uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas



**CÁLCULO II**
**SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN 3**
**Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez**

---

**Problema 1.**
Calcular la integral $\displaystyle\int_D \frac{y^2\cos(xy)}{x^2}\,dxdy$, donde

$$D=\Big\{(x,y):0\le x\le y\le 2x,\ \frac{\pi}{2x}\le y\le\frac{\pi}{x}\Big\}.$$

SOLUCIÓN: Hacemos el cambio de variable

$$\begin{cases} u=\dfrac{y}{x}, & u\in[1,2]\\ v=xy, & v\in[\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases} \implies T(u,v)=\left(\left(\frac{v}{u}\right)^{1/2},(uv)^{1/2}\right) \implies J(T)=\frac{-1}{2u},$$

y lo aplicamos a la integral

$$\int_D \frac{y^2\cos(xy)}{x^2}\,dxdy=\int_1^2\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{uv\cos v}{v/u}\,\frac{1}{2u}\,dv\,du=\frac12\int_1^2\int_{\pi/2}^{\pi}u\cos v\,dv\,du=\frac12\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^2\Big[\operatorname{sen}v\Big]_{\pi/2}^{\pi}=\frac{-3}{4}.$$

---

**Problema 2.**
Calcular la masa del sólido $\Omega$ limitado por las superficies de la semiesfera $\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge 0\}$ y del cono $\{(x,y,z):\ z=2-\sqrt{x^2+y^2}\}$ si la densidad de masa viene dada por $d(x,y)=x^2+y^2$.

SOLUCIÓN: La intersección del cono con la semiesfera es precisamente la circunferencia $x^2+y^2=4$ con $z=0$ (y el punto $(0,0,2)$), ya que la solución del sistema

$$\begin{cases} z=2-r\\ r^2+z^2=4\end{cases}$$

son precisamente $r=2$, $z=0$ y $r=0$, $z=2$. Como esta circunferencia es precisamente la intersección de la semiesfera con el plano $z=0$ y ya que el vértice del cono es el punto $(0,0,2)$ (que a su vez es el punto más alto de la semiesfera), tenemos que en el sólido el cono está por debajo de la semiesfera. La masa pedida es (pasando a coordenadas cilíndricas)

$$M=\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{2-r}^{\sqrt{4-r^2}} r^2\,r\,dz\,dr\,d\theta=2\pi\int_0^2 r^3\Big(\sqrt{4-r^2}-2+r\Big)\,dr\,.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $4-r^2=t$ en el primer sumando de la integral, tenemos que

$$M=2\pi\Big(-\frac12\int_4^0(4-t)\,t^{1/2}\,dt+\Big[-2\frac{r^4}{4}+\frac{r^5}{5}\Big]_0^2\Big)=2\pi\Big(\frac12\Big[\frac83\,t^{3/2}-\frac25\,t^{5/2}\Big]_0^4-8+\frac{32}{5}\Big)=\frac{16\pi}{3}\,.$$

---

**Problema 3.**
Integrar la función $f(x,y,z)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en la parte del cilindro $x^2+y^2\le 1$ por encima del plano $z=0$ y debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN: Integramos en coordenadas cilíndricas:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r}\, r\, dz\, d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 r \operatorname{sen}(r^2)\, dr = 2\pi \left[ \frac{-1}{2} \cos(r^2) \right]_0^1 = \pi(1-\cos 1).$$

---

**Problema 4.**
Calcular el centro de masas del sólido

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

con densidad $d = \sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN: El sólido es la semiesfera superior. Calculamos primero la masa en coordenadas esféricas. Como $d = \rho \operatorname{sen}\phi$ en esas coordenadas, tenemos que

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho \operatorname{sen}\phi\, (\rho^2 \operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, d\rho\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi \\ &= 2\pi \Big[\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\phi}{2}\, d\phi = \frac{\pi}{4}\Big[\phi - \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \end{aligned}$$

Por ser el recinto simétrico respecto de los ejes $x$ e $y$, y la densidad también, se tiene $x_{CM} = y_{CM} = 0$. La coordenada $z_{CM}$ se obtiene calculando la integral

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho\cos\phi\, \rho \operatorname{sen}\phi\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\rho\, d\theta = \frac{2\pi}{M} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \rho^4 \operatorname{sen}^2\phi\, \cos\phi\, d\phi\, d\rho \\ &= \frac{16}{\pi} \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi\, \cos\phi\, d\phi = \frac{16}{\pi}\, \frac{1}{5} \Big[\frac{\operatorname{sen}^3\phi}{3}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{16}{15\pi}\,. \end{aligned}$$

---

**Problema 5.**
La temperatura en los puntos del cubo $Q = [-\alpha^2, \alpha^2]^3$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

a) Calcular la temperatura media del cubo.

b) Encontrar en qué puntos del cubo la temperatura coincide con la media.

SOLUCIÓN: a) De acuerdo con el enunciado la temperatura es la función $T(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$ para una cierta constante $k > 0$. Es claro que el volumen del cubo es $V = (2\alpha^2)^3 = 8\alpha^6$. Por tanto, la temperatura media es

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{8\alpha^6} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} T(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{8\alpha^6} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} \int_{-\alpha^2}^{\alpha^2} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz \\ &= 8\, \frac{k}{8\alpha^6} \int_0^{\alpha^2} \int_0^{\alpha^2} \int_0^{\alpha^2} (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{k}{\alpha^6} \int_0^{\alpha^2} \int_0^{\alpha^2} \Big[x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3}\Big]_{z=0}^{z=\alpha^2} dx\, dy \\ &= \frac{k}{\alpha^4} \int_0^{\alpha^2} \int_0^{\alpha^2} \Big(x^2+y^2+\frac{\alpha^4}{3}\Big) dx\, dy = \frac{k}{\alpha^4} \int_0^{\alpha^2} \Big[x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{\alpha^4}{3} y\Big]_{y=0}^{y=\alpha^2} dx \\ &= \frac{k}{\alpha^2} \int_0^{\alpha^2} \Big(x^2 + \frac{2\alpha^4}{3}\Big)\, dx = \frac{k}{\alpha^2} \Big[\frac{x^3}{3} + \frac{2\alpha^4}{3} x\Big]_{x=0}^{x=\alpha^2} = \frac{k}{\alpha^2} \Big(\frac{\alpha^6}{3} + \frac{2\alpha^6}{3}\Big) = k\alpha^4. \end{aligned}$$

b) Los puntos en que la temperatura es igual a la temperatura media son aquellos que cumplen la ecuación

$$k(x^2+y^2+z^2) = k\alpha^4 \implies x^2+y^2+z^2 = \alpha^4,$$

es decir, los puntos de la esfera de centro en el origen de coordenadas y radio $\alpha^2$.

---