uc3m | Universidad **Carlos III** de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO II
SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN 2
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

Problema 1.
Estudiar los extremos locales de la función

$$f(x,y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

SOLUCIÓN: Es una función diferenciable en todo punto. Calculamos sus puntos críticos:

$$\nabla f(x,y) = \left(y(x^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}, x(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}\right) = (0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y = 0, \\ x = \pm 1,\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Para clasificarlos utilizamos el Hessiano:

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} xy(3-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} & xy(3-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}.$$

Evaluamos en cada punto:

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (0,0) \text{ punto de silla.}$$

$$H(f)(1,1) = H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (1,1), (-1,-1) \text{ puntos mínimos locales.}$$

$$H(f)(1,-1) = H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (1,-1), (-1,1) \text{ puntos máximos locales.}$$

Problema 2.
Estudiar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2-x^2+2x-y^2-2y$ en $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$.

SOLUCIÓN: La función es continua por ser un polinomio y el conjunto D es un círculo cerrado (ya que contiene su frontera), luego es compacto. Entonces existen el máximo y mínimo de f restringida a D. Los buscamos primero en el interior calculando los puntos críticos

$$\nabla f(x,y) = (-2x+2, -2y-2) = (0,0) \quad \Longrightarrow \quad (x,y) = (1,-1).$$

Ese punto está en D porque $1^2 + (-1)^2 = 2 \le 4$. Buscamos ahora en la frontera de D, usando multiplicadores de Lagrange. Como $\partial D = \{(x,y) : x^2+y^2 = 4\}$, si $g(x,y) = x^2+y^2$, debe existir una constante λ tal que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (-2x+2, -2y-2) = \lambda(2x,2y) \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

De la ecuación vectorial anterior se deduce que $x \ne 0$, $y \ne 0$. Por tanto,

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1-x}{x} = \frac{-1-y}{y} \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -y \\ 2x^2 = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Evaluamos f en los tres puntos obtenidos (puesto que f es diferenciable en todo punto):

$$f(1,-1)=4, \quad f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}-2, \quad f\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=-2-4\sqrt{2}.$$

Entonces, el máximo absoluto de f en D es el punto $(1,-1)$ y el mínimo absoluto es $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Problema 3.
Una caja rectangular es colocada en el primer octante de $\mathbb{R}^3$ de manera que un vértice quede en el origen de coordenadas y las caras adyacentes a este vértice estén sobre los planos coordenados. El vértice P, opuesto al origen de coordenadas, está restringido a moverse sobre el paraboloide de ecuación $x^2+y^2+z=1$. ¿Para qué punto P el volumen de la caja es máximo? ¿Cuál es el volumen máximo?

Solución: Observemos en primer lugar que la intersección del paraboloide de ecuación $x^2+y^2+z=1$ con el primer cuadrante $\{(x,y,z):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$ es un conjunto cerrado y acotado y, por lo tanto, compacto. Como $V(x,y,z)=xyz$ es una función continua, por el teorema de Weierstrass deducimos que V alcanza máximo absoluto y mínimo absoluto en dicha intersección.
La función que debemos maximizar es $V(x,y,z)=xyz$ y debemos hacerlo con la restricciones $x^2+y^2+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$. Llamando $g(x,y,z)=x^2+y^2+z-1$, de acuerdo con el teorema de los multiplicadores de Lagrange, los puntos extremos de $V(x,y,z)$ sujeta la restricción $g(x,y,z)=0$ deben ser soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}\nabla V(x,y,z)=\lambda\,\nabla g(x,y,z)\,,\\ g(x,y,z)=0\,,\end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} yz=2\lambda x\,,\\ xz=2\lambda y\,,\\ xy=\lambda\,,\\ x^2+y^2+z=1\,.\end{cases}$$

Si fuera $x=0$, de la tercera ecuación deducimos que $\lambda=0$ y de la primera que ó bien $y=0$ ó bien $z=0$. De la última ecuación se deduce entonces que ó bien $z=1$ ó bien $y^2=1$. Por lo tanto, obtenemos los puntos críticos $P_1=(0,0,1)$ y $P_2=(0,1,0)$ en los que evidentemente $V=0$ y como $V\geq 0$ en el primer cuadrante deducimos que V alcanza en P_1 y P_2 su mínimo absoluto.
Si fuera $y=0$, deducimos de forma análoga que $\lambda=0$ y también que entonces ó bien $x=0$ y $z=1$, ó bien $z=0$ y $x^2=1$. Obtenemos de nuevo el punto crítico P_1 y el nuevo punto $P_3=(1,0,0)$ en el que también $V=0$ por lo que hemos obtenido un nuevo punto en el que V alcanza su mínimo absoluto.
Si $x\neq 0$, $y\neq 0$, entonces por la tercera ecuación deducimos que también $\lambda\neq 0$, por lo que podemos dividir la primera ecuación entre la segunda obteniendo:

$$\frac{yz}{xz}=\frac{2\lambda x}{2\lambda y} \implies \frac{y}{x}=\frac{x}{y} \implies x^2=y^2$$

y dividiendo la segunda ecuación entre la tercera, llegamos a

$$\frac{xz}{xy}=\frac{2\lambda y}{\lambda} \implies \frac{z}{y}=2y \implies y^2=\frac{z}{2}\,.$$

Usando ahora la última ecuación obtenemos que

$$\frac{z}{2}+\frac{z}{2}+z=1 \implies 2z=1 \implies z=\frac{1}{2}\,,$$

de donde $x^2=y^2=z/2=1/4$ por lo que $x=1/2$, $y=1/2$. Hemos obtenido, por tanto, el último punto crítico $P_4=(1/2,1/2,1/2)$ en el que V tiene que alcanzar necesariamente un máximo absoluto. El valor de dicho máximo es $V(1/2,1/2,1/2)=1/8$.
