uc3m | Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Matemáticas

CÁLCULO II
SOLUCIONES DE LA AUTOEVALUACIÓN 5
Elaboradas por Domingo Pestana y José Manuel Rodríguez

Problema 1. Encontrar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación y aplicando la fórmula de transformación de las derivadas, tenemos que

$$L[y''](s) + 4L[y'](s) + 4L[y](s) = L[e^{-2t}](s) \implies sL[y'](s) - y'(0) + 4sL[y](s) - 4y(0) + 4L[y](s) = \frac{1}{s+2}.$$

Sustituyendo los valores iniciales y volviendo a usar la fórmula de transformación de las derivadas, obtenemos

$$s^2L[y](s) - s + 4sL[y](s) - 4 + 4L[y](s) = \frac{1}{s+2} \implies (s^2+4s+4)L[y](s) = \frac{1}{s+2} + s + 4\,,$$

es decir,

$$(s+2)^2L[y](s) = \frac{1}{s+2} + s + 4 \implies L[y](s) = \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{s+4}{(s+2)^2}\,.$$

Como

$$\frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{s+2+2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}\,,$$

tenemos que

$$L[y](s) = \frac{1}{(s+2)^3} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}\,,$$

y, usando la tabla de transformadas de Laplace, obtenemos finalmente

$$y(t) = \frac{1}{2}\,t^2e^{-2t} + 2te^{-2t} + e^{-2t}\,.$$

Problema 2.
Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Transformamos por Laplace, despejamos $L[y](s)$ y antitransformamos:

$$L[y''](s) + 4L[y](s) = L[\mathrm{e}^t](s) \quad\implies\quad s^2L[y](s) - sy(0) - y'(0) + 4L[y](s) = \frac{1}{s-1}\,,$$

$$(s^2+4)L[y](s) = \frac{1}{s-1} + s \quad\implies\quad L[y](s) = \frac{1}{(s^2+4)(s-1)} + \frac{s}{s^2+4} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s-1} + \frac{s}{s^2+4}\,,$$

$$L[y](s) = \frac{-s/5 - 1/5}{s^2+4} + \frac{1/5}{s-1} + \frac{s}{s^2+4} = \frac{4}{5}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{10}\,\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{s-1}\,,$$

$$y(t) = \frac{4}{5}\,\cos 2t - \frac{1}{10}\,\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^t.$$

Problema 3.
Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = 0, \quad t > 0\,, \\ y(0) = 1\,,\;\; y'(0) = 1\,,\;\; y''(0) = 3\,. \end{cases}$$

Solución: En primer lugar, usando la regla de transformación de la derivada: $L[f'] = s\,L[f] - f(0)$, tenemos

$$\begin{aligned} L[y'](s) &= sL[y](s) - y(0) = sL[y](s) - 1\,, \\ L[y''](s) &= sL[y'](s) - y'(0) = s(sL[y](s) - 1) - 1 = s^2L[y](s) - s - 1\,, \\ L[y'''](s) &= sL[y''](s) - y''(0) = s(s^2L[y](s) - s - 1) - 3 = s^3L[y](s) - s^2 - s - 3\,. \end{aligned}$$

Aplicando ahora la transformada de Laplace a la ecuación diferencial tenemos

$$L[y'''](s) - L[y''](s) + L[y'](s) - L[y](s) = 0 \implies (s^3 - s^2 + s - 1)L[y](s) - s^2 - 3 = 0\,,$$

de donde

$$L[y](s) = \frac{s^2+3}{s^3 - s^2 + s - 1} = \frac{s^2+3}{(s-1)(s^2+1)}\,.$$

Descomponiendo en fracciones simples, llegamos a que

$$\frac{s^2+3}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \implies s^2 + 3 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)\,.$$

Dando valores a s, obtenemos

$$s = 1 \implies 2A = 4 \implies A = 2\,, \qquad\qquad s = 0 \implies A - C = 3 \implies C = A - 3 \implies C = -1\,.$$

Igualando los coeficientes de s^2, se tiene

$$A + B = 1 \implies B = 1 - A \implies B = -1\,.$$

Por lo tanto,

$$L[y](s) = \frac{2}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+1}\,,$$

y usando la tabla de transformadas, finalmente deducimos que

$$y(t) = 2e^t - \cos t - \operatorname{sen} t\,.$$
