uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO II
SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN 4
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

Problema 1.
Calcular de dos formas distintas la integral del campo vectorial $F(x,y) = (xy^2 + 5y, 4x + x^2 y)$ sobre la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj.

SOLUCIÓN: Podemos parametrizar la circunferencia como $\gamma(t) = (2\cos t,\ 2\operatorname{sen} t)$ con $0 \le t \le 2\pi$, y usando la definición de integral de línea se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (8\operatorname{sen}^2 t\cos t + 10\operatorname{sen} t,\ 8\cos t + 8\operatorname{sen} t\cos^2 t)\cdot(-2\operatorname{sen} t,\ 2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-16\operatorname{sen}^3 t\cos t - 20\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 16\cos^3 t\operatorname{sen} t)\, dt \\
&= \Big[-4\operatorname{sen}^4 t - 4\cos^4 t \Big]_{t=0}^{t=2\pi} - 20\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt + 16\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\
&= -20\pi + 16\pi = -4\pi\,,
\end{aligned}$$

ya que $\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = 0$.
Podemos hacer también el cálculo por medio del Teorema de Green, ya que la curva es cerrada. Como γ es la frontera del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2, llamando $P(x,y) = xy^2 + 5y$, $Q(x,y) = 4x + x^2 y$, tenemos

$$\int_\gamma F = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 4\}} dx\, dy = -4\pi\,.$$

Problema 2.
Sea el campo vectorial $F(x,y) = (\cos y + 2xy, -x\operatorname{sen} y + x^2)$. Hallar $\int_\gamma F\, ds$, siendo γ el arco de la parábola $y = x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.
Indicación: Estudia si F es un campo conservativo.

SOLUCIÓN: El campo F es conservativo porque $\dfrac{\partial}{\partial y}(\cos y + 2xy) = -\operatorname{sen} y + 2x = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x\operatorname{sen} y + x^2)$. Calculamos el potencial V del que se deriva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial V/\partial x = \cos y + 2xy, \\ \partial V/\partial y = -x\operatorname{sen} y + x^2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V(x,y) = x\cos y + x^2 y + C(y), \\ -x\operatorname{sen} y + x^2 = -x\operatorname{sen} y + x^2 + C'(y) \Longrightarrow C(y) = k \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow V(x,y) = x\cos y + x^2 y + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La integral sólo dependerá de los puntos inicial y final, al ser F un campo conservativo,

$$\int_\gamma F \cdot ds = V(1,1) - V(0,0) = \cos 1 + 1.$$

Problema 3.
Calcular
$$\int_\gamma y e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx + (\operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x})\,dy,$$
donde γ es la frontera (orientada en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj) de
$$W = \left\{(x,y) : 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x,\ x \ge 0\right\}.$$

Solución: Aplicando el teorema de Green e integrando por partes, se obtiene
$$\begin{aligned}\int_\gamma y e^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx + (\operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x})\,dy &= \int_W \left(\frac{\partial(\operatorname{sen} x + e^{\operatorname{sen} x})}{\partial x} - \frac{\partial(y e^{\operatorname{sen} x}\cos x)}{\partial y}\right) dx\,dy\\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2 - x} \cos x\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\,dx\\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$
haciendo $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, $du = -dx$, $dv = \cos x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$.

Problema 4.
Calcular la integral $\int_S \operatorname{rot}(F)\cdot n$ de dos maneras distintas, siendo S la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $y \le 0$, orientada con la normal exterior a la esfera, y $F(x,y,z) = (\cos x, 2xy^2 + z^2, yz)$.

Solución: Primera forma (directamente): Parametrizamos la superficie (la semiesfera izquierda, con radio 3 centrada en el origen)
$$\Phi(u,v) = (3\operatorname{sen} v\cos u, 3\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, 3\cos v), \quad u \in [\pi, 2\pi], \quad v \in [0,\pi],$$
$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u & 3\operatorname{sen} v\cos u & 0\\ 3\cos v\cos u & 3\cos v\operatorname{sen} u & -3\operatorname{sen} v\end{vmatrix} = (-9\operatorname{sen}^2 v\cos u, -9\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u, -9\operatorname{sen} v\cos v).$$
La normal en el punto más al oeste es $T_u \times T_v(3\pi/2, \pi/2) = (0,9,0)$, que apunta hacia dentro, luego la orientación es la contraria a la pedida. Entonces
$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \cos x & 2xy^2 + z^2 & yz\end{vmatrix} = (-z, 0, 2y^2),$$
$$\begin{aligned}\int_S \operatorname{rot}(F)\cdot n &= -\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi (-3\cos v, 0, 18\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}^2 u)\cdot(-9\operatorname{sen}^2 v\cos u, -9\operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen} u, -9\operatorname{sen} v\cos v)\,dv\,du\\ &= -\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi \left(27\operatorname{sen}^2 v\cos v\cos u - 162\operatorname{sen}^3 v\cos v\operatorname{sen}^2 u\right) dv\,du\\ &= -\int_\pi^{2\pi}\left[9\operatorname{sen}^3 v\cos u - \frac{81}{2}\operatorname{sen}^4 v\operatorname{sen}^2 u\right]_{v=0}^{v=\pi} du = -\int_\pi^{2\pi} 0\,du = 0.\end{aligned}$$

Segunda forma (utilizando el Teorema de Stokes): $\int_S \operatorname{rot}(F)\cdot n = \int_{\partial S^+} F\cdot ds$, donde ∂S^+ es la frontera de S recorrida en el sentido que hace avanzar al sacacorchos en la dirección de la normal a S. La frontera es la circunferencia de radio 3 centrada en el origen situada en el plano XZ, que se parametriza por
$$\gamma(t) = (3\cos t, 0, 3\operatorname{sen} t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \gamma'(t) = (-3\operatorname{sen} t, 0, 3\cos t),$$

que da el sentido de recorrido buscado. Por tanto,

$$\int_{\partial S^+} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \big(\cos(3\cos t), 9\operatorname{sen}^2 t, 0\big) \cdot (-3\operatorname{sen} t, 0, 3\cos t)\, dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-3\operatorname{sen} t)\cos(3\cos t)\, dt = \Big[\operatorname{sen}(3\cos t)\Big]_0^{2\pi} = 0.$$

Problema 5.
Sean V el sólido limitado por las tres superficies

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - 3x^2 - 3y^2,\ 1 \le z \le 4\}, \\ S_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1\}, \\ S_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}, \end{aligned}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, y F el campo vectorial $F(x,y,z) = (xy, -y^2, z)$. Calcular $\displaystyle\int_S F$, si S está orientada con la normal exterior.

Solución: Como la superficie es cerrada, por el teorema de Gauss se obtiene

$$\iint_S F = \iiint_V \operatorname{div} F\, dx\, dy\, dz = \iiint_V (1-y)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Haciendo el cambio de variable a coordenadas cilíndricas, tenemos

$$\iint_S F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-3r^2} (1 - r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dz\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4-3r^2)(1 - r\operatorname{sen}\theta)\, r\, d\theta\, dr$$
$$= \int_0^1 (4r - 3r^3)\big[\theta + r\cos\theta\big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 (4r - 3r^3)\, dr$$
$$= 2\pi\Big[2r^2 - 3\,\frac{r^4}{4}\Big]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\Big(2 - \frac{3}{4}\Big) = \frac{5\pi}{2}\,.$$
