uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO II
SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN 1
Elaborados por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

Problema 1.

a) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^3}{2(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

b) Estudiar la existencia de las derivadas parciales en el origen.

c) ¿Dónde es diferenciable?

SOLUCIÓN: a) La función es continua fuera del $(0,0)$ por ser cociente de polinomios y el denominador distinto de cero. Estudiamos si existe el límite en el origen pasando a polares:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta+r^3\operatorname{sen}^3\theta}{2r^2}=\frac{\cos^2\theta}{2}\,.$$

Como este límite depende del ángulo, no existe el

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^3}{2(x^2+y^2)}\,,$$

por lo que f no es continua en el $(0,0)$.
b) Calculamos las derivadas parciales mediante la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{2h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}\quad\nexists,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{2h^2}-0}{h}=\frac{1}{2}.$$

c) Como f es cociente de polinomios con denominador distinto de cero fuera del origen, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. En el origen no es diferenciable porque no es continua.

Problema 2. Sea la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\,, & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0\,, & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en todo su dominio.

b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de f en todo su dominio.

Solución: a) Como $x^4+y^2=0$ si y sólo si $(x,y)=(0,0)$, tenemos que f es continua en $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ por ser cociente de polinomios (que son funciones continuas) y no anularse el denominador en (x_0,y_0). En cuanto al origen de coordenadas, calculando el límite a través de la parábola de ecuación $y=mx^2$ tenemos que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^4}{x^4+m^2x^4}=\frac{m}{1+m^2}$$

depende de m. Por lo tanto, no existe el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, y f no es continua en $(0,0)$. Concluimos, por tanto que f es continua en $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\mapsto 0}0=0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\mapsto 0}0=0\,.$$

c) f es diferenciable en $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ por ser cociente de polinomios (que son funciones diferenciables) y no anularse el denominador en (x_0,y_0). Por otro lado, f no es diferenciable en $(0,0)$ ya que no es continua. Concluimos, por tanto, que f es diferenciable en $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Problema 3.
Calcular el plano tangente a $f(x,y)=x^2+2x-y^2-2y$ en el punto $(1,2)$.

Solución: Se tiene que $\nabla f(1,2)=(2x+2,-2y-2)\big|_{(1,2)}=(4,-6)$. El plano tangente en $(1,2)$ es

$$z=f(1,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)=-5+4(x-1)-6(y-2)\quad\Longrightarrow\quad z=4x-6y+3.$$

Problema 4.
Sean $g(x,y)=x^2y-2y-e^{xy}$ y $h(u,v,w)=\Big(\log(u^2+v^2)+\tan(uv),e^{vw}\Big)$. Calcular

$$D(g\circ h)(1,0,\pi).$$

Solución:

$$\begin{aligned}&D(g\circ h)(1,0,\pi)=D(g)(h(1,0,\pi))\cdot D(h)(1,0,\pi)\\ &=\big(2xy-ye^{xy},x^2-2-xe^{xy}\big)\big|_{(0,1)}\cdot\left(\begin{array}{ccc}\dfrac{2u}{u^2+v^2}+v\sec^2(uv) & \dfrac{2v}{u^2+v^2}+u\sec^2(uv) & 0\\ 0 & we^{vw} & ve^{vw}\end{array}\right)\Bigg|_{(1,0,\pi)}\\ &=(-1,-2)\cdot\left(\begin{array}{ccc}2&1&0\\0&\pi&0\end{array}\right)=(-2,-1-2\pi,0).\end{aligned}$$

Problema 5.
Calcular los puntos en que se anulan a la vez tanto $f(x,y)$ como su derivada direccional a lo largo de la dirección $(1,-1)$, siendo

$$f(x,y)=x^2-xy+2y.$$

Solución: f es diferenciable porque es un polinomio y sus derivadas direccionales se calculan multiplicando el gradiente por el vector unitario en la dirección correspondiente:

$$D(f)_{(1,-1)}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(2x-y,-x+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=\frac{3x-y-2}{\sqrt{2}}.$$

Deben cumplirse ahora las condiciones

$$\left\{\begin{array}{l}3x-y-2=0\\ x^2-xy+2y=0\end{array}\right.\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}y=3x-2\\ x^2-4x+2=0\end{array}\right.\quad\Longrightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}(x,y)=(2+\sqrt{2},4+3\sqrt{2})\\ (x,y)=(2-\sqrt{2},4-3\sqrt{2})\end{array}\right.$$

Problema 6.
Supóngase que f tiene derivadas parciales continuas y tiene derivada direccional máxima igual a 50 en el punto $P(1,2)$. Supóngase también que dicha derivada direccional máxima se alcanza en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$ con $Q=(4,6)$. Calcular $\nabla f(1,2)$.

SOLUCIÓN: La derivada direccional máxima es la derivada en la dirección del vector gradiente $v = \nabla f(1,0)$. Como

$$D_v f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \frac{v}{\|v\|} = \nabla f(1,0) \cdot \frac{\nabla f(1,0)}{\|\nabla f(1,0)\|} = \frac{\|\nabla f(1,0)\|^2}{\|\nabla f(1,0)\|} = \|\nabla f(1,0)\|\,,$$

deducimos que $\|\nabla f(1,0)\| = 50$.
Por otro lado, como $\overrightarrow{PQ} = (3,4)$, tenemos que $\|\overrightarrow{PQ}\| = 5$. Del enunciado deducimos también que $\nabla f(1,0) = k\,\overrightarrow{PQ} = (3,4)$ para alguna constante positiva k. Tomando módulos, deducimos que $50 = 5k$, de donde $k = 10$. Por lo tanto, $\nabla f(1,0) = (30,40)$.