uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

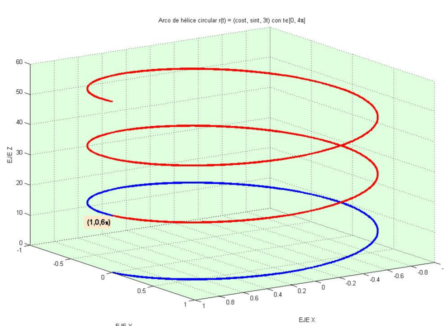
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez,
con Paulo Enrique Fernández Moncada, Arturo de Pablo y Elena Romera

4 Integrales de línea y de superficie

4.1 Integrales sobre curvas y campos conservativos.

Problema 4.1

i) $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, \pi/2]$, $I = \int_0^{\pi/2} 2R^4 \cos t\,\mathrm{sen}^2 t\, dt = \frac{2}{3}R^4$; *ii)* $I = \sqrt{10}\int_0^{2\pi}(1+9t^2)^2\, dt = \frac{2\sqrt{10}\pi}{5}(5 + 120\pi^2 + 1296\pi^4)$.



Problema 4.2

$\gamma(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 2]$, $L = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\, dx = \sqrt{17} + \frac{1}{4}(\log(4+\sqrt{17}))$; $M = \int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{17^{3/2}-1}{12}$.

Problema 4.3

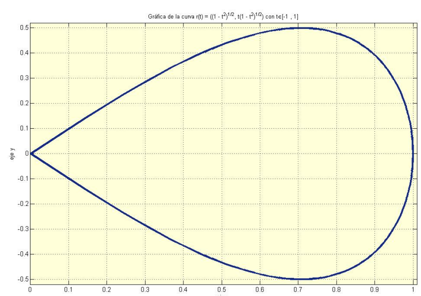
i) $\gamma(x) = (x, x^2)$, $-1 \le x \le 1$, $I = \int_{-1}^1 (x^2-2x^3, x^4-2x^3)\cdot(1, 2x)\, dx = -\frac{14}{15}$; *ii)* $\gamma(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$, $I = \int_0^1 (2x^2, 0)\cdot(1,1)\, dx + \int_1^2 (x^2 + (2-x)^2, x^2 - (2-x)^2)\cdot(1,-1)\, dx = \frac{4}{3}$; *iii)* $I = \int_0^1 (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2)\cdot(1, 2t, 3t^2)\, dt = \frac{1}{35}$; *iv)* $\gamma(t) = (1,0,2) + t(2,4,-1)$, $0 \le t \le 1$, $I = \int_0^1 (8t(1+2t), (1+2t)^2 + 2 - t, 4t)\cdot(2,4,-1)\, dt = 40$.

Problema 4.4

i) $\gamma_1(t) = (-t, 0),\ -1 \le t \le 1,\ I = \int_{-1}^{1} (t^2, 0) \cdot (-1, 0)\, dt = -\frac{2}{3}$; *ii)* $\gamma_2(t) = \begin{cases} (1, t), & 0 \le t \le 1 \\ (2-t, 1), & 1 \le t \le 3 \\ (-1, 4-t), & 3 \le t \le 4 \end{cases}$, $I = \int_0^1 (1, t)\cdot(0, 1)\, dt + \int_1^3 ((2-t)^2, 1)\cdot(-1, 0)\, dt + \int_3^4 (1, 4-t)\cdot(0, -1)\, dt = -\frac{2}{3}$; $\gamma_3(t) = \begin{cases} (1, -t), & 0 \le t \le 1 \\ (2-t, -1), & 1 \le t \le 3 \\ (-1, t-4), & 3 \le t \le 4 \end{cases}$, $I = \int_0^1 (1, -t) \cdot (0, -1)\, dt + \int_1^3 ((2-t)^2, -1) \cdot (-1, 0)\, dt + \int_3^4 (1, t-4) \cdot (0, 1)\, dt = -\frac{2}{3}$; *iii)* $\gamma_4(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le \pi,\ \ I = \int_0^{\pi} (\cos^2 t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = -\frac{2}{3}$.

