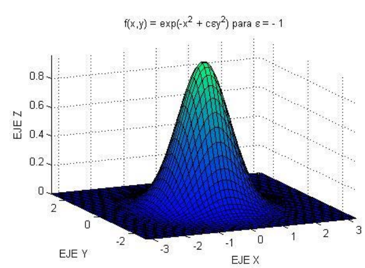
v) $\nabla m = (3x^2{+}6x, 3y^2{-}36y{+}81) = 0$ si $x = 0$ ó $x = -2$, $y = 3$ ó $y = 9$, cuatro puntos críticos; $Hm(0,3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$, $Hm(0,9) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$, $Hm(-2,3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$, $Hm(-2,9) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$; por tanto m tiene un máximo en $(-2,3)$ de valor $m(-2,3) = 107$, un mínimo en $(0,9)$ de valor $m(0,9) = 5$, además de dos puntos de silla en $(0,3)$ y $(-2,9)$

Problema 2.9

$\nabla f = \mathrm{e}^{-x^2+\varepsilon y^2}(-2x, 2\varepsilon y)$; si $\varepsilon = 0$ se anula en los puntos de la forma $(0, y_0)$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, mientras que si $\varepsilon \neq 0$ solo se anula en el origen; si $\varepsilon = 0$ se tiene $Hf(0,y_0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, f alcanza el máximo absoluto en esos puntos, de valor $f(0,y_0) = 1$. Si $\varepsilon = 1$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y $(0,0)$ es un punto de silla. Si $\varepsilon = -1$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, y $(0,0)$ es un máximo absoluto de valor 1.

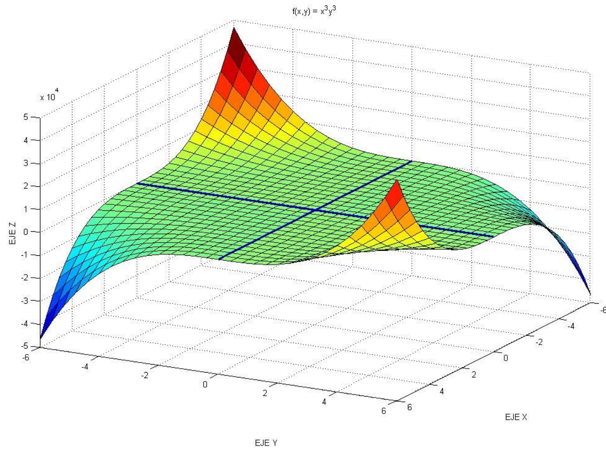




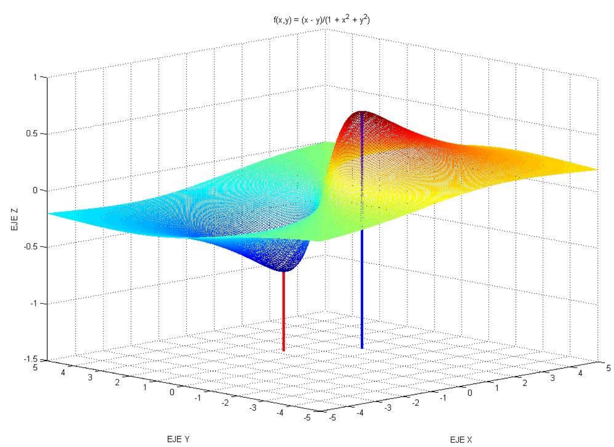


Problema 2.10

i) $\nabla f = (3x^2y^3, 3x^3y^2) = 0$ si $xy = 0$; los puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$ son puntos de silla pues f se anula en ellos y es positiva en el primer y tercer cuadrante y negativa en el segundo y cuarto cuadrante (f no tiene máximos ni mínimos);

