uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE CÁLCULO II PARA GRADOS DE INGENIERÍA
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez,
con Paulo Enrique Fernández Moncada, Arturo de Pablo y Elena Romera

5 Transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales

5.1 Transformada de Laplace.

Problema 5.1
i) $\Gamma(1)$ es una integral inmediata, $\Gamma(2)$ puede hacerse integrando por partes y $\Gamma(1/2)$ con el cambio de variable $t = x^2$; *ii)* se obtiene integrando por partes;
iii) $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to 0^+} \Gamma(x+1)/x = +\infty$; *iv)* iterando la fórmula del segundo apartado se obtiene $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n\Gamma(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot \Gamma(2) = n!$; *v)* se obtiene de forma similar al apartado anterior, usando $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Problema 5.2
i) $\mathrm{e}^{-st} f(t)$ es integrable en $[0, N]$ para todo $N > 0$ por ser producto de dos funciones integrables, y además si $s > \alpha$ y $N \ge T$ se tiene

$$\Big|\int_N^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\Big| \le \int_N^\infty \mathrm{e}^{-st}\big|f(t)\big|\,dt \le c\int_N^\infty \mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{c\,\mathrm{e}^{-(s-\alpha)N}}{s-\alpha}\,,$$

que tiende a 0 cuando $N\to\infty$, por lo que existe el $\lim_{N\to\infty}\int_0^N \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt$; *ii)* razonando como antes, si $s > \alpha$ se obtiene

$$\Big|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,dt\Big| \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\big|f(t)\big|\,dt \le c\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{c}{s-\alpha}\,.$$

Problema 5.3
i) es una integral inmediata; *ii)* integrando por partes de forma iterada (derivando siempre la potencia de t) se obtiene

$$\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-st} dt = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\mathrm{e}^{-st}dt = \frac{n(n-1)}{s^2}\int_0^\infty t^{n-2}\mathrm{e}^{-st}dt = \cdots = \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}dt = \frac{n!}{s^n}\,;$$

iii) si $f(t) = t^{-1/2}$, realizando el cambio de variable $x = st$, $dx = s\,dt$, obtenemos

$$L(f)(s) = \int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{x^{-1/2}}{s^{-1/2}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{1/2}}\int_0^\infty x^{1/2-1}\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,;$$

este resultado no contradice el último apartado del ejercicio anterior, ya que f no está acotada por una exponencial puesto que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \infty$; *iv)* si $f(t) = t^b$, con $b > -1$, realizando el cambio de variable $x = st$, $dx = s\,dt$, se obtiene

$$L(f)(s) = \int_0^\infty t^b\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{x^b}{s^b}\,\mathrm{e}^{-x}\,\frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{b+1}}\int_0^\infty x^{b+1-1}\mathrm{e}^{-x}dx = \frac{\Gamma(b+1)}{s^{b+1}}\,.$$

Problema 5.4

i) es consecuencia directa de la linealidad de la integral; *ii*) usando el cambio de variable $x = t - a$, $dx = dt$, se obtiene

$$\begin{aligned} L(f(t-a))(s) &= \int_0^\infty f(t-a)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \int_a^\infty f(t-a)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-s(x+a)} dx \\ &= \mathrm{e}^{-as} \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx} dx = \mathrm{e}^{-as} L(f)(s)\,; \end{aligned}$$

iii) si $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$L(\mathrm{e}^{-at} f(t))(s) = L(f)(s+a) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} f(t)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-(s+a)t} dt = L(f)(s+a)\,;$$

iv) usando el cambio de variable $x = at$, $dx = a\,dt$, obtenemos

$$L(f(at))(s) = \int_0^\infty f(at)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-sx/a} \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-(s/a)x}\, dx = \frac{1}{a}\, L(f(t))\Big(\frac{s}{a}\Big).$$

Problema 5.5

i) $1/(s-a)$, $s > a$; *ii*) $1/(s-a)^2$, $s > a$; *iii*) $\sqrt{\pi/(s-1)}$, $s > 1$; *iv*) $\Gamma(b+1)/(s-a)^{b+1}$, $s > a$; *v*) $a/(s^2+a^2)$, $s > 0$; *vi*) $s/(s^2+a^2)$, $s > 0$; *vii*) $(s+a)/(b^2+(s+a)^2)$, $s > -a$; *viii*) $b/(b^2+(s+a)^2)$, $s > -a$; *ix*) $2/[s(s^2+4)]$, $s > 0$; *x*) $(s^2+2)/[s(s^2+4)]$, $s > 0$.