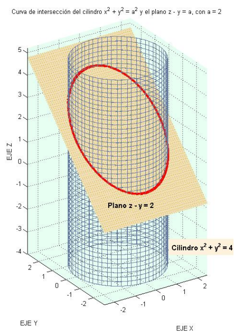
Problema 4.5

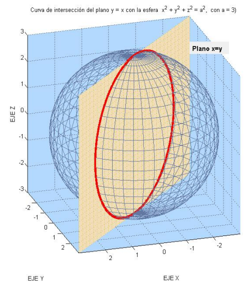
i) $g(t) = (1-t, 2t),\ t \in [0, 1],\ I = \int_0^1 (1-3t, 1+t)\cdot(-1, 2)\, dt = \frac{7}{2}$; *ii)* $C(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ t \in [0, 2\pi],\ I = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^3 t, \cos^3 t)\cdot(-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^4 t + \cos^4 t)\, dt = \frac{3\pi}{2}$; *iii)* $\gamma(t) = \begin{cases} (1-t, t), & 0 \le t \le 1 \\ (1-t, 2-t), & 1 \le t \le 2 \\ (t-3, 2-t), & 2 \le t \le 3 \\ (t-3, t-4), & 3 \le t \le 4 \end{cases}$, $I = \int_0^1 (1, 1) \cdot (-1, 1)\, dt + \int_1^2 (1, 1) \cdot (-1, -1)\, dt + \int_2^3 (1, 1) \cdot (1, -1)\, dt + \int_3^4 (1, 1) \cdot (1, 1)\, dt = 0$; *iv)* $\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \le t \le 2\pi,\ \ I = \int_0^{2\pi} (6\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t - 5\operatorname{sen} t \cos t)\, dt = 2\pi$; *v)* $\int_{-1}^{1} \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

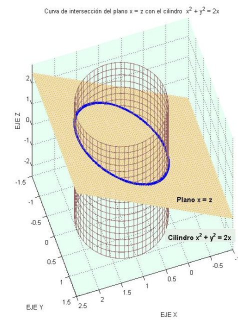


Problema 4.6

i) Usamos coordenadas polares en (x, y), además de $z = a + y$, así $\gamma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, a + a\operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\ I = a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + \operatorname{sen} t \cos t - 1)\, dt = -2\pi a^2$; *ii)* la intersección es $2x^2 + z^2 = a^2$, usamos coordenadas elípticas en (x, z), además de $y = x$, así $\gamma(t) = (\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, a\operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $I = \frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (-2\operatorname{sen}^2 t \cos t - 2\operatorname{sen}^3 t + (2\sqrt{2} - 1)\operatorname{sen} t \cos^2 t)\, dt = 0$; también se podría haber utilizado coordenadas esféricas fijando el ángulo vertical $\varphi = \pi/4$; *iii)* la curva es $(x-1)^2 + y^2 = 1$, por lo que usamos coordenadas polares trasladadas en (x, y), además de $z = x$; así $\gamma(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 1 + \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\ I = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 2\operatorname{sen} t + 2\cos t)\, dt = 0$.







Problema 4.7

$T = \int_0^1 m(2, -\operatorname{sen} t, -\cos t) \cdot (2t, \cos t, -\operatorname{sen} t)\, dt = m \int_0^1 4t\, dt = 2m.$

Problema 4.8

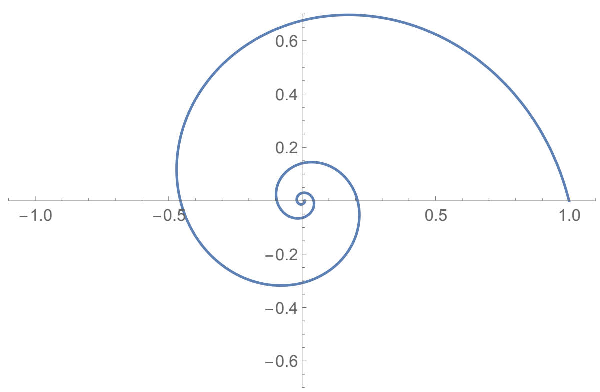
La parametrización $\gamma(t) = (\cos t, b \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi]$ recorre la curva en sentido inverso; $T(b) = -\int_0^\pi (3b^2 \operatorname{sen}^2 t + 2, 16 \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, b \cos t)\, dt = 4b^2 - 8\pi b + 4$; derivando e igualando a cero obtenemos que el trabajo mínimo es $4(1 - \pi^2)$, que se alcanza para $b = \pi$.

Problema 4.9

$T(a, b, c) = \int_0^1 (act^{b+1}, a^2 t^{2b+6}) \cdot (1, abt^{b-1})\, dt = \dfrac{a^3 b + 3ac}{3b + 6} = \dfrac{a^3}{3} \dfrac{b + 3c/a^2}{b + 2}$; no dependerá de b si $a = \sqrt{3c/2}$. También se puede deducir observando que la derivada de T respecto de b se anula para $2a^2 - 3c = 0$.

Problema 4.10

$\gamma(\theta) = (\mathrm{e}^{-\theta} \cos \theta, \mathrm{e}^{-\theta} \operatorname{sen} \theta),\ 0 \le \theta < \infty;\ T = 8 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta\, d\theta = \dfrac{8}{5}.$



Problema 4.11

$i)$ rot $\mathbf{F} = 0$ y $\mathbf{F}$ es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^3$ (que es un conjunto simplemente conexo); $ii)$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \operatorname{sen} y + z \Rightarrow \phi = x \operatorname{sen} y + xz + g(y, z)$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = x \cos y + \mathrm{e}^z \Rightarrow g = y\mathrm{e}^z + h(z)$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x + y\mathrm{e}^z \Rightarrow h =$ cte, finalmente $\phi(x, y, z) = x(\operatorname{sen} y + z) + y\mathrm{e}^z +$ cte.