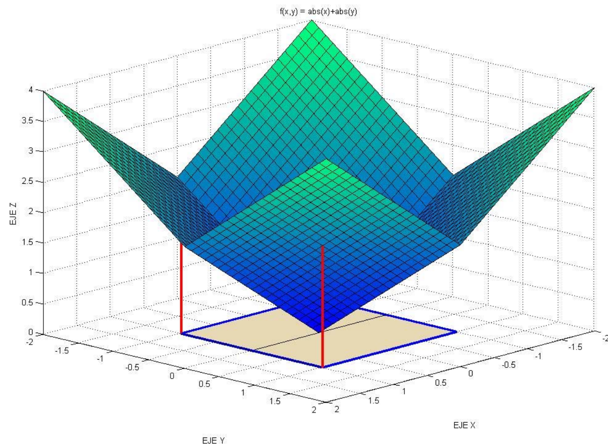


$ii)$ f alcanza en los puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$ el mínimo absoluto (f no tiene máximos) de valor 0; $iii)$ f alcanza en $(0,3)$ un mínimo local de valor $f(0,3)=-9$; $iv)$ $\nabla f = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(y^2 - x^2+2xy+1, y^2-x^2-2xy-1) = 0$ si $x = 1/\sqrt{2} = -y$, ó $x = -1/\sqrt{2} = -y$; $Hf(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $Hf(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; por tanto f alcanza en $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ un máximo local de valor $1/\sqrt{2}$, y en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ un mínimo local de valor $-1/\sqrt{2}$.

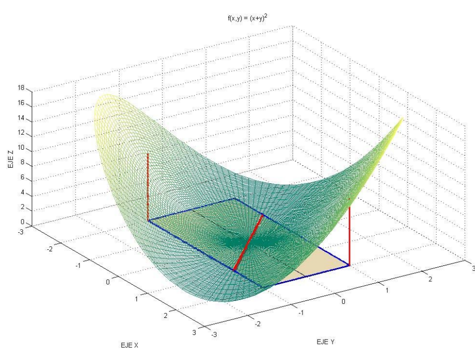


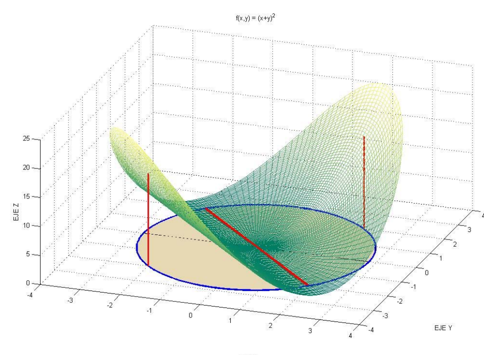
Problema 2.11

$i)$ f tiene en $(0,0)$ un mínimo absoluto de valor 0 y en $(\pm 1, \pm 1)$ tiene máximos absolutos de valor 2;



ii) y *iii)* $f(x,y)=(x+y)^2$, $\nabla f=(2(x+y),2(x+y))=0$ si $x+y=0$; como $f(x_0,-x_0)=0$, pero $f(x,y)\geq 0$, los puntos de la forma $(x_0,-x_0)$ son mínimos absolutos tanto en B como en C y en ellos f toma el valor 0; además hay que estudiar la frontera en cada caso, B consta de cuatro segmentos y C de dos curvas: $\partial B=\{x=2,\ -1\leq y\leq 1\}\cup\{-2\leq x\leq 2,\ y=1\}\cup\{x=-2,\ -1\leq y\leq 1\}\cup\{-2\leq x\leq 2,\ y=-1\}=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$, mientras que $\partial C=\{y=\pm\sqrt{8-x^2},\ -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}\}=\sigma_1\cup\sigma_2$. Por ejemplo en γ_1 tenemos la función $g_1(y)=(2+y)^2$, con máximo en $y=1$, mínimo en $y=-1$. Finalmente $(2,1)$ y $(-2,-1)$ son los máximos absolutos en B y en ellos f toma el valor 9. En σ_1, tenemos la función $h(x)=(x+\sqrt{8-x^2})^2$, con máximo en $(2,2)$ y mínimo en $(2,-2)$, $(-2,2)$. Finalmente $(2,2)$ y $(-2,-2)$ son los máximos absolutos en C y en ellos f toma el valor 16.