Problema 5.6

i) integrando por partes con $u = \mathrm{e}^{-st}$, $dv = f'(t)\,dt$, $du = -s\mathrm{e}^{-st}$, $v = f(t)$, se obtiene

$$L(f')(s) = \int_0^\infty f'(t)\, \mathrm{e}^{-st} dt = \Big[f(t)\, \mathrm{e}^{-st}\Big]_{t=0}^{t=\infty} + s \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-st} dt = s\, L(f)(s) - f(0)\,;$$

ii) usando dos veces la fórmula anterior, se deduce

$$L(f'')(s) = L((f')')(s) = s\, L(f')(s) - f'(0) = s^2\, L(f)(s) - s\, f(0) - f'(0)\,;$$

iii) derivando bajo el signo integral, obtenemos

$$\frac{d}{ds}[L(f)(s)] = \int_0^\infty f(t)\, \frac{d}{ds}\big(\mathrm{e}^{-st}\big)\, dt = \int_0^\infty f(t)\, \big(-\, t\, \mathrm{e}^{-st}\big)\, dt = -L(t\, f(t))(s)\,;$$

iv) derivando n veces bajo el signo integral, tenemos

$$\frac{d^n}{ds^n}[L(f)(s)] = \int_0^\infty f(t)\, \frac{d^n}{ds^n}\big(\mathrm{e}^{-st}\big)\, dt = \int_0^\infty f(t)\, (-t)^n \mathrm{e}^{-st}\, dt = (-1)^n L(t^n f(t))(s)\,.$$

Problema 5.7

i) $(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$, $s > 0$; *ii*) $(6as^2-2a^3)/(s^2+a^2)^3$, $s > 0$;
iii) $6/[(s^2+1)(s^2+9)]$, $s > 0$; *iv*) $(s^3+7s)/[(s^2+1)(s^2+9)]$, $s > 0$.

Problema 5.8

i) $\operatorname{senh} x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$; *ii*) $x\, \mathrm{e}^{-x}$; *iii*) $1 - (x+1)\, \mathrm{e}^{-x}$; *iv*) $x^{n-1}/(n-1)!$;
v) $\frac{1}{2}((x-1)\mathrm{e}^x + \cos x)$; *vi*) $4(1-x)\mathrm{e}^{-4x}$; *vii*) $\cos(a(x-\pi/2))$ si $x \geq \pi/2$, 0 si $x < \pi/2$; *viii*) $1/\sqrt{\pi x}$.

5.2 Ecuaciones diferenciales.

Problema 5.9

i) $y(t) = 2\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{2t}$; *ii*) $y(t) = (2\mathrm{e}^{-3t} - 2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t)/13$;
iii) $y(t) = (22\mathrm{e}^{5t} - 5\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t)/34$; *iv*) $y(t) = (t + 1/2)\mathrm{e}^{5t}$;
v) $y(t) = (t + t^2/2)\mathrm{e}^{-t}$; *vi*) $y(t) = (\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t})/3$;
vii) $y(t) = [(2+t)\ \operatorname{sen} 4t]/8$; *viii*) $y(t) = (\mathrm{e}^{-3t} + 3\mathrm{e}^{-t} + 6t\mathrm{e}^{-t})/4$;
ix) $y(t) = (24 + t^4)\mathrm{e}^{3t}/12$; *x*) $y(t) = (1 + 2\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-2t}\cos(\sqrt{2}\,t) - 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t))/6$.

Problema 5.10

i) $y(t) = 4\mathrm{e}^{5t}/75 - 4\mathrm{e}^{-t}/3 + 96/75 - 3t/5$; *ii*) $x(t) = \mathrm{e}^{2t}/10 + \mathrm{e}^{-3t}/15 - 1/6$.

Problema 5.11

$x(t) = \dfrac{k}{\omega_0} \cdot \dfrac{\omega_0 \operatorname{sen} \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$ si $\omega \neq \omega_0$; $x(t) = \dfrac{k}{2\omega_0^2}(\operatorname{sen} \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$ si $\omega = \omega_0$.