Problema 4.12

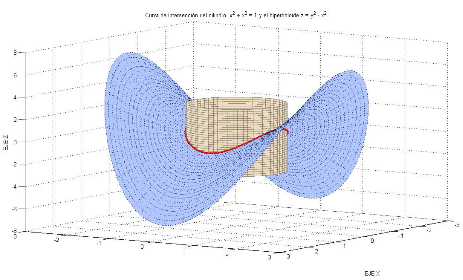
El potencial de $\mathbf{F}$ es $\phi = z\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\int_\gamma \mathbf{F} = \phi(\mathbf{r}(1)) - \phi(\mathbf{r}(0) = \mathrm{e}^2.$

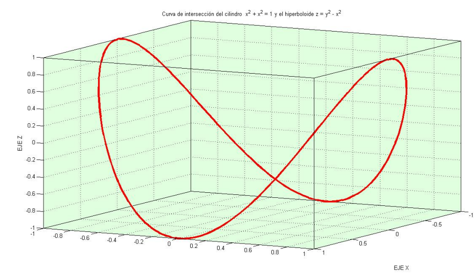
Problema 4.13

i) El campo es conservativo (irrotacional) y la cuerva es cerrada, por lo que la integral es 0; *ii)* $f(x,y,z) = xy + xz + yz - \frac{1}{5}\cos x^5 + y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) + \frac{z}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2z$.

Problema 4.14

i) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\int_\Gamma \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^4 t + \cos t\, \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t} + 4\operatorname{sen}^3 t \cos t - 4 \operatorname{sen} t \cos^3 t)\, dt = -\frac{3\pi}{4}$; *ii)* no, el campo no es conservativo pues la curva es cerrada y la integral no es cero (o calculando el rotacional).





Problema 4.15

$\operatorname{rot} \mathbf{w} = 0 \iff \mathrm{e}^{2x+3y}(b\cos y + 2b \operatorname{sen} x + 2b\cos y - 2\operatorname{sen} y + a \operatorname{sen} y - 3a \operatorname{sen} x - 3a\cos y - 3\cos x) = 0$, es decir, $a = 2,\ b = 3$; el potencial es $\varphi(x,y) = \mathrm{e}^{2x+3y}(\operatorname{sen} x + \cos y) + C$.

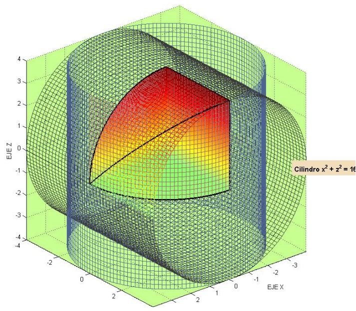
Problema 4.16

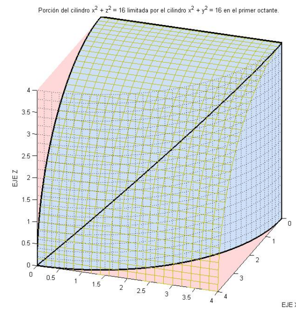
i) $\mathbf{F} = \nabla f$, con $f(x,y) = \frac{1}{2}\log^2(xy)$, que es constante en la hipérbola, por tanto $\int_\gamma \mathbf{F} = 0$; directamente, $\int_{x_1}^{x_2} (\frac{a\log a}{x}, \frac{x \log a}{a}) \cdot (1, -\frac{a}{x^2})\, dx = 0$; *ii)* $\int_\gamma \mathbf{F} = f(B) - f(A) = \frac{1}{2}(\log^2 b - \log^2 a) = \frac{1}{2}\log(ab)\, \log(b/a)$; directamente, integrando en horizontal desde una hipérbola a otra y utilizando el apartado anterior, $\int_{x_1}^{\frac{bx_1}{a}} \frac{\log(ax/x_1)}{ax/x_1}(\frac{a}{x_1}, x)\cdot(1,0)\, dx = \int_a^b \frac{\log w}{w}\, dw = \frac{1}{2}(\log^2 b - \log^2 a)\,.$