Problema 2.12

i) $\nabla f(0,0)=0$, $Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$, por lo que $(0,0)$ es un punto de silla; *ii)* $\nabla f(0,0)=0$, $Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, por lo que no funciona el método. Sin embargo, $f(x,x/\pi)=x^2/\pi>0$, mientras que $f(x,-x/\pi)=-x^2/\pi<0$; por tanto $(0,0)$ es un punto de silla.

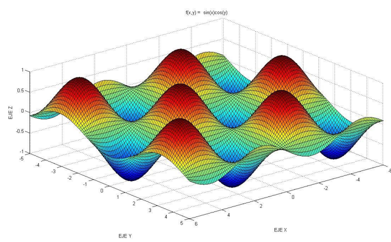
Problema 2.13

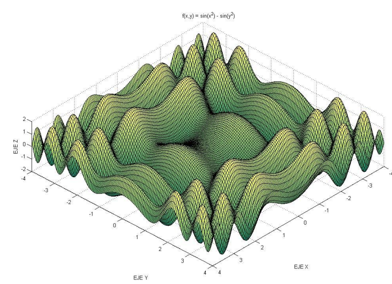
$\nabla f(m,b)=(-2\sum_{i=1}^{N}(y_i-mx_i-b)x_i,\ -2\sum_{i=1}^{N}(y_i-mx_i-b))$; igualando a cero, llamando $A=\sum x_i$, $B=\sum y_i$, $C=\sum x_iy_i$, $D=\sum x_i^2$, tenemos el sistema $\left\{\begin{array}{l}Dm+Ab=C\\Am+Nb=B\end{array}\right.$ en las variables m y b. Se obtiene

$$m = \frac{AB - NC}{A^2 - ND} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i - N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - N \sum_{i=1}^{N} x_i^2}, \quad b = \frac{B - Am}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i m.$$

Problema 2.14

i) máximos/mínimos en $\mathbf{x}(k_1, k_2) = (\frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_2\pi)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, si $k_1 + k_2$ es par/impar. Puntos de silla en $\mathbf{y}(k_1, k_2) = (k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.
ii) punto de silla en $(0, 0)$; Mínimos/punto de silla en $\mathbf{x}(k) = (0, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$, si k es par/impar; Máximo/punto de silla $\mathbf{x}(k) = (\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, si k es par/impar. Puntos de silla en $\mathbf{x}(k_1, k_2) = (\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_1\pi}, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_2\pi})$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, si $k_1 + k_2$ es par y mínimo/máximo en $\mathbf{x}(k_1, k_2) = (\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_1\pi}, \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k_2\pi})$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ si (k_1 es impar,k_2 es par)/(k_1 es par,k_2 es impar).

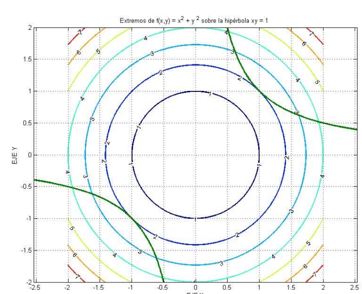


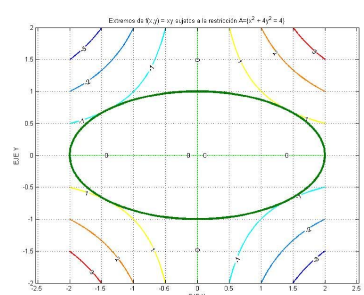


2.3 Extremos condicionados.

Problema 2.15

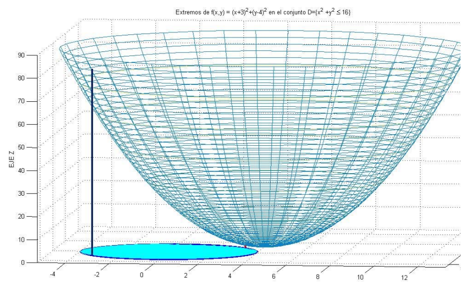
i) Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{c} 2x + \lambda y = 0 \\ 2y + \lambda x = 0 \\ xy = 1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x = y = \pm 1$, que da los dos mínimos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$; ii) resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{c} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x = \pm 2y = \pm\sqrt{2}$, que da máximos $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,)$ y $(-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\,)$; mínimos $(\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\,)$ y $(-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,)$.