4.2 Integrales sobre superficies.

Problema 4.17

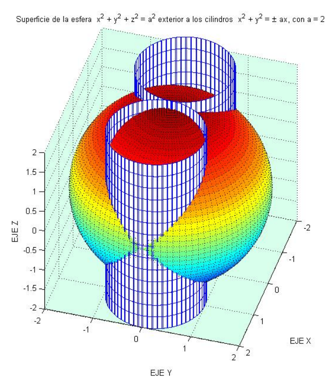
i) $T(\theta,\varphi) = (R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$, $\mathbf{n} = (R^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi, R^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\varphi, R^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$, $\|\mathbf{n}\| = R^2\operatorname{sen}\varphi$, $A = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi R^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi d\theta = 4\pi R^2$; *ii)* $T(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u)$, $0 \le u \le a$, $0 \le v \le 2\pi$, $\mathbf{n} = (-u\cos v, -u\operatorname{sen} v, u)$, $\|\mathbf{n}\| = u\sqrt{2}$, $A = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a u\, dudv = \pi a^2\sqrt{2}$; *iii)* $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2)$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\mathbf{n} = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta, r)$, $\|\mathbf{n}\| = r\sqrt{1+4r^2}$, $A = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\sqrt{1+4r^2}\, drd\theta = \frac{\pi}{6}((1+4a^2)^{3/2} - 1)$; *iv)* $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{16 - r^2\cos^2\theta})$, $0 \le r \le 4$, $0 \le \theta \le \pi/2$, (por simetría consideramos solo un octante: en la figura de la derecha hay que considerar la parte superior, no la lateral, multiplicada por 8), $\mathbf{n} = (\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{16 - r^2\cos^2\theta}}, 0, r)$, $\|\mathbf{n}\| = \frac{4r}{\sqrt{16-r^2\cos^2\theta}}$, $A = 32\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \frac{r}{\sqrt{16-r^2\cos^2\theta}}\, drd\theta = 128\int_0^{\pi/2}\frac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = 128 \left.\frac{\operatorname{sen}\theta - 1}{\cos\theta}\right|_0^{\pi/2} = 128.$

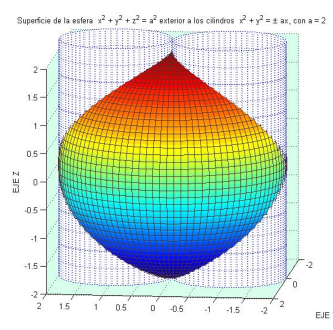




Problema 4.18

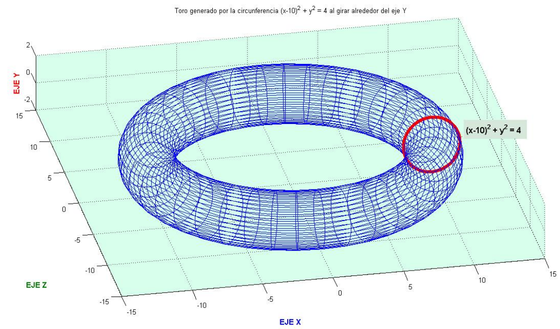
Calculamos el área de la porción de esfera situada dentro de cada cilindro, la cuarta parte superior y con y positiva, luego multiplicamos por 8 y lo restamos al área total de la esfera. $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \sqrt{a^2-r^2})$, $0 \le r \le a\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $\mathbf{n} = (\dfrac{r^2\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}, \dfrac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}, r)$, $\|\mathbf{n}\| = \dfrac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}$, $A_1 = 8\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr d\theta = 8a^2\int_0^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = 4a^2(\pi-2)$; finalmente $A = 4\pi a^2 - A_1 = 8a^2$.





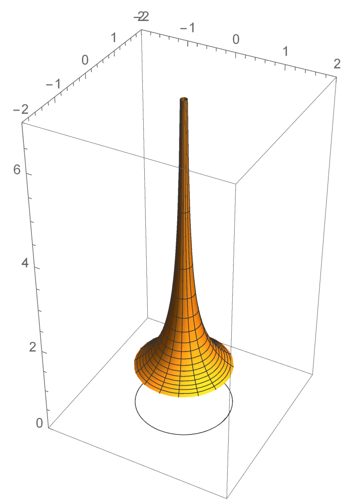
Problema 4.19

i) En coordenadas cilíndricas tomamos $z = f(r)$; basta pues calcular $\|\mathbf{n}\| = r\sqrt{1+(f'(r))^2}$ e integrar en θ; *ii)* $f(x) = \sqrt{c^2-(x-R)^2}$ (la mitad superior), $A = 4\pi\displaystyle\int_{R-c}^{R+c} x\sqrt{1+\frac{(x-R)^2}{c^2-(x-R)^2}}\,dx = 4\pi c\int_{R-c}^{R+c}\frac{x}{\sqrt{c^2-(x-R)^2}}\,dx = 4\pi c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(R+c\operatorname{sen}w)\,dw = 4\pi^2 cR$; *iii)* En coordenadas cilíndricas en (y,z) tomamos $r = f(x)$; así $\mathbf{s}(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta))$, con lo que $\|\mathbf{n}\| = |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}$, $A = 2\pi\displaystyle\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$. Se puede obtener el área del toro anterior girando la curva $x^2+(y-R)^2 = c^2$, y aplicando esta segunda fórmula con las funciones $f(x) = R \pm \sqrt{c^2-x^2}$.



Problema 4.20

$V = 2\pi \int_0^1 (\frac{1}{r} - 1) r\, dr = \pi$; $A = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1 + \frac{1}{r^4}}\, dr \geq 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r}\, dr = \infty$.



Problema 4.21

Tomamos por ejemplo como diámetro el eje vertical; con la parametrización estándar de la esfera (problema 4.17.i), se tiene $\|\mathbf{n}\| = a^2 \operatorname{sen}\varphi$, $d^2 = x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$, así $I_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma a^4 \operatorname{sen}^3 \varphi\, d\varphi d\theta = \frac{8}{3}\pi\sigma a^4$; pero $\sigma = \frac{m}{4\pi a^2}$, por lo que $I_z = \frac{2}{3} m a^2$.

4.3 Teoremas de Green, Stokes y Gauss.

Problema 4.22

$\gamma(t) = \begin{cases} (t,0), & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1), & 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1), & 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t), & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$, $I = \int_0^1 (5, t^2) \cdot (1,0)\, dt + \int_1^2 (5 - (t-1) - (t-1)^2, 1 - 2(t-1)) \cdot (0,1)\, dt + \int_2^3 (5 - (3-t) - 1, (3-t)^2 - 2(3-t)) \cdot (-1, 1)\, dt + \int_3^4 (4,0) \cdot (0,-1)\, dt = \frac{3}{2}$; por el Teorema de Green, $I = \int_0^1 \int_0^1 3x\, dx dy = \frac{3}{2}$.

Problema 4.23

Aplicamos el Teorema de Green, observando que $\operatorname{rot}(P,Q) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{y}{3+\mathrm{e}^{xy}})$; pero en lugar de derivar esta expresión usamos el Teorema Fundamental del Cálculo; así $I = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{3+\mathrm{e}^{xy}})\, dydx = \int_0^1 \frac{1}{3+\mathrm{e}^x}\, dx = \frac{1}{3}(1 - \log(\mathrm{e}+3) + \log 4)$. Directamente, sin aplicar el Teorema de Green, la integral sería $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{t^2}, f(0)) \cdot (1,0)\, dt + \int_0^1 (\mathrm{e} - \frac{t}{3+\mathrm{e}^t}, f(t)) \cdot (0,1)\, dt - \int_0^1 (\mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{3+\mathrm{e}^t}, f(1)) \cdot (1,0)\, dt - \int_0^1 (1 - \frac{t}{4}, f(t)) \cdot (0,1)\, dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\, dt + \int_0^1 f(t)\, dt - \int_0^1 (\mathrm{e}^{t^2} - \frac{1}{3+\mathrm{e}^t})\, dt - \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{3+\mathrm{e}^t}\, dt.$

Problema 4.24

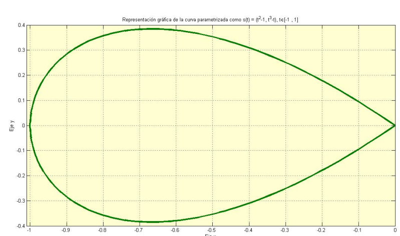
i) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; *ii)* no se puede aplicar directamente el Teorema de Green y el apartado anterior para deducir que la integral es 0, pues las funciones P y Q no son C^1 en D; sin embargo, si $D_\varepsilon = D - B_\varepsilon$, donde $B_\varepsilon = \{x^2+y^2 \le \varepsilon^2\}$, (con ε pequeño para que $B_\varepsilon \subset D$), como ahora P y Q sí son C^1 en D_ε, por el Teorema de Green $\displaystyle\int_{D_\varepsilon} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy = 0$, por lo que $\displaystyle\int_C P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial B_\varepsilon} P\, dx + Q\, dy$, recorridas ambas con la misma orientación; pero esta última es, por ejemplo con orientación positiva, $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varepsilon}, \frac{-\cos\theta}{\varepsilon}) \cdot (-\varepsilon \operatorname{sen}\theta, \varepsilon\cos\theta)\, d\theta = -2\pi$; *iii)* ahora sí se tiene que P y Q son C^1 en D, así que por el Teorema de Green la integral es 0.

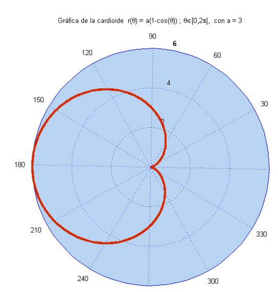
Problema 4.25

Poniendo $x - 1 = z$ se reduce al problema anterior, por lo que la integral es $\pm 2\pi$, dependiendo de la orientación de γ.