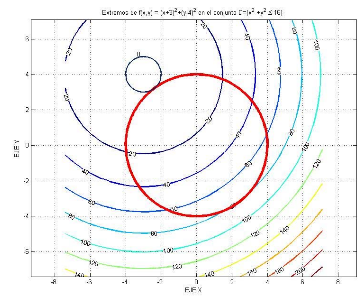




Problema 2.16

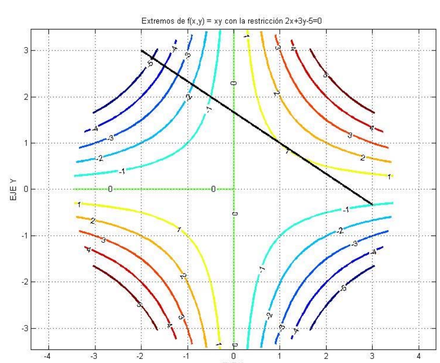
Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2x+6+2\lambda x=0 \\ 2y-8+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2=16 \end{array}\right\}$, se obtiene $x=-3y/4=\pm 12/5$, que da mínimo $(-12/5, 16/5)$; máximo $(12/5, -16/5)$.





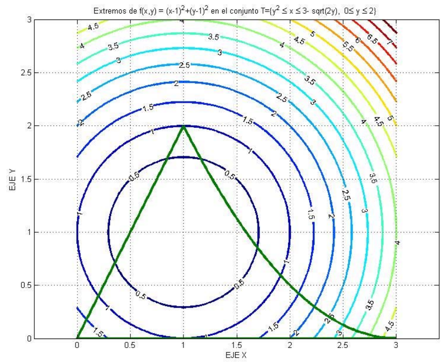
Problema 2.17

i) Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} y+2\lambda=0 \\ x+3\lambda y=0 \\ 2x+3y-5 \end{array}\right\}$, se obtiene $x=5/4$, $y=5/6$, que da el máximo $(5/4, 5/6)$, no hay mínimo; *ii*) resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} yz+2\lambda x/a^2=0 \\ xz+2\lambda y/b^2=0 \\ xy+2\lambda z/c^2=0 \\ x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x^2=a^2/3$, $y^2=b^2/3$, $z^2=c^2/3$, que da máximos $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,-|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,|b|,-|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,-|b|,-|c|)$; mínimos $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,-|b|,|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|a|,|b|,-|c|)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-|a|,-|b|,-|c|)$; *iii*) resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2xy^4z^6+\lambda=0 \\ 4x^2y^3z^6+\lambda=0 \\ 6x^2y^4z^5+\lambda=0 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x=1/6$, $y=1/3$, $z=1/2$, que da el máximo $(1/6, 1/3, 1/2)$, no hay mínimo.



Problema 2.18

i) para hallar los puntos críticos en el interior calculamos $\nabla f = (2x-2, 2y-2) = 0$ si $x = y = 1$; para estudiar la frontera con el método de multiplicadores, al tener tres partes se obtendrían puntos críticos innecesarios: es más fácil observando las curvas de nivel; máximo $(3, 0)$ y mínimo $(1, 1)$;



ii) resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} 1+4\lambda x = 0 \\ 1+6\lambda y = 0 \\ 1+12\lambda z = 0 \\ 2x^2+3y^2+6z^2 = 1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x = \pm 1/2$, $y = \pm 1/3$, $z = \pm 1/6$, que da máximo $(1/2, 1/3, 1/6)$ y mínimo $(-1/2, -1/3, -1/6)$; iii) en coordenadas esféricas es más fácil: estudiar $f(r, z) = r^2 + z^2$ en $U = \{z \geq r^2 - 2\}$; para hallar los puntos críticos en el interior calculamos $\nabla f = (2r, 2z) = 0$ si $r = z = 0$; para estudiar la frontera resolvemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} 2r+2r\lambda = 0 \\ 2z-\lambda = 0 \\ r^2 - z = 2 \end{array}\right\}$, y se obtiene $r = 0$, $z = -2$, y $r = \sqrt{3/2}$, $z = -1/2$; finalmente se deduce que no existe máximo y el mínimo es $(0, 0, 0)$.