Problema 4.26

i) Por el Teorema de Green, tomando el campo $\mathbf{F} = (-y, x)$ se tiene $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 2$, por lo que $\displaystyle\int_C -y\, dx + x\, dy = \int_C \mathbf{F} = 2\int_D dxdy = 2A$; en polares $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\operatorname{sen}\theta$, $A = \displaystyle\frac{1}{2}\int_C [-r(\theta)\operatorname{sen}\theta(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\operatorname{sen}\theta) + r(\theta)\cos\theta(r'(\theta)\operatorname{sen}\theta + r(\theta)\cos\theta)]\, d\theta = \frac{1}{2}\int_C r^2(\theta)\, d\theta$; *ii)* $A = 2\,\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 [(t-t^3)2t + (t^2-1)(3t^2-1)]\, dt = \frac{8}{15}$; *iii)* $A = \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi a^2}{2}$.

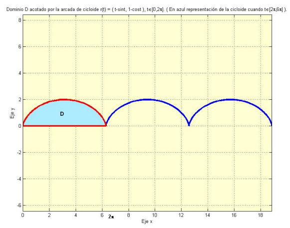


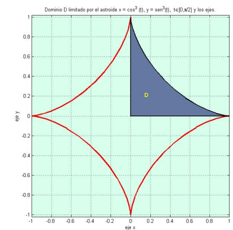


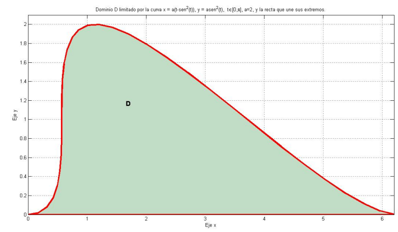
Problema 4.27

i) Tomando $\mathbf{F} = (P,Q)$, por ejemplo con $P = 0$, $Q = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy$, se tiene $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 2y$; así, por el Teorema de Green, como la frontera de D consta de dos curvas (cuidado con la orientación),

$\displaystyle\int_D (x+2y)dxdy = \int_{\partial D} Q\,dy = -\int_0^{2\pi} [\frac{1}{2}(t-\operatorname{sen} t)^2 + 2(t-\operatorname{sen} t)(1-\cos t)] \operatorname{sen} t\,dt + \int_0^{2\pi} 0\,dt = \pi(3\pi+5)$; (otra posibilidad, $P = -y^2$, $Q = \dfrac{1}{2}x^2, \dots$); *ii)* aquí tomamos $Q = \dfrac{1}{2}x^2y^2$, con lo que la integral es $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos^6 t \operatorname{sen}^6 t\, 3\operatorname{sen}^2 \cos t\,dt - \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 0\,dt = \frac{8}{2145}$; *iii)* con $Q = xy^2$ la integral es $\displaystyle -\int_0^{\pi} 2a^4(t-\operatorname{sen}^2 t)\operatorname{sen}^5 t \cos t\,dt + \int_0^{a\pi} 0\,dt = 0$.







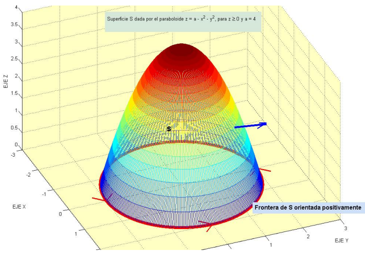
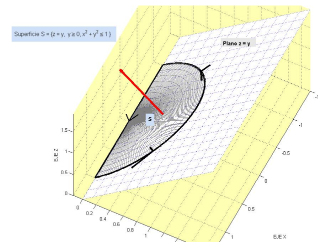
Problema 4.28
i) La frontera de S se parametriza como $\gamma(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, $\displaystyle I = -\int_0^{2\pi} a^5 \operatorname{sen}^3 t \cos^2 t\,dt = 0$; *ii)* la frontera es la misma que en el apartado anterior, $\displaystyle I = -\int_0^{2\pi} a^2 \operatorname{sen}^2 t\,dt = -\pi a^2$; *iii)* aquí la frontera es $\gamma(t) = (\cos t, 0, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$, pero recorrida en sentido contrario, $\displaystyle I = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^4 t - \cos^4 t)\,dt = 0$.

Problema 4.29
La frontera de S es una elipse en el plano $z = 0$, que se parametriza como $\gamma(t) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$, así $\displaystyle I = -\int_0^{2\pi} (-6\operatorname{sen}^2 t + 18\cos^3 t)\,dt = 6\pi$.

Problema 4.30
i) Está contenido en el plano $x = z$, $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$; la frontera se recorre de A a B, de B a C y de C a A; *ii)* $T = \{(x, y, x),\ 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2-x\}$; esta parametrización produce el vector normal $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$, por lo que para calcular la integral de línea con la orientación del apartado anterior tomamos el vector contrario al aplicar el Teorema de Stokes, $\displaystyle I = \int_0^1 \int_x^{2-x} (-3, -1, -2)\cdot(1, 0, -1)\,dydx = -\int_0^1 \int_x^{2-x} dydx = -1$.

Problema 4.31
Como div $\mathbf{F} = 3-2y$, por el Teorema de Gauss, y en coordenadas esféricas, la integral es $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (3-2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\,d\rho d\varphi d\theta = 2\pi$.

Problema 4.32
i) $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^a (0, r^2 - a^2, -r\operatorname{sen}\theta)\cdot(2r^2\cos\theta, 2r^2\operatorname{sen}\theta, r)\,drd\theta = 0$; la frontera es una circunferencia de radio a, $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F} = \int_0^{2\pi} (a^2\operatorname{sen}^2\theta, a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0)\cdot(-a\operatorname{sen}\theta, a\cos\theta, 0)\,d\theta = 0$; *ii)* $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_0^{\pi}\int_0^1 (0, 0, 3r^2)\cdot(0, r, r)\,drd\theta = \frac{3\pi}{4}$; la frontera es una semicircunferencia más un segmento, $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{F} = \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen}^3\theta, \cos^3\theta, \operatorname{sen}^3\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, \cos\theta)\,d\theta + \int_{-1}^1 (0, t^3, 0)\cdot(1, 0, 0)\,dt = \frac{3\pi}{4} + 0$.

Problema 4.33

i) $\displaystyle\int_0^6\int_0^{\frac{12-2x}{3}}(36-6x-9y,-12,3y)\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1)\,dydx=24$; *ii)* $\operatorname{div}\mathbf{F}=5x^2$, por el Teorema de Gauss, y en cilíndricas, la integral es $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^b 5r^3\cos^2\theta\,dzdrd\theta=\frac{5}{4}\pi a^4 b$; *iii)* $\operatorname{div}\mathbf{F}=4z-y$, por el Teorema de Gauss la integral es $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1(4z-y)\,dxdydz=\frac{3}{2}$; *iv)* $\operatorname{div}\mathbf{F}=3$, por el Teorema de Gauss la integral es $\displaystyle\int_\Omega 3=3|\Omega|$, donde $S=\partial\Omega$.

Problema 4.34

El cuadrado es $S=\{(0,y,z),\ 0\le y,\ z\le 1\}$, $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F}=\int_0^1\int_0^1(-2y^2,-3z^2,0)\cdot(1,0,0)dydz=-\frac{2}{3}$; la frontera del cuadrado consta de 4 segmentos, que parametrizados de manera independiente da $\displaystyle\int_{\partial S}\mathbf{F}=$ $\displaystyle\int_0^1(0,0,0)\cdot(0,1,0)\,dt+\int_0^1(0,2t,0)\cdot(0,0,1)\,dt+\int_0^1(0,2(1-t)^2,0)\cdot(0,-1,0)\,dt+\int_0^1(0,0,0)\cdot(0,0,-1)\,dt=$ $0+0-\dfrac{2}{3}+0$.

Problema 4.35

i) S no es cerrada, por lo que añadimos la tapa inferior: si W es la semiesfera unidad con coordenada y positiva, se tiene $\partial W=S\cup S_2$, con $S_2=\{x^2+z^2\le 1,\ y=0\}$; como $\operatorname{div}\mathbf{F}=4$, por el Teorema de Gauss la integral es $\displaystyle\int_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\int_W 4-\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=4|W|-0=\frac{8\pi}{3}$, pues $\displaystyle\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta,r\operatorname{sen}\theta,2r\operatorname{sen}\theta)\cdot(0,r,0)\,drd\theta=0$;
ii) por el Teorema de Stokes, como la frontera de S es la circunferencia unidad en el plano $y=0$, la integral es $\displaystyle-\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta,\operatorname{sen}\theta,2\operatorname{sen}\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,0,\cos\theta)\,d\theta=\pi$ (cuidado con la orientación).

Problema 4.36

Como $\operatorname{div}\mathbf{F}=x+z$, por el Teorema de Gauss el flujo es $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}(x+z)\,dzdydx=\frac{1}{12}$. Sin aplicar ese teorema tendríamos que calcular cuatro integrales de superficie:
$S_1=\{x\in[0,1],\ y\in[0,1-x],\ z=0\}$, $\mathbf{n_1}=(0,0,-1)$, $\displaystyle I_1=\int_0^1\int_0^{1-x}(y^2,0,0)\cdot(0,0,-1)dydx=0$,
$S_2=\{y\in[0,1], z\in[0,1-y], x=0\}$, $\mathbf{n_1}=(-1,0,0)$, $\displaystyle I_2=\int_0^1\int_0^{1-y}(y^2,yz,0)\cdot(-1,0,0)\,dydx=-\frac{1}{12}$,
$S_3=\{x\in[0,1],\ z\in[0,1-x],\ y=0\}$, $\mathbf{n_1}=(0,-1,0)$, $\displaystyle I_3=\int_0^1\int_0^{1-x}(0,0,xz)\cdot(0,-1,0)\,dydx=0$,
$S_4=\{x\in[0,1],\ y\in[0,1-x],\ z=1-x-y\}$, $\mathbf{n_1}=(1,1,1)$, $\displaystyle I_4=\int_0^1\int_0^{1-x}(y^2,y(1-x-y),x(1-x-y))\cdot(1,1,1)\,dydx=\frac{1}{6}$; finalmente $I=-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$.