Problema 2.19

Máximo $M = \sqrt{3}/9$ en los puntos $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1)$.

Problema 2.20

Mínimo $m = -\sqrt{21}$ en el punto $\frac{-1}{\sqrt{21}}(1, 2, 4)$.

Problema 2.21

Resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} 1+2\lambda x+\mu = 0 \\ 2+2\lambda y = 0 \\ 3+\mu = 0 \\ x^2+y^2 = 2 \\ x+z = 1 \end{array}\right\}$, se obtiene $x = \pm 1 = -y = 1 - z$, que da máximo $M = f(-1, 1, 2) = 7$, mínimo $m = f(1, -1, 0) = -1$.

Problema 2.22

i) la distancia se obtiene restando el radio a la distancia entre el punto y el centro de la esfera, es decir $d = 13 - 5 = 8$;
ii) minimizamos la función (distancia al cuadrado) $f(x, y, z) = (x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-10)^2$ en la esfera; , se obtienen los puntos $P_1 = (28/13, 20/13, 34/13)$ y $P_2 = (-2/13, -20/13, -14/13)$, con $f(P_1) = 64$ y $f(P_2) = 324$, es decir, son los puntos más cercano y más lejano del punto dado, a distancia 8 y 18 respectivamente.

Problema 2.23

Minimizar $S(a,b,c,d) = a+b+c+d$ con la restricción $g(a,b,c,d) = abcd - A = 0$; se obtiene $a = b = c = d = A^{1/4}$.

Problema 2.24

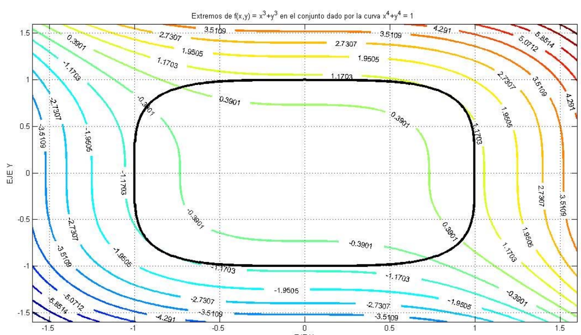
Tenemos que resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + \lambda p = 0 \\ (1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} + \lambda q = 0 \\ pK + qL = B \end{array} \right\}$; pero como solo se pide la relación K/L, basta dividir las dos primeras ecuaciones, se obtiene $\dfrac{K}{L} = \dfrac{\alpha q}{(1-\alpha)p}$.

Problema 2.25

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2\lambda Q_1 = 0 \\ 8 + 4\lambda Q_2 = 0 \\ 24 + 8\lambda Q_3 = 0 \\ Q_1^2 + 2Q_2^2 + 4Q_3^2 = P \end{array} \right\}$, se obtiene $Q_1 = 10^4$, $Q_2 = 2Q_1$, $Q_3 = 3Q_1$.

Problema 2.26

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 4\lambda x^3 = 0 \\ 3y^3 + 4\lambda y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{array} \right\}$, se obtiene $x = 0$, $y = \pm 1$, ó $x = \pm 1$, $y = 0$, ó $x = y = \pm 2^{-1/4}$, que da máximo $M = 2^{1/4}$ en $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ y mínimo $m = -2^{1/4}$ en $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$.



Problema 2.27

Resolviendo el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2x + \lambda(2x + 8y) = 0 \\ 2y + \lambda(8x + 14y) = 0 \\ x^2 + 8xy + 7y^2 = 225 \end{array} \right\}$, se obtiene $x = \pm\sqrt{5} = y/2$, ó $x = \pm 6 = 2y$, que da la distancia mínima $d = 5$ y se alcanza en los puntos $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.