Problema 4.37

i) $|V| = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2/2}^2 r\, dzdrd\theta = 4\pi$; *ii*) $T_m = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2/2}^2 \alpha r^3\, dzdrd\theta = \frac{4\alpha}{3}$ (α es la constante de proporcionalidad); *iii*) por el Teorema de Gauss la integral del flujo del gradiente es $\int_{\partial V}\nabla T\cdot\mathbf{n} = \int_V \Delta T = \int_V 4\alpha = 4\alpha|V| = 16\pi\alpha$.

Problema 4.38

i) Por el Teorema de Gauss, $I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x+2y+2z)\, dxdydz = 3$; *ii*) $S = \{x\in[0,3], y\in[0,3-x], z = 6-2x-2y\}$, $\mathbf{n} = (2,2,1)$, $I = \int_0^3\int_0^{3-x}(xy, -x^2, x+6-2x-2y)\cdot(2,2,1)dydx = \frac{27}{4}$; *iii*) en coordenadas cilíndricas (también se podría hacer en coordenadas esféricas), $S = \{r\in[0,a], \theta\in[0,2\pi], z = \sqrt{a^2-r^2}\}$, $\mathbf{n} = (\frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}, \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}, r)$, $I = \int_0^a\int_0^{2\pi}(\frac{r^5\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} + r^3\sqrt{a^2-r^2}\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta dr = \frac{2}{5}\pi a^5$. Si queremos aplicar el Teorema de Gauss, como S no es cerrada consideramos la tapa $S_2 = \{x^2+y^2\le a^2,\ z=0\}$, y así $S\cup S_2 = \partial\Omega$; como div $\mathbf{F} = x^2+y^2+z^2$, la integral es

$$\begin{aligned}
I &= \int_S \mathbf{F} = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} - \int_{S_2}\mathbf{F}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho^4\operatorname{sen}\varphi\, d\rho d\varphi d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^a (0, r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta, 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\cdot(0,0,-r)\, drd\theta\\
&= \frac{2}{5}\pi a^5 - 0;
\end{aligned}$$

iv) Por el Teorema de Gauss, como div $\mathbf{F} = 4x$, la integral es cero por simetría en x (o en esféricas, la integral en θ se anula, $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 4\rho^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = 0$).

Problema 4.39

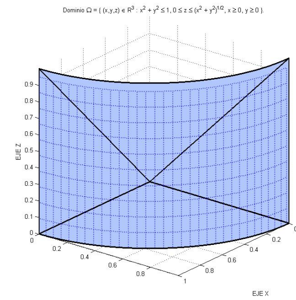
Por el Teorema de Gauss, como div $\mathbf{F} = 2z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$, la integral es cero por simetría en z (o en esféricas, la integral en φ se anula, $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^a 2\rho^3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\,\mathrm{e}^{\rho^2} d\rho d\varphi d\theta = 0$).

Problema 4.40

i) La frontera es la circunferencia unidad en el plano $z=0$, la integral es entonces $\int_0^{2\pi}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = 0$; *ii*) para aplicar el Teorema de la divergencia de Gauss añadimos la tapa inferior S_3, el círculo unidad en el plano $z=0$; como div(rot $\mathbf{F}$) $= 0$, la integral es $\int_S \operatorname{rot}\mathbf{F} = -\int_{S_3}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, r\cos\theta, 0)\cdot(0,0,-r)\, drd\theta = 0$.

Problema 4.41

Como div $\mathbf{F} = \frac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, por el Teorema de Gauss, y en cilíndricas, la integral es $\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^r \frac{\mathrm{e}^{r^2}}{r} r\, dzdrd\theta = \frac{1}{4}\pi(1-\mathrm{e})$.



Problema 4.42

El conjunto Ω son dos porciones cónicas de la bola de radio a (ver figura del Problema 3.28, que representa la mitad del conjunto); como div $\mathbf{F} = x^2 + y^2$, por el Teorema de Gauss, y en coordenadas esféricas utilizando simetría, la integral es

$$2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^a \rho^4 \operatorname{sen}^3\varphi\, d\rho d\varphi d\theta = \frac{1}{15}(8-5\sqrt{2})\pi a^5.$$